

Sukhinov Alexander Ivanovich

Taganrog Institute of Technology – Federal State-Owned Autonomy Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”.

E-mail: sukhinov@gmail.ru

44, Nekrasovskiy, Taganrog, 347928, Russia.

Phone: +78634310599.

The Head of TIT SFedU; Dr. of Phis.-Math. Sc.; Professor.

Ogurtsov Evgeny Sergeevich,

E-mail: evg8787@mail.ru.

Phone: +78634683076.

The Department of Higher Mathematics; Postgraduate Student.

Chistyakov Alexander Evgenjevich

E-mail: cheese_05@mail.ru.

Phone: +78634371606.

The Department of Higher Mathematics; Assistant.

УДК 519.6

Н.А. Фоменко

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ ПРИ
ОБТЕКАНИИ КОРПУСА СУДНА**

Рассмотрена модель движения жидкости, обтекающей корпус судна. Для построения данной математической модели использован метод поправки к давлению для задач волновой динамики, для получения консервативной разностной схемы использован интегро-интерполяционный метод. В работе выполнена программная реализация разработанной двумерной математической модели волновых процессов жидкой среды. Программа предназначена для построения двумерных полей скоростей движения водной среды в случае нахождения на водной поверхности судна. Приведены результаты численных экспериментов.

Математическая модель; обтекание корпуса судна; сеточные уравнения.

N.A. Fomenko

**MODELLING OF HYDRODYNAMICS PROCESSES AT THE FLOW OF CASE
OF THE VESSEL**

In this paper, a mathematical model for simulation of fluid flowing around the vessel. For construction of the given mathematical model is used the amendment method to pressure for problems of wave dynamics, for reception conservative differential schemes is used integro-interpolation method. In work a program realization of the developed two-dimensional mathematical model of wave processes of the liquid environment is executed. The program is intended for construction of two-dimensional fields of speeds of movement of the water environment in case of a finding a vessel on a water surface. Computer realization of two-dimensional mathematical model of water medium moving has been presented.

Modeling of water medium; flow around the vessel; grid equations.

При движении судов в мелководных водоемах по судоходным каналам возникает движение водной среды, вызванное как движением самого корпуса, так и в результате действия гребного винта. Данные процессы в условиях мелководья приводят к подъему донных отложений и размыву стенок каналов, с одновременным отложением взмученной взвеси. Это, в свою очередь, приводит к нежелательному изменению геометрии дна канала, в частности изменению его глубины. Для прогнозирования процессов заиления необходимо детально исследовать гидродинамические процессы, происходящие в водной среде вблизи судна.

В силу сказанного, тема данной статьи является актуальной. И первым шагом на пути решения описанной проблемы, в данной работе, является построение численной модели обтекания водной среды корпуса жестко закрепленного судна.

Построение модели. В работе Тимофеевой. Е.Ф. была предложена непрерывная математическая модель, описывающая распространение поверхностных волн от начальных возмущений. Для случая теории мелкой воды с нелинейной функцией рельефа дна проведена схематизация задачи, на основе которой получено ее аналитическое решение [2]. В данной работе построена непрерывная и дискретная модель обтекания водной среды корпуса жестко закрепленного судна. Система координат, а также область, в которой рассматривается процесс обтекания, представлены на рис.1. Оси координат: Ox – направлена вправо, Oz – направлена вниз. Исходными уравнениями рассматриваемой задачи волновой динамики жидкости являются [1]:

- ♦ уравнения движения (Навье–Стокса):

$$u'_t + uu'_x + ww'_z = -\frac{1}{\rho} P'_x + (\mu u'_x)'_x + (\eta u'_z)'_z, \quad (1)$$

$$w'_t + uw'_x + ww'_z = -\frac{1}{\rho} P'_z + (\mu w'_x)'_x + (\eta w'_z)'_z + g; \quad (2)$$

- ♦ уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости:

$$u'_x + w'_z = 0, \quad (3)$$

где u, w – компоненты вектора скорости; P – давление; g – ускорение свободного падения; μ, η – коэффициенты турбулентного обмена по горизонтали и вертикали соответственно.

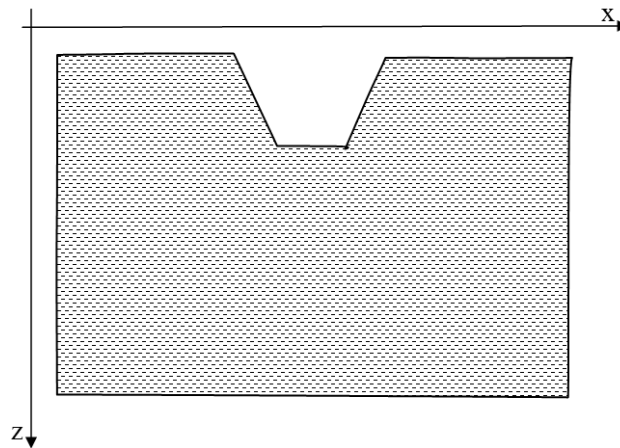


Рис. 1

Система уравнений (1)–(3) рассматривается при следующих граничных условиях [1]:

- ♦ левая боковая граница (задается источник):

$$u(x, z, t) = u(t), w(x, z, t) = w(t), P'_n(x, z, t) = 0, \text{ при } (x, z) \in \gamma;$$

- ♦ правая боковая граница (условия свободного выхода):

$$u'_n(x, z, t) = 0, w'_n(x, z, t) = 0, P'_n(x, z, t) = 0 \text{ при } (x, z) \in \gamma;$$

- ◆ на дне водоема и нижней поверхности обтекаемой области:
 $u(x, z, t) = 0, w(x, z, t) = 0, P'_n(x, z, t) = 0$ при $(x, z) \in \gamma$;

- ◆ на верхней поверхности:

$$u'_n(x, z, t) = 0, w(x, z, t) = -\frac{P'_t}{\rho g}, P'_n(x, z, t) = 0 \text{ при } (x, z) \in \gamma.$$

Для численной реализации дискретной математической модели поставленной задачи волновой гидродинамики покроем область прямоугольной сеткой:

$$\omega = \omega_x \times \omega_z \times \omega_t$$

$$\omega_x : \{x_i = ih_x, i = \overline{0, N_x - 1}, h_x(N_x - 1) = l_x\},$$

$$\omega_z : \{z_k = kh_z, k = \overline{0, N_z - 1}, h_z(N_z - 1) = l_z\},$$

$$\omega_t : \{t^n = nh_t, n = \overline{0, N_t}, h_t N_t = l_t\},$$

где i, k, n – индексы по координатным направлениям x, z, t ; N_x, N_z, N_t – количество узлов; h_x, h_z, h_t – шаги по координатным направлениям.

Аппроксимируем систему уравнений (1),(2) по временной переменной:

$$\frac{\hat{u} - u}{h_t} + u\bar{u}'_x + w\bar{u}'_z = -\frac{1}{\rho} \hat{P}'_x + (\mu\bar{u}'_x)'_x + (\eta\bar{u}'_z)'_z, \quad (4)$$

$$\frac{\hat{w} - w}{h_t} + u\bar{w}'_x + w\bar{w}'_z = -\frac{1}{\rho} \hat{P}'_z + (\mu\bar{w}'_x)'_x + (\eta\bar{w}'_z)'_z + g. \quad (5)$$

Для построения математической модели использован метод поправки к давлению, который является частным случаем метода маркеров и ячеек (MAC-метод, метод поправки к давлению, или его еще называют метод расщепления по физическим процессам) для задач волновой динамики.

Расщепляя уравнения (4), (5) по физическим процессам, получим

$$\frac{\tilde{u} - u}{h_t} + u\bar{u}'_x + w\bar{u}'_z = (\mu\bar{u}'_x)'_x + (\eta\bar{u}'_z)'_z, \quad (6)$$

$$\frac{\tilde{w} - w}{h_t} + u\bar{w}'_x + w\bar{w}'_z = (\mu\bar{w}'_x)'_x + (\eta\bar{w}'_z)'_z + g, \quad (7)$$

$$P''_{xx} + P''_{yy} = \frac{\rho}{h_t} (\tilde{u}'_x + \tilde{v}'_y), \quad (8)$$

$$\frac{\hat{u} - \tilde{u}}{h_t} = -\frac{1}{\rho} \hat{P}'_x, \quad (9)$$

$$\frac{\hat{w} - \tilde{w}}{h_t} = -\frac{1}{\rho} \hat{P}'_z. \quad (10)$$

Для получения консервативной разностной схемы использован интегрирующе-интерполяционный метод. Выбрана область T , по которой произведено интегрирование:

$$T: \left\{ x \in \left[x_{i-\frac{1}{2}}; x_{i+\frac{1}{2}} \right], z \in \left[z_{k-\frac{1}{2}}; z_{k+\frac{1}{2}} \right], t \in [t^n; t^{n+1}] \right\}.$$

Проинтегрировав уравнение (6), получим

$$\begin{aligned} & \frac{\tilde{u}_{i,j} - \bar{u}_{i,j}}{h_t} h_x h_z + u_{i-1/2,k} h_z \frac{\bar{u}_{i,k} - \bar{u}_{i-1,k}}{2} + u_{i+1/2,k} h_z \frac{\bar{u}_{i+1,k} - \bar{u}_{i,k}}{2} + \\ & + w_{i,k-1/2} h_x \frac{\bar{u}_{i,k} - \bar{u}_{i,k-1}}{2} + w_{i,k+1/2} h_x \frac{\bar{u}_{i,k+1} - \bar{u}_{i,k}}{2} = \\ & = \left(\mu_{i+1/2,k} \frac{\bar{u}_{i+1,k} - \bar{u}_{i,k}}{h_x} - \mu_{i-1/2,k} \frac{\bar{u}_{i,k} - \bar{u}_{i-1,k}}{h_x} \right) h_z + \\ & + \left(\eta_{i,k+1/2} \frac{\bar{u}_{i,k+1} - \bar{u}_{i,k}}{h_z} - \eta_{i,k-1/2} \frac{\bar{u}_{i,k} - \bar{u}_{i,k-1}}{h_z} \right) h_x. \end{aligned}$$

Разделив полученное уравнение на $h_x h_z$, запишем конечно-разностную схему для уравнения (6):

$$\begin{aligned} & \frac{\tilde{u}_{i,k} - u_{i,k}}{h_t} + u_{i-1/2,k} \frac{\bar{u}_{i,k} - \bar{u}_{i-1,k}}{2h_x} + u_{i+1/2,k} \frac{\bar{u}_{i+1,k} - \bar{u}_{i,k}}{2h_x} + \\ & + w_{i,k-1/2} \frac{\bar{u}_{i,k} - \bar{u}_{i,k-1}}{2h_z} + w_{i,k+1/2} \frac{\bar{u}_{i,k+1} - \bar{u}_{i,k}}{2h_z} = \\ & = \mu_{i+1/2,k} \frac{\bar{u}_{i+1,k} - \bar{u}_{i,k}}{h_x^2} - \mu_{i-1/2,k} \frac{\bar{u}_{i,k} - \bar{u}_{i-1,k}}{h_x^2} + \\ & + \eta_{i,k+1/2} \frac{\bar{u}_{i,k+1} - \bar{u}_{i,k}}{h_z^2} - \eta_{i,k-1/2} \frac{\bar{u}_{i,k} - \bar{u}_{i,k-1}}{h_z^2}. \end{aligned}$$

Аналогично запишем конечно-разностную схему для уравнения (7):

$$\begin{aligned} & \frac{\tilde{w}_{i,k} - w_{i,k}}{h_t} + u_{i-1/2,k} \frac{\bar{w}_{i,k} - \bar{w}_{i-1,k}}{2h_x} + u_{i+1/2,k} \frac{\bar{w}_{i+1,k} - \bar{w}_{i,k}}{2h_x} + \\ & + w_{i,k-1/2} \frac{\bar{w}_{i,k} - \bar{w}_{i,k-1}}{2h_z} + w_{i,k+1/2} \frac{\bar{w}_{i,k+1} - \bar{w}_{i,k}}{2h_z} = \\ & = \mu_{i+1/2,k} \frac{\bar{w}_{i+1,k} - \bar{w}_{i,k}}{h_x^2} - \mu_{i-1/2,k} \frac{\bar{w}_{i,k} - \bar{w}_{i-1,k}}{h_x^2} + \\ & + \eta_{i,k+1/2} \frac{\bar{w}_{i,k+1} - \bar{w}_{i,k}}{h_z^2} - \eta_{i,k-1/2} \frac{\bar{w}_{i,k} - \bar{w}_{i,k-1}}{h_z^2} + g. \end{aligned}$$

Конечно-разностная схема для уравнений (9), (10) имеет вид

$$\frac{\hat{u}_{i,k} - \tilde{u}_{i,k}}{h_x} = -\frac{P_{i+1/2,k} - P_{i-1/2,k}}{\rho h_x},$$

$$\frac{\hat{w}_{i,j} - \tilde{w}_{i,j}}{h_t} = -\frac{P_{i,k+1/2} - P_{i,k-1/2}}{\rho h_z}.$$

Выполнена программная реализация разработанной двумерной математической модели волновых процессов жидкой среды. Программа предназначена для построения двумерных полей скоростей движения водной среды в случае нахождения на водной поверхности судна. Программа составлена и реализована на языке C++. Проведен ряд численных экспериментов, которые позволяют выявить физические закономерности распределения волновых полей по расчетной области.

Алгоритм программы «Расчет движения водной среды при условии нахождения на водной поверхности жестко закрепленного судна»:

1° Начало работы программного компонента.

2° Выделение памяти под массивы и чтение входных данных.

3° Задаются заполненности ячеек и маски граничных условий в центральных узлах:

◆ верхняя стенка:

$$mask_u(p) = 1, \quad mask_p(p) = 1;$$

изменение уровня:

$$mask_u(p) = 1, \quad mask_p(p) = 4;$$

◆ левая стенка:

$$mask_u(p) = 0, \quad mask_p(p) = 2;$$

◆ правая стенка:

$$mask_u(p) = 1, \quad mask_p(p) = 1;$$

– нижняя стенка (поток отсутствует):

$$mask_u(p) = 0, \quad mask_p(p) = 3.$$

4° Начало цикла по времени (цикл по t).

5° Расчет скорости без учета давления.

Ниже показан алгоритм расчета коэффициентов сеточных уравнений. Для узлов $(i, k): i = 1, N_x - 2, k = 1, N_z - 2$ вычисляем номер узла, стоящего в центре шаблона: $p = i + kN_x$.

Маска $mask_u(p)$ может принимать два значения.

1. В случае, когда маска узла с номером p равна 1.

На первом шаге вычисляются номера узлов стоящих в окрестности шаблона:

$$q_1 = p + 1, \quad q_2 = p - 1, \quad q_3 = p + N_x, \quad q_4 = p - N_x, \quad q_{24} = p - N_x - 1.$$

На втором шаге вычисляются переменные m :

$$m_1 = \frac{o(p) + o(q_4)}{2}, \quad m_2 = \frac{o(q_2) + o(q_{24})}{2}, \quad m_3 = \frac{o(p) + o(q_2)}{2},$$

$$m_4 = \frac{o(q_4) + o(q_{24})}{2}, \quad m_0 = \frac{k_1 + k_2}{2},$$

где O – заполненность ячейки.

На третьем шаге вычисляются вспомогательные коэффициенты $\tilde{B}(p, q_i)$ $i = \overline{1, 4}$:

$$\begin{aligned}\tilde{B}(p, q_1) &= \left(-\frac{u(q_1) + u(p)}{4h_x} + \frac{\mu(q_1) + \mu(p)}{2h_x^2} \right) m_1(p), \\ \tilde{B}(p, q_2) &= \left(\frac{u(q_2) + u(p)}{4h_x} + \frac{\mu(q_2) + \mu(p)}{2h_x^2} \right) m_2(p), \\ \tilde{B}(p, q_3) &= \left(-\frac{w(q_3) + w(p)}{4h_z} + \frac{\mu(q_3) + \mu(p)}{2h_z^2} \right) m_3(p), \\ \tilde{B}(p, q_4) &= \left(\frac{w(q_4) + w(p)}{4h_z} + \frac{\mu(q_4) + \mu(p)}{2h_z^2} \right) m_4(p).\end{aligned}$$

На четвертом шаге вычисляются коэффициенты на предыдущем временном слое $B(p, q_i)$ $i = \overline{6, 9}$:

$$B(p, q_i) = (1 - \sigma) \tilde{B}(p, q_{i-5}).$$

На пятом шаге вычисляются коэффициенты сеточного уравнения, стоящие в окрестности центра шаблона $B(p, q_i)$ $i = \overline{1, 4}$:

$$B(p, q_i) = \sigma \tilde{B}(p, q_i).$$

На шестом шаге вычисляется коэффициент уравнения, стоящий при центральном узле:

$$\begin{aligned}A(p) &= \frac{m_0}{h_t} + B(p, q_1) + B(p, q_2) + B(p, q_3) + B(p, q_4) - \\ &\quad - \left(\frac{|m_2 - m_1| \mu(p) \alpha_x}{h_x} + \frac{|m_4 - m_3| \mu(p) \alpha_z}{h_z} \right) \sigma,\end{aligned}$$

и коэффициент:

$$\begin{aligned}B(p, q_5) &= \frac{m_0}{h_t} - (B(p, q_6) + B(p, q_7) + B(p, q_8) + B(p, q_9)) + \\ &\quad + \left(\frac{|m_2 - m_1| \mu(p) \alpha_x}{h_x} + \frac{|m_4 - m_3| \mu(p) \alpha_z}{h_z} \right) (1 - \sigma).\end{aligned}$$

На седьмом шаге вычисляем правые части:

$$\begin{aligned}F_u(p) &= \frac{|m_2 - m_1| \mu(p) \beta_x}{h_x} + \frac{|m_4 - m_3| \mu(p) \beta_z}{h_z} + B(p, q_5) u(p) + \\ &\quad + B(p, q_6) u(q_1) + B(p, q_7) u(q_2) + B(p, q_8) u(q_3) + B(p, q_9) u(q_4),\end{aligned}$$

$$F_w(p) = \frac{|m_2 - m_1| \mu(p) \beta_x}{h_x} + \frac{|m_4 - m_3| \mu(p) \beta_z}{h_z} + B(p, q_5) w(p) +$$

$$+ B(p, q_6) w(q_1) + B(p, q_7) w(q_2) + B(p, q_8) w(q_3) + B(p, q_9) w(q_4).$$

2. В случае, когда маска узла с номером p равна 0.

$$A(p) = 1, \quad B(p, q_1) = B(p, q_2) = B(p, q_3) = B(p, q_4) = F(p) = 0.$$

Результатом работы данной функции является расчет поля скорости без учета давления.

6° Расчет давления:

Первый и второй шаг совпадает с первым и вторым шагом 5°.

На третьем шаге вычисляются коэффициенты сеточного уравнения, стоящие в окрестности центра шаблона $B(p, q_i)$ $i = \overline{1, 4}$:

$$B(p, q_1) = \frac{m_1}{h_x h_x}, \quad B(p, q_2) = \frac{m_2}{h_x h_x}, \quad B(p, q_3) = \frac{m_3}{h_z h_z}, \quad B(p, q_4) = \frac{m_4}{h_z h_z}.$$

На четвертом шаге вычисляется коэффициент уравнения, стоящий при центральном узле:

$$A(p) = B(p, q_1) + B(p, q_2) + B(p, q_3) + B(p, q_4) -$$

$$- \left(\frac{|m_2 - m_1| \alpha_x}{h_x} + \frac{|m_4 - m_3| \alpha_z}{h_z} \right).$$

На пятом шаге вычисляем правую часть:

$$F(p) = \frac{|m_2 - m_1| \beta_x}{h_x} + \frac{|m_4 - m_3| \beta_z}{h_z} -$$

$$- \frac{\rho}{h_t} \left(\frac{m_1(u(p) + u(q_1)) - m_2(u(p) + u(q_2))}{2h_x} + \frac{m_3(w(p) + w(q_3)) - m_4(w(p) + w(q_4))}{2h_z} \right).$$

Для случая, когда $mask(p) = 2$:

$$F(p) = F(p) - \frac{\rho}{h_t} \left(\frac{(m_2 - m_1)u(p)}{h_x} + \frac{(m_4 - m_3)w(p)}{h_z} \right).$$

Для случая, когда $mask(p) = 4$:

$$A(p) = A(p) + \frac{|m_3 - m_4|}{h_z g h_t^2}, \quad F(p) = F(p) + P(p) \frac{|m_3 - m_4|}{h_z g h_t^2}.$$

Для случая, когда $mask(p) = 0$:

$$A(p) = A(p) + 1.$$

Результатом работы данной функции является поле давления.

7° Уточнение скорости по давлению.

Первый и второй шаг совпадает с первым и вторым шагом 5°.

Далее производится уточнение скорости по давлению для $mask(p) = 1$:

$$u(p) = u(p) - \frac{h_t}{m_0 \rho} \left(\frac{m_1(P(q_1) - P(p))}{2h_x} + \frac{m_2(P(p) - P(q_2))}{2h_x} \right),$$

$$w(p) = w(p) - \frac{h_t}{m_0 \rho} \left(\frac{m_3(P(q_3) - P(p))}{2h_z} + \frac{m_4(P(p) - P(q_4))}{2h_z} \right).$$

8° Вывод данных полей скорости и давления в текстовые файлы.

9° Нарастивание времени.

10° Если время меньше, чем время выхода из цикла, то возвращаемся в пункт 2°.

11° Конец работы программы «Расчёт движения водной среды при условии нахождения на водной поверхности жестко закрепленного судна».

Результаты численных экспериментов для расчета математической модели гидродинамических процессов при обтекании корпуса судна приведены на рис. 2.

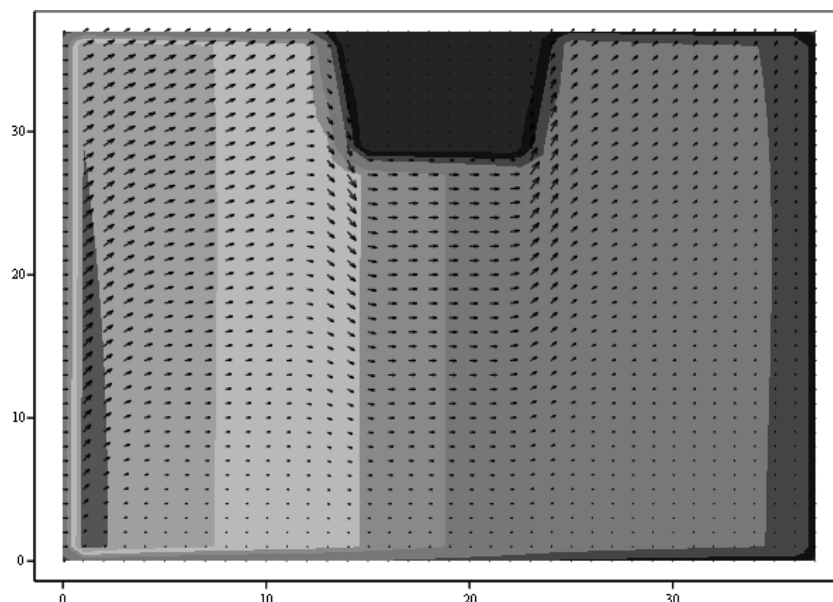


Рис. 2. Результаты численного моделирования

Выводы. В работе разработана непрерывная модель гидродинамических процессов при обтекании корпуса судна. Выполнена программная реализация двумерной математической модели гидродинамических процессов жидкой среды с учетом нахождения на поверхности жидкости жестко закрепленного надводного тела.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Сухинов А. И., Чистяков А. Е., Алексеенко Е. В. Численная реализация трехмерной модели гидродинамики для мелководных водоемов на супервычислительной системе // Матем. моделирование. – 2011. – № 23:3. – С. 3-21.
2. Тимофеева, Е.Ф. Математическая модель движения волн для водоема с нелинейной функцией рельефа дна // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2010. – № 6 (107). – С. 95-102.
3. Чистяков А.Е. Об аппроксимации граничных условий трехмерной модели движения водной среды // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2010. – № 6 (107). – С. 21-30.

Статью рекомендовал к опубликованию к.ф.-м.н., доцент О.А. Савицкий.

Фоменко Наталья Алексеевна

Технологический институт федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Южный федеральный университет» в г. Таганроге.
E-mail: fomenko.n86@mail.ru.
347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44.
Тел.: +79034855580.
Аспирант.

Fomenko Natalya Alexeevna

Taganrog Institute of Technology – Federal State-Owned Autonomy Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”.
E-mail: fomenko.n86@mail.ru.
44, Nekrasovskiy, Taganrog, 347928, Russia.
Phone: +79034855580.
Postgraduate Student

УДК 551.466

И.Б. Аббасов, А.В. Неверов

**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РЕФРАКЦИИ НЕЛИНЕЙНЫХ
ПОВЕРХНОСТНЫХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН НА ОСНОВЕ
УРАВНЕНИЯ МЕЛКОЙ ВОДЫ**

Рассматриваются вопросы численного моделирования рефракции нелинейных поверхностных гравитационных волн на мелководье. Дискретная модель построена на основе нелинейных уравнений мелкой воды. Приведены граничные и начальные условия. Методом расщепления по физическим процессам получена система из трех уравнений. Определен порядок аппроксимации, исследованы условия устойчивости дискретной модели. Для расчета системы уравнений использован метод прогонки. Линии дна смоделированы на основе графиков степенных функций. Представлена трансформация профиля поверхностных гравитационных волн при подходе к берегу.

Численное моделирование уравнения мелкой воды; нелинейные поверхностные гравитационные волны; рефракция; трансформация профиля.

I.B. Abbasov, A.A. Neverov

**NUMERICAL SIMULATION REFRACTION OF NONLINEAR SURFACE
GRAVITY WAVES ON THE BASIS OF SHALLOW WATER EQUATION**

This work considers the problems of numerical simulation of refraction of nonlinear surface gravity waves under shallow bay conditions. The discrete model is based on shallow-water nonlinear equations. Are resulted boundary and initial conditions. The method of splitting into physical processes receives system from three equations. Then we define the approximation order and investigate stability conditions of the discrete model. The sweep method was used to calculate the system of equations. Bottom lines are simulated on the basis of schedules of sedate functions. Transformation of profile surface gravity waves is presented at the approach to coast.

Numerical simulation of shallow-water equation; nonlinear surface gravity waves; refraction; profile transformation.

Нелинейные поверхностные гравитационные волны в условиях мелководья описываются уравнениями мелкой воды. Актуальным остается вопрос исследования волновых явлений на поверхности мелководных акваторий для учета их влия-