УДК 519.216.2

И.Ю. Кузнецова

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЭНЕРГОПОТРЕБЛЕНИЯ ПРИМЕНИТЕЛЬНО К ВУЗУ

Описана модель потребления электроэнергии на основе стохастического дифференциального уравнения. Приведены результаты численных расчетов по прогнозированию электропотребления на 2010 год на основании данных по потреблению электроэнергии общежитием №1 студенческого городка ТТИ ЮФУ за 2009 год. Применимость полученной модели к прогнозированию потребления электроэнергии оценена путем сравнения расчетных и реальных значений по двум показателям: средний процент ошибки и коэффициент несоответствия Тейла.

Стохастические дифференциальные уравнения; численные методы; потребление.

I.U. Kuznetsova

MATHEMATICAL MODEL OF ENERGY CONSUMPTION FOR UNIVERSITY

The model of electricity consumption based on the stochastic differential equation is described in the article. Results of numerical calculations of energy consumption prognostication in 2010 based on data of energy consumption of hostel №1 of TTI SFU campus in 2009 are given in the article. The applicability of forecasting model of electricity consumption is estimated by comparing the calculated and actual values for the two indicators: the mean percentage error and Theil's variance coefficient.

Stochastic differential equations; numerical methods; consumption.

Моделирование спроса на электроэнергию является сравнительно новым направлением исследования в современной российской экономике, но представляется особенно актуальным в связи с реформированием электроэнергетики.

При моделировании процесса потребления электроэнергии необходимо учитывать три типа факторов: периодические (циклические), функциональные и случайные.

Периодические зависимости наиболее прогнозируемы и существенно влияют на потребление электроэнергии, например, продолжительность светового дня. При прогнозировании потребления электроэнергии в вузе огромное значение имеет сезонность, так как в летний период потребление резко падает.

Функциональные факторы оказывают меньшее влияние на прогнозирование, чем циклические зависимости. К группе функциональных факторов можно отнести температуру воздуха, заселенность комнат и др.

Случайные тенденции составляют третью группу прогнозных факторов. Отличительной особенностью этой группы является то, что хотя их доля в процессе невелика, но амплитуда отклонений может быть довольно значительна.

Учитывая перечисленные выше факторы, была построена следующая модель потребления энергии:

$$\begin{cases} dP = (\Lambda(t) - \alpha P(t))dt + \sigma(t)dz, \\ P(0) = p_0, \end{cases} \tag{1}$$

где $P(t)$ – функция потребления электроэнергии, p_0 – значение потребления в начальный момент времени, параметр α представляет собой скорость возврата к среднему значению, функция $\Lambda(t)$ учитывает сезонные факторы, а $\sigma(t)$ – неопределенность, связанную с изменением потребления; $z(t)$ — винеровский процесс.

Слагаемое $\sigma(t)dz$ позволяет учитывать зависимость изменения потребления от случайных факторов: погодные условия (солнечный или пасмурный день), человеческий фактор (студент любит или нет яркое освещение) и т.д. Эти колебания нельзя учесть, например, в функции сезонности, так как они носят случайный характер.

Скорость возврата к среднему α можно статистически оценить с помощью регрессионного анализа, используя исторические данные [1]. Регрессионное уравнение для оценки параметра α имеет вид

$$P_{i+1} - P_i = c + bP_i. \tag{2}$$

Тогда $\alpha = -\ln(1+\hat{b})$.

Функцию неопределенности $\sigma(t)$ можно понимать как стандартное отклонение потребляемой энергии за год.

Для стохастического дифференциального уравнения (1) невозможно аналитически получить решение в терминах простых процессов. Метод Эйлера-Маруяма и метод Милштейна являются наиболее распространенными методами численного решения стохастических дифференциальных уравнений. Для уравнения (1) метод Милштейна идентичен методу Эйлера–Маруямы, так как диффузионная часть $\sigma(t)dz$ не зависит от $P(t)$.

Получим численное решение стохастического дифференциального уравнения (1) методом Эйлера-Маруяма.

Разобьем этот период времени на n равных интервалов

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = T,$$

длина которых равна $h = \frac{T}{n}$. Введем следующие обозначения:

$$P_i = P(t_i), \quad \Lambda_i = \Lambda(t_i), \quad \sigma_i = \sigma(t_i),$$

$$h = t_{i+1} - t_i, \quad i = \overline{1,n},$$

$$\vartriangle z_i = z_{i+1} - z_i, \quad i = \overline{1,n}.$$

Переходя к конечным разностям из (1) и определения стохастического интеграла Ито, имеем

$$\begin{cases} P_{i+1} = P_i + \left(\Lambda_i - \alpha P_i\right)h + \sigma_i \vartriangle z_i, \\ P_0 = p_0, \end{cases}$$

где

$$\vartriangle z_i = \sqrt{h}\xi_i, \qquad \xi_i \in N(0,1).$$

Отличие от случая детерминированного обыкновенного дифференциального уравнения заключается в том, что каждая последовательность $\{P_0,\ldots,P_n\}$, полученная методом Эйлера–Маруямы, является приближенной реализацией стохастического процесса $P(t)$, зависящего от выбора нормально распределенных случайных величин ξ_i. Так как $z(t)$ – стохастический процесс, то каждые его реализации будут различаться, а следовательно, будет отличаться и решение.

Определение сходимости сходно с понятием сходимости решений обыкновенных дифференциальных уравнений, различия вызваны тем, что решение СДУ является случайным процессом и каждая вычисленная траектория является лишь одной возможной реализацией этого процесса. Каждая вычисленная траектория решения P_i $i=\overline{1,n}$, полученная, например, методом Эйлера–Маруямы, дает случайное значение в точке T, таким образом, P_n также является случайной величиной. Разница между значениями в момент времени T, $e(T)=P(T)-P_n$, также является случайной величиной.

Говорят, что *решение СДУ сходится сильно с порядком m*, если математическое ожидание ошибки имеет m-й порядок от шага, т.е. для любого момента времени T,

$$E\left\{\left|P(T)-P_n\right|\right\}=O\left(h^m\right)$$

для достаточно малого размера шага h. Это определение обобщает стандартные критерии сходимости для обыкновенных дифференциальных уравнений, и сводится к обычному определению, когда стохастическая часть уравнения обращается в нуль.

Определим порядок сходимости метода Эйлера–Маруямы, для этого разложим $P(t_{i+1})$ в окрестности точки $t=t_i$, используя формулу Тейлора–Ито, получим

$$P(t_{i+1})\approx P(t_i)+\left(\Lambda_i-\alpha P_i\right)h+\sigma_i\vartriangle z_i-\frac{h}{2}\alpha\sigma_i\vartriangle z_i+O(h^2),$$

тогда, учитывая $\vartriangle z_i=\sqrt{h}\xi_i$, получим

$$\varepsilon_{i+1}\equiv P(t_{i+1})-P_{i+1}=\frac{h^{3/2}}{2}\sigma_i\xi_i+O\left(h^2\right),$$

и, следовательно,

$$E\left(\varepsilon_{i+1}^2\middle|P_i=P(t_i)\right)=O(h^3).$$

Отсюда можно заключить, что метод Эйлера–Маруямы для решения стохастического дифференциального уравнения (1) является методом первого порядка.

Используя описанное численное решение стохастического дифференциального уравнения (1), по данным потребления электроэнергии общежития № 1 за 2009 год получено следующее прогнозное значение потребления на 2010 год.

Рис. 1. График потребления электроэнергии за 2010 год

Надежность моделей прогнозирования оценивается путем сравнения реальных и прогнозных значений. Эта разница позволяет проверить адекватность модели. Основными оценочными характеристиками качества прогнозной модели являются следующие показатели:

1.Средний процент ошибки MPE (the mean percentage error)

$$MPE = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{P_i^r - P_i}{P_i^r}\cdot 100\%,$$

где P_i^r – фактическое значение потребления в i-й момент времени;

P_i – расчетное значение потребления в i-й момент времени;

n – число наблюдений.

MPE характеризует относительную степень смещенности прогноза.

2. Коэффициент несоответствия Тейла:

$$\upsilon = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(P_i^r - P_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(P_i^r\right)^2 + \sum_{i=1}^{n}P_i^2}}.$$

Индекс Тейла показывает степень схожести временных рядов P_i^r и P_i; чем он ближе к нулю, тем ближе сравниваемые ряды.

На основании проведенных расчетов для рассматриваемой модели получены следующие значения оценочных характеристик: $MPE = 11{,}8\,\%$, $\upsilon = 0{,}09$. По результатам проведенных расчетов можно сделать вывод о применимости полученной модели к прогнозированию потребления.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Лукашов А.В.* Риск-менеджмент // Управление корпоративными финансами. – 2005. – № 5. – С. 58-64.
2. Халл Дж. Опционы, фьючерсы и другие производные финансовые инструменты: Пер. с англ. – 6-е изд. – М.: ООО «И.Д. Вильямс», 2008. – 1056 с.
3. *Turner Wayne C.*, *Doty S.*, 1942 – Energy management handbook / Library of Congress Cataloging-in-Publication Data. – 6th ed., 2007. – 924 p.

Статью рекомендовал к опубликованию к.ф.-м.н. М.П. Бородицкий.

Кузнецова Инна Юрьевна
Технологический институт федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Южный федеральный университет» в г. Таганроге.
E-mail: inchikn55@rambler.ru.
347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44.
Тел.: +79185772911.
Аспирант.

Kuznetsova Inna Urevna
Taganrog Institute of Technology – Federal State-Owned Autonomy Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”.
E-mail: inchikn55@rambler.ru.
44, Nekrasovskiy, Taganrog, 347928, Russia.
Phone: +79185772911.
Postgraduate Student.