

Раздел VI. Математические методы искусственного интеллекта

УДК 004.932.2

А.А. Сухинов, И.Н. Тетеревлев, В.В. Царевский

НОВЫЙ МЕТОД ВЫЧИСЛЕНИЯ ПОЛЯ ОРИЕНТАЦИЙ ИЗОБРАЖЕНИЯ

Рассматривается новый метод вычисления поля ориентаций изображения, основанный на максимизации суммы векторов градиента в локальной окрестности. Дана общая информация об ориентациях изображения в непрерывном и дискретном случаях, построен алгоритм вычисления, и проведено сравнение метода с другими методами вычисления ориентаций. Показано, что в сравнении с существующими методами предлагаемый метод имеет существенно меньшую систематическую погрешность для углов ориентации, близких к вертикалям или горизонталям. Метод может применяться в задачах анализа отпечатков пальцев, интерполяции, фильтрации шума, детекции объектов.

Анализ изображений; ориентация; градиент; отпечатки пальцев; интерполяция

A.A. Sukhinov, I.N. Teterevlev, V.V. Tsarevskyj

A NEW METHOD OF ORIENTATIONS FIELD CALCULATION

It is considered a new method of orientations field calculation for image processing, based on the idea of maximization the sum of gradients inside local neighborhood. The introduction to image orientations in continuous and discrete cases is given. The algorithm of the new method is developed; the method is compared to existing methods of orientations calculation. It is shown that new method has much lower systematic inaccuracy for orientations close to verticals or horizontals. The method can be applied in tasks of fingertips analysis, image interpolation, noise filtering and object detection.

Image analysis; orientation; gradient; fingertips; interpolation

Введение. Обработка и анализ изображений все более широко входит в нашу жизнь. С появлением дешевых и быстродействующих микропроцессоров существенно возросло количество электронных устройств, осуществляющих цифровую обработку изображений – фотоаппараты, телевизоры, видеокамеры и подобные устройства. Типичными задачами обработки изображения являются:

- ◆ изменение разрешения изображения;
- ◆ фильтрация шума;
- ◆ детекция лица, глаз, улыбки, и прочих элементов на изображении;
- ◆ применение к изображению художественных эффектов.

Изображения обычно представлены в виде матрицы квадратных элементов, называемых пикселями (растровое представление изображения). Для простоты изложения будем рассматривать черно-белые изображения, в которых каждый пиксель имеет значение, связанное монотонной функцией с яркостью этого пикселя.

Основная проблема, возникающая при обработке изображений, заключается в том, что значения пикселей являются слишком низкоуровневыми свойствами изображения, из которых достаточно сложно получить нужную для обработки информацию.

Рассмотрим распространённую задачу интерполяции изображения. Интерполяция используется как для изменения разрешения изображения (например, с целью его отображения), так и для начального построения цветного изображения в цифровых фотоаппаратах и видеокамерах, оснащенных фотосенсором с байеровским расположением детекторов [1].

Классические линейные алгоритмы интерполяции, основанные на сопоставлении пикселям некоторых базисных функций с последующим их сложением (билинейная интерполяция, бикубическая интерполяция, sinc и подобные методы), при использовании в обработке изображений показывают себя плохо, так как создают эффект ступенчатости, неприятный для глаза (рис. 1). Можно показать, что линейные алгоритмы не могут избежать этого эффекта для линий, ориентированных под различными углами.

Одним из способов решения этой проблемы является введение анизотропии в используемый алгоритм интерполяции, причем анизотропия должна зависеть от локальных особенностей изображения. В качестве такой особенности чаще всего выступает *ориентация* – направление, вдоль которого изображение меняется меньше всего. Анизотропия, связанная с ориентацией, может вводиться в алгоритм как неявно (например, путем использования в качестве составной части алгоритма медианной фильтрации, обладающей анизотропией), так и путем явного вычисления ориентации и использования её в алгоритме.

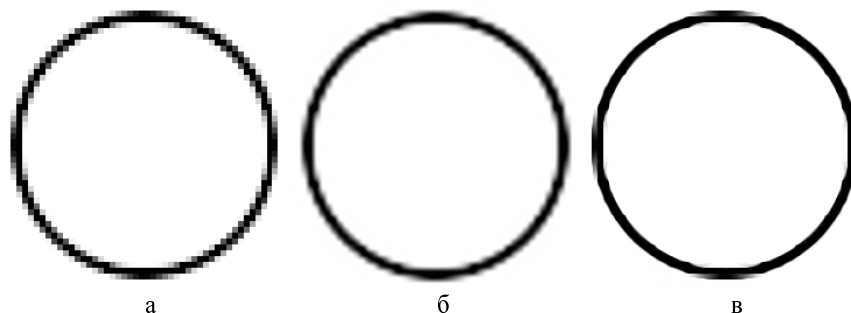


Рис. 1. Исходное изображение (а). Изображение, увеличенное в 5 раз при помощи бикубической интерполяции (б). Изображение, увеличенное в 5 раз при помощи анизотропной интерполяции (в)

Ориентации являются более высокоуровневыми признаками изображения, чем цвета пикселей, поэтому могут быть плодотворно применены для многих задач обработки и анализа изображений. Например, ориентации давно применяются для анализа отпечатков пальцев [2] и изображений кристаллических структур [3], где они позволяют компактно описать системы линий на изображении.

1. Ориентация в непрерывном случае. Как было сказано выше, ориентация – это направление, вдоль которого изображение меняется меньше всего. В непрерывном случае для функции двух переменных ориентация определяется направлением изолинии в точке, которое, в свою очередь, перпендикулярно вектору градиента.

Уже при таком простом определении выявляется интересное свойство ориентации – она определена с точностью до угла 180° , то есть ориентации с углом α и $\alpha + 180^\circ$ являются эквивалентными. Если рассматривать ориентацию, как вектор (о длине этого вектора мы поговорим далее), то получается, что этот вектор известен нам с точностью до знака. Такие «ненаправленные» векторы будем называть векторами ориентаций.

Проблема заключается в том, что отсутствует необходимый математический аппарат для работы с векторами ориентаций; например, не ясно, как складывать два таких вектора. Для решения этой проблемы зачастую применяется прием, заключающийся в удвоении угла поворота вектора (относительно некоторого нулевого направления), после чего вектор ориентации превращается в обычный вектор. Удвоение угла обладает следующими свойствами:

- ◆ После удвоения угла векторы \vec{X} и $-\vec{X}$ становятся равными.
- ◆ Максимально различающиеся ориентации – перпендикулярные – превращаются в максимально различающиеся векторы – противоположно направленные.

Мы приходим к выводу, что удвоение угла осуществляет взаимно-однозначное отображение пространства векторов ориентаций в пространство обычных векторов. Важно, что это отображение является непрерывным и обеспечивает «хорошую» метрику в пространстве ориентаций, определяемую евклидовой нормой разности соответствующих векторов.

Для удвоения угла вектора не обязательно использовать тригонометрические функции. Вместо этого можно рассмотреть вектор $(x, y)^T$ как комплексное число $x + iy$, и возвести его в квадрат:

$$(x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + i \cdot (2xy). \quad (1)$$

Для соответствующего преобразования вектора введем операцию sqr :

$$\text{sqr}\left((x, y)^T\right) \equiv (x^2 - y^2, 2xy)^T. \quad (2)$$

Это выражение может быть вычислено целочисленно.

Помимо удвоения угла, преобразование (2) приводит к возведению в квадрат длины вектора. Если это изменение длины является нежелательным, то можно поделить новый вектор на длину исходного:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \frac{\text{sqr}\left((x, y)^T\right)}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \quad (3)$$

Кроме направления ориентации, интерес представляет её «выраженность» – число, характеризующее то, насколько сильно данная ориентация «заметна» в окрестности изображения, и насколько она выделяется среди других ориентаций.

В непрерывном случае в качестве выраженности ориентации логично взять длину соответствующего вектора градиента или квадрат этой длины.

2. Алгоритмы вычисления ориентации в дискретном случае. Существует большое количество алгоритмов вычисления ориентации в дискретном случае [4]. Приведем некоторые из них:

1. Метод структурного тензора. Для всех пикселей изображения вычисляются дискретные аналоги градиентов, эти градиенты возводятся в квадрат по формуле (2), а затем квадраты усредняются по окрестности каждого пикселя.
2. Спектральный метод (в базовом варианте даёт дискретные углы). Для всех пикселей скользящего окна рассчитываются спектральные коэффициенты с помощью преобразования Фурье. Среди них находится максимальный коэффициент и соответствующие ему координаты m_1, m_2 в окне. Ориентация рассчитывается по формуле $\text{tg}(\psi) = -m_1/m_2$.

3. Дифференциальный метод (в базовом варианте даёт дискретные углы). Внутри скользящего окна вычисляются производные вдоль направлений конкретных углов (для маски 3×3 вычисляются производные вдоль направлений $0^\circ, 45^\circ, 90^\circ, 135^\circ$, а для маски 5×5 – производные вдоль направлений $0^\circ, 26^\circ, 45^\circ, 63^\circ, 90^\circ, 116^\circ, 135^\circ, 153^\circ$). Производная функции яркости по направлению, совпадающему с направлением полосы, имеет наименьшее (по модулю) значение среди производных по направлению в текущей точке: $\psi = \arg \min_{\psi} |f'_\psi|$.

4. Алгоритм параметрической аппроксимации. Функция яркости аппроксимируется поверхностями первого и/или второго порядка в симметричном окне. Вычисляются коэффициенты полиномов, с помощью которых происходит расчет ориентаций.

Рассмотрим первый алгоритм, как наиболее близкий к алгоритму для непрерывного случая. Нетрудно видеть, что этот алгоритм даст выраженную ориентацию в областях с большими по модулю и параллельными (возможно, противоположенными) градиентами. Если же векторы градиентов малы по модулю или перпендикулярны, то ориентация получается слабовыраженной.

Примеры вычисления ориентаций этим алгоритмом показаны на рис. 2. Обратите внимание, что ориентация наклонной линии (слева) отличается от угла наклона этой линии, что может доставлять проблемы при обработке изображений. Этот эффект вызван наличием систематической погрешности у большинства методов измерения ориентаций – вычисленные ориентации получаются ближе к вертикалям и горизонталям, чем они должны быть; дефект тем сильнее, чем более мелкие и чёткие детали попадают в обрабатываемую окрестность.

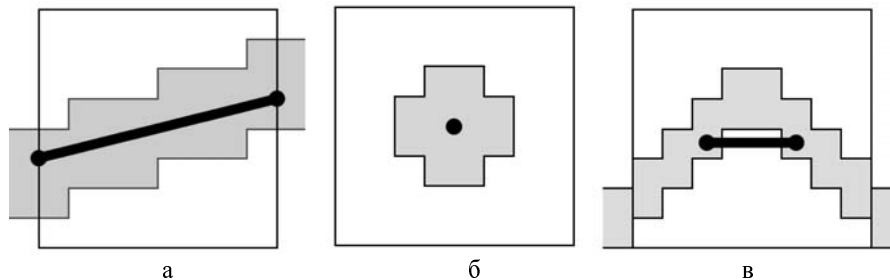


Рис. 2. Векторы ориентаций некоторых элементов изображения, вычисленные методом структурного тензора (ориентация симметричной фигуры равна нулю)

В случае квадратной окрестности любого размера $(2N + 1) \times (2N + 1)$ метод позволяет вычислять ориентацию для каждого пикселя за время $O(1)$. Для этого можно воспользоваться следующим алгоритмом (для сокращения записи граничные условия не приводим):

1) Вычисляем дискретный аналог градиента для каждого пикселя. Это можно сделать, например, при помощи следующего разностного шаблона:

$$\vec{g}_{i,j} = \begin{pmatrix} 2c_{i,j+1} + c_{i-1,j+1} + c_{i+1,j+1} - 2c_{i,j-1} - c_{i-1,j-1} - c_{i+1,j-1} \\ 2c_{i+1,j} + c_{i+1,j-1} + c_{i+1,j+1} - 2c_{i-1,j} - c_{i-1,j-1} - c_{i-1,j+1} \end{pmatrix}, \quad (4)$$

где $C_{i,j}$ – яркость пикселя (i, j) .

2) Возводим векторы в квадрат:

$$\vec{a}_{i,j} = \text{sqr}(\vec{g}_{i,j}). \quad (5)$$

3) Вычисляем промежуточные вертикальные суммы по рекуррентной формуле:

$$\vec{b}_{i,j} = \vec{b}_{i-1,j} - \vec{a}_{i-N-1,j} + \vec{a}_{i+N,j}. \quad (6)$$

4) Вычисляем горизонтальные суммы вертикальных сумм, получая требуемую ориентацию окрестности:

$$\vec{o}_{i,j} = \vec{o}_{i,j-1} - \vec{b}_{i,j-N-1} + \vec{b}_{i,j+N}. \quad (7)$$

При программной реализации вычисления (4)–(7) выполняются за один проход по изображению без создания промежуточных буферов большого размера.

Представленный алгоритм обладает недостатками, которые мы постараемся исправить:

1. При малом размере разностного шаблона (4) вычисленные векторы градиентов имеют большие погрешности, которые у разных векторов противоположны, однако не компенсируют друг друга при усреднении по окрестности из-за нелинейного алгоритма усреднения (5)–(7) (рис. 2,а).
2. При большом размере разностного шаблона алгоритм начинает «пропускать» мелкие детали изображения (рис. 3).



Рис. 3. Разностный шаблон большого размера, «пропускающий» тонкую линию

3. Предлагаемый метод вычисления ориентации. Пусть в окрестности пикселя каким-либо образом вычислены N векторов градиента $\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_N$. Так как в предлагаемом методе нулевые векторы ни на что не влияют, но усложняют многие рассуждения, предположим, что они выброшены из представленного списка векторов градиента. Если изначально *все* векторы были нулевыми, то будем считать ориентацию такой окрестности нулевой. Везде далее векторы \vec{g}_i , $i = 1, \dots, N$ считаются константами и для сокращения записи не фигурируют в списках аргументов вводимых функций.

Функцией *выраженности* ориентации окрестности $\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_N$ назовем следующую функцию, зависящую от единичного вектора \vec{d} :

$$m(\vec{d}) \equiv \sum_{i=1}^N |(\vec{d}, \vec{g}_i)|, \quad (8)$$

где (\vec{d}, \vec{g}_i) – скалярное произведение векторов \vec{d} и \vec{g}_i . Помимо функции $m(\vec{d})$, будем рассматривать функцию $m(\alpha)$, в которой в качестве аргумента используется угол поворота вектора \vec{d} . Примеры функции выраженности для некоторых положений четырех векторов приведены на рис. 4.

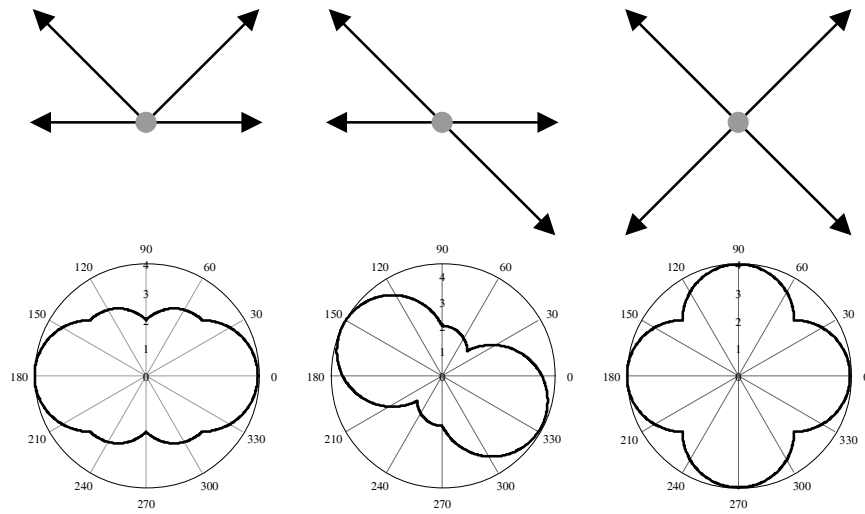


Рис. 4. Графики функции выраженности для некоторых положений четырех векторов

Направлением ориентации окрестности $\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_N$ назовем единичный вектор \vec{d}^* или угол его поворота α^* , при котором выражение (8) достигает максимума:

$$\vec{d}^* \equiv \arg \max_{|\vec{d}|=1} (m(\vec{d})), \quad \alpha^* = \arg(\vec{d}^*). \quad (9)$$

Если функция m достигает максимума при различных значениях вектора \vec{d} (а это всегда так), то в качестве \vec{d}^* возьмем любое из этих значений.

Максимизация функции m отличается от двумерного метода главных компонент тем, что в методе главных компонент максимизируется сумма квадратов скалярных произведений, а не сумма модулей.

Выраженностью ориентации окрестности $\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_N$ назовем положительное число m^* – разность между выраженностью ориентации в направлении ориентации окрестности и выраженностью ориентации в перпендикулярном направлении:

$$m^* \equiv m(\alpha^*) - m\left(\alpha^* + \frac{\pi}{2}\right). \quad (10)$$

Ориентацией окрестности $\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_N$ назовем произведение направления ориентации окрестности (9) на её выраженность (10):

$$\vec{o} = \vec{d}^* \cdot m^*. \quad (11)$$

Выражение (11) дает определение ориентации окрестности, но не дает алгоритма вычисления этой ориентации. Проблему представляет задача (9) нахождения максимума выражения (8).

Теорема. Рассмотрим функцию

$$\vec{G}(k_1, \dots, k_N) \equiv \sum_{i=1}^N k_i \vec{g}_i, \quad k_i \in \{-1; +1\}. \quad (12)$$

Пусть \vec{G}^* – максимальное по модулю значение функции \vec{G} , достигаемое на некотором наборе коэффициентов k_1^*, \dots, k_N^* :

$$\vec{G}^* \equiv \vec{G}(k_1^*, \dots, k_N^*) = \max_{k_i \in \{-1; +1\}} \vec{G}(k_1, \dots, k_N). \quad (13)$$

Тогда функция m достигает максимума на единичном векторе

$$\vec{d}^* = \frac{\vec{G}^*}{|\vec{G}^*|}, \quad (14)$$

причем

$$m(\vec{d}^*) = |\vec{G}^*|. \quad (15)$$

Докажем вначале следующую лемму:

Лемма.

$$(\vec{G}^*, k_i^* \vec{g}_i) > 0 \quad \forall i = 1, \dots, N. \quad (16)$$

Доказательство. Предположим противное: пусть, например, $(\vec{G}^*, k_1^* \vec{g}_1) \leq 0$.

Рассмотрим вектор $\vec{G}' \equiv \vec{G}(-k_1^*, k_2^*, \dots, k_N^*) = \vec{G}^* - 2k_1^* \vec{g}_1$, и вычислим квадрат его длины:

$$(\vec{G}')^2 = (\vec{G}', \vec{G}') = (\vec{G}^* - 2k_1^* \vec{g}_1, \vec{G}^* - 2k_1^* \vec{g}_1) = (\vec{G}^*)^2 - 4(\vec{G}^*, k_1^* \vec{g}_1) + 4(\vec{g}_1)^2.$$

Мы видим, что квадрат длины вектора \vec{G}' больше квадрата длины вектора \vec{G}^* , так как выражение $-4(\vec{G}^*, k_1^* \vec{g}_1)$ не отрицательно по предположению леммы, а вектор \vec{g}_1 ненулевой. Это противоречит тому, что вектор \vec{G}^* максимален по длине. **Лемма доказана.**

Из леммы следует, что, зная максимальный вектор \vec{G}^* , можно восстановить коэффициенты k_i^* , использованные для его получения:

$$k_i^* = \text{sign}((\vec{G}^*, \vec{g}_i)), \quad \text{где } \text{sign}(x) \equiv \begin{cases} -1, & x < 0; \\ +1, & x \geq 0. \end{cases} \quad (17)$$

Теперь докажем теорему. Воспользовавшись равенством

$$|x| = \text{sign}(x) \cdot x, \quad (18)$$

мы можем преобразовать выражение (8):

$$m(\vec{d}) \equiv \sum_{i=1}^N |(\vec{d}, \vec{g}_i)| = \sum_{i=1}^N \text{sign}((\vec{d}, \vec{g}_i)) \cdot (\vec{d}, \vec{g}_i) = \left(\vec{d}, \sum_{i=1}^N \text{sign}(\vec{d}, \vec{g}_i) \cdot \vec{g}_i \right). \quad (19)$$

Обозначим

$$\vec{S}(\vec{d}) \equiv \sum_{i=1}^N \text{sign}((\vec{d}, \vec{g}_i)) \cdot \vec{g}_i, \quad (20)$$

тогда

$$m(\vec{d}) \equiv (\vec{d}, \vec{S}(\vec{d})). \quad (21)$$

Функция \vec{S} нечувствительна к длине вектора \vec{d} (до тех пор, пока он не нулевой), поэтому может быть применена не только к единичным векторам. Эта функция является частным случаем функции $\vec{G}(k_1, \dots, k_N)$, когда $k_i = \text{sign}((\vec{d}, \vec{g}_i))$.

Подставив вектор $\vec{G}^*/|\vec{G}^*|$ в выражение (21), получим

$$\begin{aligned} m\left(\frac{\vec{G}^*}{|\vec{G}^*|}\right) &= \left(\frac{\vec{G}^*}{|\vec{G}^*|}, \vec{S}\left(\frac{\vec{G}^*}{|\vec{G}^*|}\right)\right) \stackrel{(20)}{=} \left(\frac{\vec{G}^*}{|\vec{G}^*|}, \sum_{i=1}^N \text{sign}((\vec{G}^*, \vec{g}_i)) \cdot \vec{g}_i\right) \stackrel{(17)}{=} \\ &= \left(\frac{\vec{G}^*}{|\vec{G}^*|}, \sum_{i=1}^N k_i^* \cdot \vec{g}_i\right) \stackrel{(13)}{=} \left(\frac{\vec{G}^*}{|\vec{G}^*|}, \vec{G}^*\right) = |\vec{G}^*|. \end{aligned} \quad (22)$$

Докажем теперь, что $|\vec{G}^*|$ – максимальное значение, которое может принять функция m . Из (21) следует, что

$$m(\vec{d}) \leq |\vec{S}(\vec{d})|, \quad (23)$$

а из (12), (13) и (20) следует, что

$$|\vec{S}(\vec{d})| \leq |\vec{G}^*|. \quad (24)$$

Таким образом,

$$m(\vec{d}) \leq |\vec{G}^*|, \quad (25)$$

причем значение $|\vec{G}^*|$ достигается на векторе $\vec{d}^* = \vec{G}^*/|\vec{G}^*|$, **что и требовалось доказать.**

Таким образом, мы свели непрерывную задачу (9) к дискретной задаче (13), которая заключается в расстановке знаков «+» и «-» перед векторами градиента с целью получения суммарного вектора максимальной длины. В связи с этим разработанный метод вычисления ориентации логично назвать «методом максимальной суммы градиентов».

Для нахождения \vec{G}^* не обязательно перебирать все 2^N вариантов значений коэффициентов k_i ; \vec{G}^* можно найти гораздо эффективнее. Для этого обратим вни-

мание на неравенство (16), из которого следует, что векторы $k_i^* \vec{g}_i$, $i = 1, \dots, N$, направлены так, чтобы лежать в полуплоскости вектора \vec{G}^* , и, напротив, если для некоторого набора коэффициентов k_i , $i = 1, \dots, N$, векторы $k_i \vec{g}_i$ не лежат в одной полуплоскости, то их сумма не может быть максимальной по длине. Поэтому достаточно перебрать лишь те наборы коэффициентов k_i , $i = 1, \dots, N$, для которых соответствующие наборы векторов $k_i \vec{g}_i$ лежат в одной полуплоскости (таких вариантов в общем случае N , что гораздо меньше, чем 2^N). Перебор вариантов можно осуществить при помощи следующего алгоритма.

- 1) Собираем по окрестности пикселя ненулевые векторы градиента \vec{g}_i , $i = 1, \dots, N$. Если ненулевых векторов нет, то $\vec{G}^* = 0$.
- 2) Умножаем на -1 , те из векторов \vec{g}_i , которые не лежат в правой полуплоскости, затем сортируем векторы по возрастанию угла поворота (он измеряется от $-\pi$ до $+\pi$). Тем самым, мы получаем первый набор векторов \vec{g}_i^1 , $i = 1, \dots, N$. Складываем эти векторы:

$$\vec{G}^1 \equiv \sum_{i=1}^N \vec{g}_i^1. \quad (26)$$

- 3) Для того чтобы получить следующий набор векторов, лежащих в одной полуплоскости, умножим на -1 вектор с минимальным углом поворота (при этом он станет вектором с максимальным углом поворота). Тогда суммарные векторы \vec{G}^j , $j = 2, \dots, N$ можно вычислить по следующей рекуррентной формуле:

$$\vec{G}^j = \vec{G}^{j-1} - 2\vec{g}_{j-1}^1. \quad (27)$$

Сам набор векторов \vec{g}_i^j , давших в сумме вектор \vec{G}^j , нам не важен.

- 4) Находим максимальный вектор \vec{G}^* среди векторов \vec{G}^j .

После нахождения вектора \vec{G}^* можно вычислить ориентацию окрестности по формулам (14), (15), (10), (11). В качестве разностного шаблона для вычисления градиентов целесообразно брать шаблон минимального размера:

$$\vec{g}_{i+1/2, j+1/2} = \begin{pmatrix} c_{i, j+1} + c_{i+1, j+1} - c_{i, j} - c_{i+1, j} \\ c_{i+1, j} + c_{i+1, j+1} - c_{i, j} - c_{i, j+1} \end{pmatrix}. \quad (28)$$

В этом случае будет достигнуто максимальное разрешение, а высокие погрешности, даваемые компактным разностным шаблоном, будут скомпенсированы алгоритмом вычисления ориентации.

Представленный алгоритм вычисляет ориентацию окрестности $\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_N$ за время $O(N \cdot \ln(N))$ (определяется временем сортировки векторов \vec{g}_i по углу ориентации), и поэтому не является эффективным. Однако если допустить наличие некоторой погрешности в вычислении ориентации, то можно сделать это быстрее. Для этого можно пойти следующими путями:

1. Вычислять для окрестности каждого пикселя гистограмму градиентов [5] с небольшим количеством сегментов (например, 8). Гистограммы могут быть вычислены по рекуррентным формулам, аналогичным (6), (7). Затем метод максимальной суммы применяется к гистограмме градиентов, а не к отдельным векторам. В этом случае быстродействие алгоритма определяется числом сегментов гистограммы, а не размером окрестности. Кроме того, за время $O(\sqrt{N})$ этим способом можно вычислить ориентацию для окрестности с гауссовским ядром, а не с квадратным, что дает более «плавное» поле ориентаций.
2. Гибридный алгоритм: вначале применить метод максимальной суммы для окрестности небольшого фиксированного размера, а затем к результату применить алгоритм на основе структурного тензора (выражения (4)–(7)), чтобы довести размер окрестности до требуемого. В итоге время вычислений составит $O(1)$. Этот подход быстрее предыдущего, но не дает возможности контролировать точность результата (путем выбора количества сегментов гистограммы). Как и предыдущий метод, данный метод позволяет за время $O(\sqrt{N})$ вычислить ориентацию для гауссовской окрестности.
3. Итерационный метод: нужно применять метод максимальной суммы с малой окрестностью многократно, подавая результат одной итерации на вход следующей. Результирующая окрестность при этом будет близка к гауссовской, а время работы составит $O(\sqrt{N})$.
4. **Сравнительный анализ точности разработанного метода.** Произведем сравнение разработанного нами метода определения поля ориентаций с уже существующими методами [4]:
 - ◆ комбинированный метод квадратичной аппроксимации и аппроксимации плоскостью (ориентация определяется, как сумма ориентаций квадратичной и линейной составляющих аппроксимационной поверхности второго порядка);
 - ◆ метод на основе структурного тензора (векторы градиента вычисляются по формуле (28)).

Во всех методах будем использовать окрестность 5×5 пикселей. Кроме того, измерим качество работы гибридного метода: сначала применим метод максимальной суммы для окрестности 3×3 пикселя (4 вектора градиента), а затем к результату применим метод на основе структурного тензора (тоже с окрестностью 3×3). Обработка четырёх векторов в гибридном методе может быть осуществлена существенно быстрее общего случая, так как не требуется сортировка векторов по углу ориентации (для четырёх векторов проще перебрать все 8 вариантов их суммирования).

В качестве тестового изображения будем использовать изображение концентрических колец (рис. 5). Изображение достаточно сложное для анализа: на нём имеется большое количество тонких линий с чёткими границами. Ориентации в каждой точке известны (направлены по касательной к окружностям), поэтому нетрудно рассчитать погрешность работы методов.

Погрешность различных методов меняется в зависимости от угла ориентации и от размера деталей изображения. Поэтому мы будем измерять средние погрешности методов в зависимости от угла ориентации и расстояния от центра концентрических окружностей. Погрешность вычислена, как среднее отклонение измеренной ориентации (выраженной в градусах) от точной ориентации. Результаты сравнений по этой методике представлены на рис. 6.

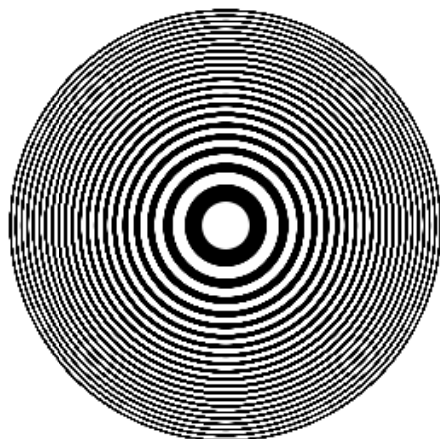


Рис. 5. Тестовое изображение в виде концентрических окружностей, толщина которых уменьшается с увеличением радиуса (толщина самых тонких линий составляет полтора пикселя)

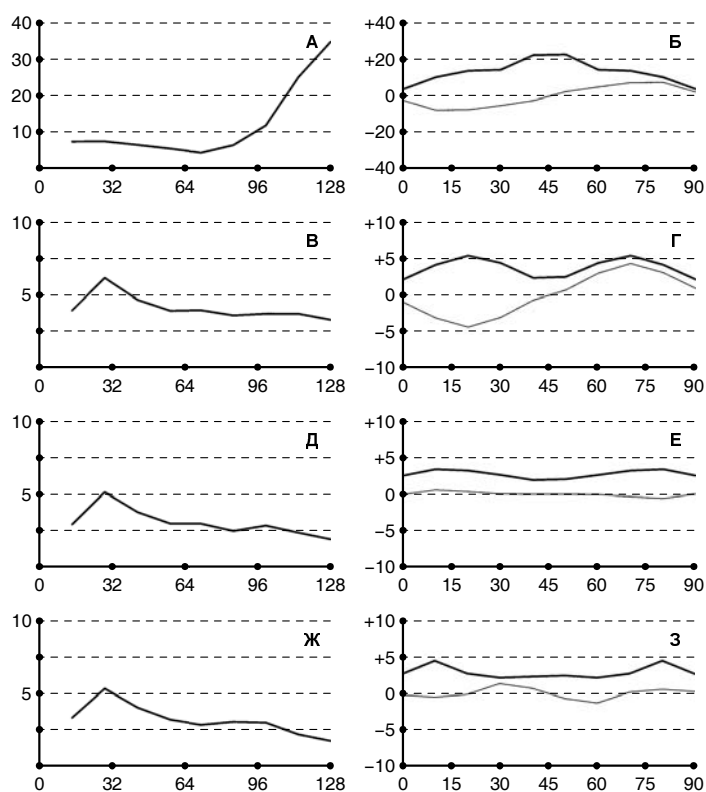


Рис. 6. Погрешность методов вычисления ориентации в зависимости от радиуса (слева) и угла (справа). Толстая линия – среднее значение модуля погрешности, тонкая линия – среднее значение погрешности (систематическая ошибка): А, Б – аппроксимация поверхностью второго порядка (масштаб отличается от остальных графиков); В, Г – метод структурного тензора; Д, Е – предлагаемый метод максимальной суммы; Ж, З – гибридный метод

Разработанный метод в среднем имеет меньшую погрешность, чем другие методы. Например, средняя погрешность метода структурного тензора составила 3,9 градуса, в то время как средняя погрешность разработанного метода – 2,8 градуса, что на 28 % меньше. Средняя погрешность гибридного метода – 2,9 градуса. Но самая важная особенность метода максимальной суммы, продемонстрированная на данном тесте, – почти полное отсутствие систематической погрешности (метод специально разрабатывался с целью минимизации этой погрешности). В этом плане метод хорошо проявляет себя на тестах с чёткими линиями и малым количеством цветов (например, бинаризованные изображения отпечатков пальцев, содержащие только чёрный и белый цвета). К сожалению, существуют другие тесты, на которых систематическая погрешность разработанного метода всё же появляется, но она остаётся меньшей, чем у других методов.

Теперь проверим устойчивость к наличию шума на изображении. Диапазон изменения цвета на изображении 5 составляет $[0, 255]$. На изображение накладывается нормально распределённый шум с заданным среднеквадратичным отклонением, и вычисленное поле ориентаций сравнивается с теоретическим в каждой точке изображения. В табл. 1 представлены результаты измерений.

Таблица 1

Амплитуда шума	0	8	16	32	64	128
Структурный тензор	3,9	5,0	5,1	5,4	6,6	9,8
Максимальная сумма	2,8	4,0	4,2	4,9	6,8	10,9
Гибридный метод	2,9	4,1	4,3	5,0	7,0	11,5

Из таблицы следует, что разработанный метод обладает чуть меньшей устойчивостью к шуму, чем метод структурного тензора, из-за чего точность работы методов сравнивается при амплитуде шума, равной примерно 55 единиц (22 %). Следует отметить, что 22 % – достаточно высокий уровень шума, и большинство современных изображений имеют более высокое качество.

Заключение. Разработан новый метод вычисления поля ориентаций изображения, имеющий более высокую точность, чем существующие. Основным преимуществом разработанного метода является существенно меньшая систематическая погрешность определения угла (которая у других методов максимальна при углах, на 15–30 градусов отличающихся от вертикали или горизонтали). Метод может применяться взамен существующих методов в задачах анализа отпечатков пальцев, интерполяции, фильтрации шума, детекции объектов, улучшая качество решения этих задач.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Margaret Brown. Advanced Digital Photography.* Media Publishing, 2004.
2. *Hozman J., Kubinec R., Trnka J., Varenka J. Biomedical Image Processing Applications.* Biomedical Engineering & Biotechnology. – Praha: Publishing House of the Czech Technical University, 1995.
3. *Ченцова О.Б., Прокофьева Г.Л.* Кристаллографический метод обследования при некоторых заболеваниях глаз. – М., 1988.
4. *Сойфер В.А.* Методы компьютерной обработки изображений. – М.: Физматлит, 2003. – 459 с.
5. *Navneet Dalal and Bill Triggs.* Histograms of Oriented Gradients for Human Detection (INRIA Rhone-Alps).

Статью рекомендовал к опубликованию д.ф.-м.н., доцент М.Ю. Звездина.

Сухинов Антон Александрович

Технологический институт федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Южный федеральный университет» в г. Таганроге.

E-mail: Soukhinov@gmail.com

г. Таганрог, ул. Пархоменко 58/1, кв. 71.

Тел.: +79286205420.

Кафедра высшей математики; к.ф.-м.н.; доцент.

Тетеревлёв Игорь Николаевич

E-mail: tin146@mail.ru.

г. Таганрог, ул. Зои Космодемьянской, 9 Е.

Тел.: +79185199182.

Аспирант.

Царевский Виктор Васильевич

E-mail: dark5511@gmail.com.

Тел.: +79185767552.

г. Таганрог, Октябрьская площадь 5, комната 420.

Аспирант.

Sukhinov Anton Alexandrovich

Taganrog Institute of Technology – Federal State-Owned Autonomy Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”.

E-mail: Soukhinov@gmail.com.

Phone: +79286205420.

58/1, Parkhomenko Street, Apt. 71, Taganrog, Russia.

The Department of Higher Mathematics; Cand. of Phis.-Math. Sc.; Associate Professor.

Teterevlev Igor Nikolaevich

E-mail: tin146@mail.ru.

Phone: +79185199182.

9 E, Zoya Kosmodemyanskaya Street, Taganrog, Russia.

Postgraduate Student.

Tsarevsky Viktor Vasil'evich

E-mail: dark5511@gmail.com.

Phone: +79185767552.

5, Oktyabrskaya Sq., Room 420, Taganrog, Russia.

УДК 681.518

С.А. Бутенков

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПРОЦЕССОВ НА ФРАКТАЛЬНЫХ СТРУКТУРАХ С ЗАДАНЫМИ СВОЙСТВАМИ НА ОСНОВЕ МЕТОДОВ ГРАНУЛЯЦИИ

Фрактальные системы образуют целый мир объектов и явлений, которые в отличие от непрерывных систем имеют «рыхлую» структуру. Если в математику концепция фрактальных систем вошла много десятков лет назад, то в физике ценность подобных идей была осознана лишь в 70-е годы нашего столетия. Одно из новых направлений моделирования физических процессов связано с исследованием фрактальных кластеров (ФК). ФК (или фрактальные агрегаты) составляют один из классов фрактальных объектов, образующихся при слипании движущихся по определенному закону твердых частиц. В частности, ФК могут также организовываться и при объединении других ФК. К таким ФК относится, в частности, снежный покров (СП), представляющий собой агрегат из снежи-