Статью рекомендовал к опубликованию д.т.н., профессор В.П. Молчанов.

Сухинов Александр Иванович
Технологический институт федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Южный федеральный университет» в г. Таганроге.
E-mail: sukhinov@gmail.ru.
347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44.
Тел.: 88634310599.
Руководитель ТТИ ЮФУ; д.ф-м.н.; профессор.

Чистяков Александр Евгеньевич
E-mail: cheese_05@mail.ru.
Тел.: 88634371606.
Кафедра высшей математики; ассистент.

Тимофеева Елена Федоровна
Северо-Кавказский государственный технический университет.
E-mail: teflena@mail.ru.
355029, г. Ставрополь, просп. Кулакова, 2.
Тел.: 88652728858; +79097583970.
Кафедра прикладной математики и компьютерных технологий; старший преподаватель.

Sukhinov Alexander Ivanovich
Taganrog Institute of Technology – Federal State-Owned Autonomy Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”.
E-mail: sukhinov@gmail.ru
44, Nekrasovskiy, Taganrog, 347928, Russia.
Phone: +78634310599.
The head of TIT SFedU; Dr. of Phis.-Math. Sc.; Professor.

Chistyakov Alexander Evgenjevich
E-mail: cheese_05@mail.ru.
Phone: +78634371606.
The Department of Higher Mathematics; Assistant.

Timofeeva Elena Fe’dorovna
North Caucasus State Technical University.
E-mail: teflena@mail.ru.
2, Kulakov Pr., Stavropol, 355029, Russia.
Phone: +78652728858.
The Department of Applied Mathematics and Computer Technology; Senior Lecturer.

УДК 519.6

А.И. Сухинов, А.Е. Чистяков, Е.А. Проценко

ПОСТРОЕНИЕ ДИСКРЕТНОЙ ДВУМЕРНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ТРАНСПОРТА НАНОСОВ

В работе освещены вопросы построения пространственно-двумерной математической модели перемещения наносов в прибрежной зоне мелководных водоемов, которая используется для численного моделирования динамики аккумулятивного берега. Выполнена дискретизация модели на основе метода баланса, при этом предложенные конечно-разностные схемы консервативны, устойчивы и имеют второй порядок погрешности аппроксимации по пространственным координатам и первый по времени. Построены сеточные уравнения для задачи транспорта наносов. Предложен алгоритм расчета коэффициентов и правых частей сеточных уравнений.

Математическое моделирование; транспорт наносов; метод баланса; дискретная модель; сеточные уравнения.

A.I. Sukhinov, A.E. Chistyakov, E.A. Protsenko

TWO-DIMENSIONAL MATHEMATICAL MODEL OF SEDIMENT TRANSPORTATION

Problem of building of two-dimensional model of sediment transport in coastal area of shallow reservoir, which is used for numerical simulation of the dynamics of accumulation coast, was considered in this work. Discretization of a mathematical model based on the balance method is made in this work. Proposed finite-difference schemes are stable and have second-order approximation error in the spatial coordinates and the first-order approximation error in the time. The net equations for a problem of sediment transport are constructed. The algorithm of calculation of factors of the net equations is offered.

Mathematical modeling; sediment transportation; a balance method; discrete model; the grid equations.

Введение. Динамика прибрежного рельефа дна во многом определяется характером перемещения наносов в береговой зоне под воздействием волн и течений. Возникает необходимость в построении математических моделей процессов перемещения наносов на мелководье под воздействием поверхностных гравитационных волн.

Основная идея построения моделей, связанных с изменением структуры морского дна прибрежной зоны, основывается на процессе перемещения наносов. В условиях слабонаклонного морского дна наносы под воздействием волн совершают равнонаправленные движения [1].

В данной работе освещены вопросы построения пространственно-двумерной модели транспорта наносов, которая используется для численного моделирования динамики аккумулятивного берега. Целью нашего исследования является нахождение результирующего профиля дна. Будем считать движение частиц равнонаправленным, вызванным поверхностными ветровыми волнениями, и использовать результирующее движение потока. В соответствии с критерием «крутизны» будем использовать уравнение непрерывной модели формирования наносов.

Непрерывная модель. Для описания динамики морских наносов в данной работе применяются уравнения, которые описывают переформирование прибрежной зоны водоемов, где вода и твердые частицы перемещаются в одном направлении. Уравнения процесса перемещения наносов [5] записываются в следующем виде:

$$(1-\varepsilon)\frac{\partial H}{\partial t}+\frac{\partial Q_x}{\partial x}+\frac{\partial Q_y}{\partial y}=0, \qquad (1)$$

$$\vec{Q}=\begin{cases} A\varpi d\left|\vec{\psi}\right|^{\beta-1}\vec{\psi}, & |\tau|\ge\tau_{bc}, \\ 0, & |\tau|<\tau_{bc}; \end{cases} \qquad \vec{\psi}=\frac{\vec{\tau}}{(\rho_1-\rho_0)gd},$$

где H – глубина дна, отсчитываемая от невозмущенной поверхности водоема; ε – пористость грунта; $\vec{Q}=\{Q_x,Q_y\}$ – расход наносов, $\left|\vec{Q}\right|=Q$; x, y – горизонтальные декартовы координаты; τ_b – касательное напряжение на дне; τ_{bc} – критическое значение касательного напряжения, при котором начинается перемещение наносов, A и β – безразмерные постоянные (напомним, что в настоящей работе A=19,5, β=3), ϖ – частота волны, d – характеристика осадков.

Запишем касательное напряжение для наклонной поверхности дна:

$$\vec{\tau}=\vec{\tau}_b-\alpha\sin S\vec{n}, \qquad (2)$$

где $S(x, y, t)$ – острый угол между вектором нормали к поверхности дна и вектором силы гравитации в момент времени t, $\vec{n}$ – единичный вектор, направленный в сторону градиента глубины, $\alpha \sin S$ – дополнительное тангенциальное напряжение на дне водоема, вызываемое гравитационными силами. В случае $\left|\vec{\tau}_b\right| = 0$, $\left|\vec{\tau}\right| = \tau_{bc}$ имеет место равенство

$\tau_{bc} = \alpha \sin \varphi_0$, φ_0 – угол естественного откоса грунта в воде.

Таким образом, система уравнений для параметра Шильдса принимает следующий вид:

$$\vec{\psi}_S = \frac{\vec{\tau}_b - \dfrac{\sin S}{\sin \varphi_0}\tau_{bc}\vec{n}}{(\rho_1 - \rho_0)gd}, \quad \vec{n}tgS = gradH, \tag{3}$$

где ψ_S – параметр Шильдса для наклонного дна.

Физический смысл формулы для ψ_S состоит в следующем: при движении твердой частицы вверх по откосу в потоке должна быть совершена работа по преодолению силы тяжести. Следовательно, при прочих равных условиях транспортирующая способность потока, переносящего наносы вверх по откосу, меньше, чем транспортирующая способность потока над горизонтальным дном. Соответственно расход потока представляется в виде

$$Q = A\varpi d \frac{\left|\vec{\tau}_b - \dfrac{\sin S}{\sin \varphi_0}\tau_{bc}\vec{n}\right|^{\beta-1}}{\left((\rho_1 - \rho_0)gd\right)^{\beta}} \left(\vec{\tau}_b - \frac{\sin S}{\sin \varphi_0}\tau_{bc}\vec{n}\right). \tag{4}$$

Делаем допущения при решении пространственной задачи о переформировании берегов:

$$\sin S \approx tgS = \sqrt{\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)^2}. \tag{5}$$

Подставим (5) в (4), при этом расход наносов запишется в виде

$$Q = A\varpi d \frac{\left|\vec{\tau}_b - \dfrac{\tau_{bc}}{\sin \varphi_0} gradH\right|^{\beta-1}}{\left((\rho_1 - \rho_0)gd\right)^{\beta}} \left(\vec{\tau}_b - \frac{\tau_{bc}}{\sin \varphi_0} gradH\right). \tag{6}$$

Запишем исходное уравнение наносов (1) с учетом выражения (6):

$$(1-\varepsilon)\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{A\varpi d}{\left((\rho_1 - \rho_0)gd\right)^{\beta}} \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\left|\vec{\tau}_b - \frac{\tau_{bc}}{\sin \varphi_0} gradH\right|^{\beta-1}\left(\tau_{b,x} - \frac{\tau_{bc}}{\sin \varphi_0}\frac{\partial H}{\partial x}\right)\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial y}\left(\left|\vec{\tau}_b - \frac{\tau_{bc}}{\sin \varphi_0} gradH\right|^{\beta-1}\left(\tau_{b,y} - \frac{\tau_{bc}}{\sin \varphi_0}\frac{\partial H}{\partial y}\right)\right)\right) = 0. \tag{7}$$

Запишем уравнение (7) в случае отсутствия скорости на дне расчетной области: ($\left|\vec{\tau}_b\right| = 0$): $(1-\varepsilon)\dfrac{\partial H}{\partial t} = A\varpi d\left(\dfrac{\tau_{bc}}{\sin\varphi_0(\rho_1-\rho_0)gd}\right)^{\beta} div\left(\left|gradH\right|^{\beta-1} gradH\right).$

В общем случае уравнение (7) можно записать в виде

$$(1-\varepsilon)\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{A\varpi d}{\left((\rho_1-\rho_0)gd\right)^{\beta}}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\left|\vec{\tau}_b - \frac{\tau_{bc}}{\sin\varphi_0} gradH\right|^{\beta-1} \tau_{b,x}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial y}\left(\left|\vec{\tau}_b - \frac{\tau_{bc}}{\sin\varphi_0} gradH\right|^{\beta-1} \tau_{b,y}\right)\right) =$$

$$= \frac{A\varpi d}{\left((\rho_1-\rho_0)gd\right)^{\beta}}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\left|\vec{\tau}_b - \frac{\tau_{bc}}{\sin\varphi_0} gradH\right|^{\beta-1} \frac{\tau_{bc}}{\sin\varphi_0}\frac{\partial H}{\partial x}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial y}\left(\left|\vec{\tau}_b - \frac{\tau_{bc}}{\sin\varphi_0} gradH\right|^{\beta-1} \frac{\tau_{bc}}{\sin\varphi_0}\frac{\partial H}{\partial y}\right)\right),$$

или в дивергентном виде

$$(1-\varepsilon)\frac{\partial H}{\partial t} + div\left(\frac{A\varpi d}{\left((\rho_1-\rho_0)gd\right)^{\beta}}\left|\vec{\tau}_b - \frac{\tau_{bc}}{\sin\varphi_0} gradH\right|^{\beta-1} \vec{\tau}_b\right) =$$

$$= div\left(\frac{A\varpi d}{\left((\rho_1-\rho_0)gd\right)^{\beta}}\left|\vec{\tau}_b - \frac{\tau_{bc}}{\sin\varphi_0} gradH\right|^{\beta-1} \frac{\tau_{bc}}{\sin\varphi_0} gradH\right). \quad (8)$$

Введем обозначение:

$$k = \frac{A\varpi d}{\left((\rho_1-\rho_0)gd\right)^{\beta}}\left|\vec{\tau}_b - \frac{\tau_{bc}}{\sin\varphi_0} gradH\right|^{\beta-1}.$$

С учетом ограничений на касательные напряжения на дне расчетной области запишем данное выражение в виде

$$k = \frac{A\varpi d}{\left((\rho_1-\rho_0)gd\right)^{\beta}}\left|\vec{\tau}_b - \frac{\tau_{bc}}{\sin\varphi_0} gradH\right|^{\beta-1} h\left(\left|\vec{\tau}_b - \frac{\tau_{bc}}{\sin\varphi_0} gradH\right| - \tau_{bc}\right), \quad (9)$$

где $h\left(x\right) = \begin{cases} 1, \ x \ge 0 \\ 0, \ x < 0 \end{cases}$ – функция Хэвисайда.

Запишем (8) с учетом (9), имеем:

$$(1-\varepsilon)\frac{\partial H}{\partial t} + div\left(k\vec{\tau}_b\right) = div\left(k\frac{\tau_{bc}}{\sin\varphi_0} gradH\right). \quad (10)$$

Уравнение (10) дополняется начальным условием:

$$H(x, y, 0) = H_0(x, y). \quad (11)$$

Граничные условия определяются из физических соображений. В верхней границе наката, где скорость обращается в ноль, берег не подвергается деформациям:

$$H(x, y, t) = H_H. \qquad (12)$$

На границе «глубокой воды» отсутствует поток, вызванный влиянием гравитационных сил:

$$H_0'(x, y, t) = 0. \qquad (13)$$

Таким образом, имеем непрерывную двумерную математическую модель формирования наносов в прибрежной зоне водоема (9)–(13).

Дискретная модель. Построим разностную схему, аппроксимирующую уравнение (10), с соответствующими граничными и начальными условиями (11)–(13).

Расчетная область вписана в прямоугольник. Покроем область равномерной прямоугольной расчетной сеткой $\omega = \omega_t \times \omega_x \times \omega_y$:

$$\omega_t = \{t^n = nh_t, 0 \le n \le N_t - 1, l_t = h_t\left(N_t - 1\right)\},$$

$$\omega_x = \{x_i = ih_x, 0 \le i \le N_x - 1, l_x = h_x\left(N_x - 1\right)\},$$

$$\omega_y = \{y_j = jh_y, 0 \le j \le N_y - 1, l_y = h_y\left(N_y - 1\right)\},$$

где n, i, j – индексы по временной координате и пространственным координатным направлениям Ox, Oy соответственно,

h_t, h_x, h_y – шаги по временной координате и пространственным координатным направлениям Ox, Oy соответственно,

N_t, N_x, N_y – количество узлов по временной координате и пространственным координатным направлениям Ox, Oy соответственно,

l_t, l_x, l_y – длина расчетной области по временной координате и пространственным координатным направлениям Ox, Oy соответственно.

Для получения дискретной модели воспользуемся интегро-интерполяционным методом [2]. Для этого запишем уравнение (10) в виде

$$(1-\varepsilon)H_t' + \left(k\tau_{b,x}\right)_x' + \left(k\tau_{b,y}\right)_y' = \left(k\frac{\tau_{bc}}{\sin\varphi_0}H_x'\right)_x' + \left(k\frac{\tau_{bc}}{\sin\varphi_0}H_y'\right)_y', \qquad (14)$$

где $k = \dfrac{A\varpi d}{\left((\rho_1 - \rho_0)gd\right)^{\beta}}\left|\vec{\tau}_b - \dfrac{\tau_{bc}}{\sin\varphi_0}gradH\right|^{\beta-1} h\left(\left|\vec{\tau}_b - \dfrac{\tau_{bc}}{\sin\varphi_0}gradH\right| - \tau_{bc}\right)$.

Проинтегрируем уравнение (14) по области D_{txy}:

$$D_{txy} \in \left\{t \in \left[t^n, t^{n+1}\right], x \in \left[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}\right], y \in \left[y_{j-1/2}, y_{j+1/2}\right]\right\},$$

в результате получим:

$$\iiint\limits_{D_{txy}}(1-\varepsilon)H_t'dtdxdy+\iiint\limits_{D_{txy}}\left(k\tau_{b,x}\right)_x' dtdxdy+\iiint\limits_{D_{txy}}\left(k\tau_{b,y}\right)_y' dtdxdy=$$

$$=\iiint\limits_{D_{txy}}\left(k\frac{\tau_{bc}}{\sin\varphi_0}H_x'\right)_x' dtdxdy+\iiint\limits_{D_{txy}}\left(k\frac{\tau_{bc}}{\sin\varphi_0}H_y'\right)_y' dtdxdy\,. \tag{15}$$

Найдем значение первого интеграла левой части уравнения (15):

$$\iiint\limits_{D_{txy}}(1-\varepsilon)H_t'dtdxdy=(1-\varepsilon)\iint\limits_{D_{xy}}dxdy\int\limits_{t^n}^{t^{n+1}}H_t'dt=(1-\varepsilon)\iint\limits_{D_{xy}}\left(H^{n+1}-H^n\right)dxdy\simeq$$

$$\simeq(1-\varepsilon)\left(H_{i,j}^{n+1}-H_{i,j}^{n}\right)h_xh_y\,, \tag{16}$$

где $D_{xy}\in\left\{x\in\left[x_{i-1/2},x_{i+1/2}\right],y\in\left[y_{j-1/2},y_{j+1/2}\right]\right\}$.

Найдем значение второго интеграла левой части уравнения (15)

$$\iiint\limits_{D_{txy}}\left(k\tau_{b,x}\right)_x' dtdxdy=\iint\limits_{D_{ty}}dtdy\int\limits_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}}\left(k\tau_{b,x}\right)_x' dt=\iint\limits_{D_{ty}}\left(k\tau_{b,x}\right)\Big|_{x_{i+1/2}}-\left(k\tau_{b,x}\right)\Big|_{x_{i-1/2}}dtdy\simeq$$

$$\simeq\left(k_{i+1/2,j}^{n}\left(\tau_{b,x}\right)_{i+1/2,j}^{n}-k_{i-1/2,j}^{n}\left(\tau_{b,x}\right)_{i-1/2,j}^{n}\right)h_th_y\,. \tag{17}$$

Аналогичным образом можно записать значение третьего интеграла левой части уравнения (15):

$$\iiint\limits_{D_{txy}}\left(k\tau_{b,y}\right)_y' dtdxdy\simeq\left(k_{i,j+1/2}^{n}\left(\tau_{b,y}\right)_{i,j+1/2}^{n}-k_{i,j-1/2}^{n}\left(\tau_{b,y}\right)_{i,j-1/2}^{n}\right)h_th_x\,. \tag{18}$$

Найдем значение первого интеграла правой части уравнения (15):

$$\iiint\limits_{D_{txy}}\left(k\frac{\tau_{bc}}{\sin\varphi_0}H_x'\right)_x' dtdxdy=\iint\limits_{D_{ty}}dtdy\int\limits_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}}\left(k\frac{\tau_{bc}}{\sin\varphi_0}H_x'\right)_x' dt=$$

$$=\iint\limits_{D_{ty}}\left(\left(k\frac{\tau_{bc}}{\sin\varphi_0}H_x'\right)\Bigg|_{x_{i+1/2}}-\left(k\frac{\tau_{bc}}{\sin\varphi_0}H_x'\right)\Bigg|_{x_{i-1/2}}\right)dtdy\,. \tag{19}$$

Обозначим $W=\left(k\dfrac{\tau_{bc}}{\sin\varphi_0}H_x'\right)$ и проинтегрируем данное выражение на отрезке $x\in\left[x_i,x_{i+1}\right]$, имеем:

$$\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}Wdx=\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}k\frac{\tau_{bc}}{\sin\varphi_0}H_x'dx\,. \tag{20}$$

Левую часть равенства (20) запишем в виде $\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}Wdx\simeq W_{i+1/2}h_x$.

Преобразуем правую часть выражения (20), имеем:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} k\frac{\tau_{bc}}{\sin\varphi_0}H'_x dx \simeq k_{i+1/2}\frac{\tau_{bc}}{\sin\varphi_0}\int_{x_i}^{x_{i+1}} H'_x dx = k_{i+1/2}\frac{\tau_{bc}}{\sin\varphi_0}\left(H_{i+1}-H_i\right).$$

Таким образом, выражение (20) можно записать в виде

$$W_{i+1/2} = k_{i+1/2}\frac{\tau_{bc}}{\sin\varphi_0}\frac{H_{i+1}-H_i}{h_x}. \tag{21}$$

Подставим (21) в (20), в результате получим:

$$\iiint_{D_{txy}}\left(k\frac{\tau_{bc}}{\sin\varphi_0}H'_x\right)'_x dtdxdy = \frac{\tau_{bc}}{\sin\varphi_0}\iint_{D_{ty}}\left(k_{i+1/2}\frac{H_{i+1}-H_i}{h_x} - k_{i-1/2}\frac{H_i-H_{i-1}}{h_x}\right)dtdy =$$

$$= \frac{\tau_{bc}}{\sin\varphi_0}\left(k^n_{i+1/2,j}\frac{H^{n+\sigma}_{i+1,j}-H^{n+\sigma}_{i,j}}{h_x} - k^n_{i-1/2,j}\frac{H^{n+\sigma}_{i,j}-H^{n+\sigma}_{i-1,j}}{h_x}\right)h_y h_t. \tag{22}$$

Аналогичным образом можно получить значение второго интеграла, стоящего в правой части уравнения (15):

$$\iiint_{D_{txy}}\left(k\frac{\tau_{bc}}{\sin\varphi_0}H'_y\right)'_y dtdxdy =$$

$$= \frac{\tau_{bc}}{\sin\varphi_0}\left(k^n_{i,j+1/2}\frac{H^{n+\sigma}_{i,j+1}-H^{n+\sigma}_{i,j}}{h_y} - k^n_{i,j-1/2}\frac{H^{n+\sigma}_{i,j}-H^{n+\sigma}_{i,j-1}}{h_y}\right)h_x h_t. \tag{23}$$

Подставим выражения (16)–(18), (22)–(23) в уравнение (15), имеем:

$$(1-\varepsilon)\left(H^{n+1}_{i,j}-H^n_{i,j}\right)h_x h_y + \left(k^n_{i+1/2,j}\left(\tau_{b,x}\right)^n_{i+1/2,j} - k^n_{i-1/2,j}\left(\tau_{b,x}\right)^n_{i-1/2,j}\right)h_t h_y +$$

$$+\left(k^n_{i,j+1/2}(\tau_{b,y})^n_{i,j+1/2} - k^n_{i,j-1/2}(\tau_{b,y})^n_{i,j-1/2}\right)h_t h_x =$$

$$= \frac{\tau_{bc}}{\sin\varphi_0}\left(k^n_{i+1/2,j}\frac{H^{n+\sigma}_{i+1,j}-H^{n+\sigma}_{i,j}}{h_x} - k^n_{i-1/2,j}\frac{H^{n+\sigma}_{i,j}-H^{n+\sigma}_{i-1,j}}{h_x}\right)h_y h_t +$$

$$+\frac{\tau_{bc}}{\sin\varphi_0}\left(k^n_{i,j+1/2}\frac{H^{n+\sigma}_{i,j+1}-H^{n+\sigma}_{i,j}}{h_y} - k^n_{i,j-1/2}\frac{H^{n+\sigma}_{i,j}-H^{n+\sigma}_{i,j-1}}{h_y}\right)h_x h_t. \tag{24}$$

Разделим выражение (24) на $h_t h_x h_y$, в результате получим дискретную модель транспорта наносов:

$$(1-\varepsilon)\frac{H^{n+1}_{i,j}-H^n_{i,j}}{h_t} + \frac{k^n_{i+1/2,j}\left(\tau_{b,x}\right)^n_{i+1/2,j} - k^n_{i-1/2,j}\left(\tau_{b,x}\right)^n_{i-1/2,j}}{h_x} +$$

$$+\frac{k^n_{i,j+1/2}\left(\tau_{b,y}\right)^n_{i,j+1/2} - k^n_{i,j-1/2}\left(\tau_{b,y}\right)^n_{i,j-1/2}}{h_y} =$$

$$= \frac{\tau_{bc}}{\sin\varphi_0}\left(k^n_{i+1/2,j}\frac{H^{n+\sigma}_{i+1,j}-H^{n+\sigma}_{i,j}}{h_x^2}-k^n_{i-1/2,j}\frac{H^{n+\sigma}_{i,j}-H^{n+\sigma}_{i-1,j}}{h_x^2}\right)+$$

$$+\frac{\tau_{bc}}{\sin\varphi_0}\left(k^n_{i,j+1/2}\frac{H^{n+\sigma}_{i,j+1}-H^{n+\sigma}_{i,j}}{h_y^2}-k^n_{i,j-1/2}\frac{H^{n+\sigma}_{i,j}-H^{n+\sigma}_{i,j-1}}{h_y^2}\right), \tag{25}$$

где

$$\left(\tau_{b,x}\right)^n_{i+1/2,j}=\left(\left(\tau_{b,x}\right)^n_{i+1,j}+\left(\tau_{b,x}\right)^n_{i,j}\right)\Big/2,\ \left(\tau_{b,y}\right)^{n+\sigma}_{i,j+1/2}=\left(\left(\tau_{b,y}\right)^n_{i,j+1}+\left(\tau_{b,y}\right)^n_{i,j}\right)\Big/2,$$

$$k^n_{i+1/2,j}=\frac{A\varpi d\left|\left(\vec{\tau}_b\right)^n_{i+1/2,j}-\frac{\tau_{bc}}{\sin\varphi_0}\left(gradH\right)^n_{i+1/2,j}\right|^{\beta-1}}{\left((\rho_1-\rho_0)gd\right)^{\beta}}h\left(\left|\left(\vec{\tau}_b\right)^n_{i+1/2,j}-\frac{\tau_{bc}}{\sin\varphi_0}\left(gradH\right)^n_{i+1/2,j}\right|-\tau_{bc}\right).$$

Найдем значение $gradH\big|_{\left(x_{i+1/2},y_j\right)}$. Для этого обозначим $W = gradH$ и проинтегрируем данное выражение по области $D_{xy}: D_{xy}\in\left\{x\in\left[x_i,x_{i+1}\right], y\in\left[y_{j-1/2},y_{j+1/2}\right]\right\}$, в результате чего получим:

$$\iint\limits_{D_{xy}} Wdxdy=\iint\limits_{D_{xy}} gradHdxdy. \tag{26}$$

Левая часть данного выражения запишется так: $\iint\limits_{D_{xy}} Wdxdy = 2W_{i+1/2,j}h_xh_y$.

Запишем правую часть выражения (26), имеем:

$$\iint\limits_{D_{xy}} gradHdxdy=\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}\int\limits_{y_{i-1}}^{y_{j+1}}\left(H'_x\overline{i}+H'_y\overline{j}\right)dxdy\simeq\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}\left(2h_y\left(H'_x\right)\Big|_{y=j_j}\overline{i}+H\Big|_{y_{i-1}}^{y_{j+1}}\overline{j}\right)dx\simeq$$

$$\simeq\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}\left(2h_y\left(H'_x\right)\Big|_{y=j_j}\overline{i}+H\Big|_{y_{i-1}}^{y_{j+1}}\overline{j}\right)dx\simeq 2h_y\left(H_{i+1,j}-H_{i,j}\right)\overline{i}+h_x\left(H_{i+1/2,j+1}-H_{i+1/2,j-1}\right)\overline{j}.$$

Таким образом, выражение (26) можно записать в виде

$$\left(gradH\right)_{i+1/2,j}=\frac{H_{i+1,j}-H_{i,j}}{h_x}\overline{i}+\frac{H_{i+1/2,j+1}-H_{i+1/2,j-1}}{2h_y}\overline{j}, \tag{27}$$

где $\overline{i}$, $\overline{j}$ – единичные векторы, направленные вдоль координатных осей Ox, Oy соответственно.

Аналогичным образом можно получить следующую аппроксимацию:

$$\left(gradH\right)_{i,j+1/2}=\frac{H_{i+1,j+1/2}-H_{i-1,j+1/2}}{2h_x}\overline{i}+\frac{H_{i,j+1}-H_{i,j}}{h_y}\overline{j}. \tag{28}$$

Выражение (25) с аппроксимациями (27)–(28) задают дискретную модель транспорта наносов.

Сеточные уравнения для задачи транспорта наносов. Запишем дискретную модель транспорта наносов в канонической форме сеточных уравнений:

$$Ly(P)=A(P)H(P)-\sum_{Q\in Ш'(P)}B(P,Q)H(Q)=F(P), \tag{29}$$

где L – некоторый сеточный оператор, $P \equiv (x_i, y_j)$ – центр шаблона, $Ш'(P) = \{Q_1(x_{i+1}, y_j), Q_2(x_{i-1}, y_j), Q_3(x_i, y_{j+1}), Q_4(x_i, y_{j-1})\}$ – окрестность центра шаблона.

Выделим семейство сеточных уравнений, для которых коэффициенты, участвующие в уравнении, удовлетворяют следующим условиям [2,4]:

$$A(P) > 0,\ B(P,Q) > 0,\ D(P) = A(P) - \sum_{Q \in Ш'(P)} B(P,Q) \geq 0. \quad (30)$$

Для построения математической модели нам также понадобятся следующие узлы $\{Q_{13}(x_{i+1}, y_{j+1}), Q_{14}(x_{i+1}, y_{j-1}), Q_{23}(x_{i-1}, y_{j+1}), Q_{24}(x_{i-1}, y_{j-1})\}$. Введем обозначение $\{q_1(x_{i+1/2}, y_j), q_2(x_{i-1/2}, y_j), q_3(x_i, y_{j+1/2}), q_4(x_i, y_{j-1/2})\}$ для смещенных узлов.

Уравнение (25) можно записать в виде:

$$(1-\varepsilon)\frac{H_{i,j}^{n+1} - H_{i,j}^{n}}{h_t} + \frac{k_{i+1/2,j}^{n}(\tau_{b,x})_{i+1/2,j}^{n} - k_{i-1/2,j}^{n}(\tau_{b,x})_{i-1/2,j}^{n}}{h_x} +$$
$$+\frac{k_{i,j+1/2}^{n}(\tau_{b,y})_{i,j+1/2}^{n} - k_{i,j-1/2}^{n}(\tau_{b,y})_{i,j-1/2}^{n}}{h_y} =$$
$$= \frac{\tau_{bc}}{\sin\varphi_0} k_{i+1/2,j}^{n} \frac{H_{i+1,j}^{n+\sigma} - H_{i,j}^{n+\sigma}}{h_x^2} - \frac{\tau_{bc}}{\sin\varphi_0} k_{i-1/2,j}^{n} \frac{H_{i,j}^{n+\sigma} - H_{i-1,j}^{n+\sigma}}{h_x^2} +$$
$$+\frac{\tau_{bc}}{\sin\varphi_0} k_{i,j+1/2}^{n} \frac{H_{i,j+1}^{n+\sigma} - H_{i,j}^{n+\sigma}}{h_y^2} - \frac{\tau_{bc}}{\sin\varphi_0} k_{i,j-1/2}^{n} \frac{H_{i,j}^{n+\sigma} - H_{i,j-1}^{n+\sigma}}{h_y^2}, \quad (31)$$

где $H_{i,j}^{n+\sigma} = \sigma H_{i,j}^{n+1} + (1-\sigma) H_{i,j}^{n}$.

Перенесем, в уравнении (31), слагаемые, содержащие $H_{i,j}^{n+1}$ влево, остальные – вправо, имеем:

$$\frac{1-\varepsilon}{h_t} H_{i,j}^{n+1} - \frac{\tau_{bc}}{\sin\varphi_0}\sigma\left(k_{i+1/2,j}^{n} \frac{H_{i+1,j}^{n+1} - H_{i,j}^{n+1}}{h_x^2} - k_{i-1/2,j}^{n} \frac{H_{i,j}^{n+1} - H_{i-1,j}^{n+1}}{h_x^2} + \right.$$
$$\left. + k_{i,j+1/2}^{n} \frac{H_{i,j+1}^{n+1} - H_{i,j}^{n+1}}{h_y^2} - k_{i,j-1/2}^{n} \frac{H_{i,j}^{n+1} - H_{i,j-1}^{n+1}}{h_y^2} \right) = \frac{1-\varepsilon}{h_t} H_{i,j}^{n} +$$
$$+\frac{\tau_{bc}(1-\sigma)}{\sin\varphi_0}\left(k_{i+1/2,j}^{n} \frac{H_{i+1,j}^{n} - H_{i,j}^{n}}{h_x^2} - k_{i-1/2,j}^{n} \frac{H_{i,j}^{n} - H_{i-1,j}^{n}}{h_x^2} \right.$$
$$\left. + k_{i,j+1/2}^{n} \frac{H_{i,j+1}^{n} - H_{i,j}^{n}}{h_y^2} - k_{i,j-1/2}^{n} \frac{H_{i,j}^{n} - H_{i,j-1}^{n}}{h_y^2} \right) -$$
$$-\frac{k_{i+1/2,j}^{n}(\tau_{b,x})_{i+1/2,j}^{n} - k_{i-1/2,j}^{n}(\tau_{b,x})_{i-1/2,j}^{n}}{h_x} - \frac{k_{i,j+1/2}^{n}(\tau_{b,y})_{i,j+1/2}^{n} - k_{i,j-1/2}^{n}(\tau_{b,y})_{i,j-1/2}^{n}}{h_y}. \quad (32)$$

Запишем выражение (32) в форме (29):

$$\left(\frac{1-\varepsilon}{h_t}+\frac{\tau_{bc}}{\sin\varphi_0}\sigma\left(\frac{k^n_{i+1/2,j}+k^n_{i-1/2,j}}{h_x^2}+\frac{k^n_{i,j+1/2}+k^n_{i,j-1/2}}{h_y^2}\right)\right)H^{n+1}_{i,j}-$$

$$-\frac{\tau_{bc}}{\sin\varphi_0}\left(\frac{k^n_{i+1/2,j}}{h_x^2}H^{n+1}_{i+1,j}+\frac{k^n_{i-1/2,j}}{h_x^2}H^{n+1}_{i-1,j}+\frac{k^n_{i,j+1/2}}{h_y^2}H^{n+1}_{i,j+1}+\frac{k^n_{i,j-1/2}}{h_y^2}H^{n+1}_{i,j-1}\right)=$$

$$=\left(\frac{1-\varepsilon}{h_t}-\frac{\tau_{bc}(1-\sigma)}{\sin\varphi_0}\left(\frac{k^n_{i+1/2,j}+k^n_{i-1/2,j}}{h_x^2}+\frac{k^n_{i,j+1/2}+k^n_{i,j-1/2}}{h_y^2}\right)\right)H^n_{i,j}+$$

$$+\frac{\tau_{bc}}{\sin\varphi_0}\left(\frac{k^n_{i+1/2,j}}{h_x^2}H^n_{i+1,j}+\frac{k^n_{i-1/2,j}}{h_x^2}H^n_{i-1,j}+\frac{k^n_{i,j+1/2}}{h_y^2}H^n_{i,j+1}+\frac{k^n_{i,j-1/2}}{h_y^2}H^n_{i,j-1}\right)-$$

$$-\frac{k^n_{i+1/2,j}\left(\tau_{b,x}\right)^n_{i+1/2,j}-k^n_{i-1/2,j}\left(\tau_{b,x}\right)^n_{i-1/2,j}}{h_x}-\frac{k^n_{i,j+1/2}\left(\tau_{b,y}\right)^n_{i,j+1/2}-k^n_{i,j-1/2}\left(\tau_{b,y}\right)^n_{i,j-1/2}}{h_y}. \quad (33)$$

Коэффициенты и правая часть сеточного уравнения (33) запишутся так:

$$A(P)=\frac{1-\varepsilon}{h_t}+\frac{\tau_{bc}\sigma}{\sin\varphi_0}\left(\frac{k(q_1)+k(q_2)}{h_x^2}+\frac{k(q_3)+k(q_4)}{h_y^2}\right),$$

$$B(P,Q_i)=\frac{\tau_{bc}\sigma}{\sin\varphi_0}\frac{k(q_i)}{h_x^2},\quad i=\overline{1,4}, \quad (34)$$

$$F(P)=\left(\frac{1-\varepsilon}{h_t}-\frac{\tau_{bc}(1-\sigma)}{\sin\varphi_0}\left(\frac{k(q_1)+k(q_2)}{h_x^2}+\frac{k(q_3)+k(q_4)}{h_y^2}\right)\right)H(P)+$$

$$+\frac{\tau_{bc}(1-\sigma)}{\sin\varphi_0}\left(\frac{k(q_1)}{h_x^2}H(Q_1)+\frac{k(q_2)}{h_x^2}H(Q_2)+\frac{k(q_3)}{h_y^2}H(Q_3)+\frac{k(q_4)}{h_y^2}H(Q_4)\right)-$$

$$-\frac{k(q_1)\tau_{b,x}(q_1)-k(q_2)\tau_{b,x}(q_1)}{h_x}-\frac{k(q_3)\tau_{b,y}(q_3)-k(q_4)\tau_{b,y}(q_4)}{h_y},$$

где $\vec{\tau}_b(P)=0,6C\vec{U}(P)\left|\vec{U}(P)\right|$ – касательное тангенциальное напряжение,

$$\tau_{b,x}(q_i)=\left(\tau_{b,x}(Q_i)+\tau_{b,x}(P)\right)/2,\ i=\overline{1,4},$$

$$\tau_{b,y}(q_i)=\left(\tau_{b,y}(Q_i)+\tau_{b,y}(P)\right)/2,\ i=\overline{1,4},$$

$$k(q_i)=\frac{A\varpi d\left|\vec{\tau}_b(q_i)-\frac{\tau_{bc}}{\sin\varphi_0}gradH(q_i)\right|^{\beta-1}}{((\rho_1-\rho_0)gd)^{\beta}}h\left(\left|\vec{\tau}_b(q_i)-\frac{\tau_{bc}}{\sin\varphi_0}gradH(q_i)\right|-\tau_{bc}\right),$$

$i=\overline{1,4}$,

$$gradH(q_1)=\frac{H(Q_1)-H(P)}{h_x}\overline{i}+\frac{H(Q_3)+H(Q_{13})-H(Q_4)-H(Q_{14})}{4h_y}\overline{j},$$

$$gradH\left(q_3\right)=\frac{H\left(Q_1\right)+H\left(Q_{13}\right)-H\left(Q_2\right)+H\left(Q_{23}\right)}{4h_x}\overline{i}+\frac{H\left(Q_3\right)-H\left(P\right)}{h_y}\overline{j}.$$

Алгоритм расчета коэффициентов сеточных уравнений для задачи транспорта наносов. Рассчитывать коэффициенты и правую часть сеточного уравнения (34) предлагается следующим образом.

На первом шаге вычисляем номера узлов:

$$P=i+j\cdot N_x,\ Q_1=P+1,\ Q_2=P-1,\ Q_3=P+N_x,\ Q_4=P-N_x,$$

$$Q_{13}=P+N_x+1,\ Q_{14}=P-N_x+1,\ Q_{23}=P+N_x-1,\ Q_{24}=P-N_x-1.$$

На втором шаге находим касательное тангенциальное напряжение $\vec{\tau}_b\left(P\right)=\left\{\tau_{b,x}\left(P\right),\tau_{b,y}\left(P\right)\right\}$ для центральных узлов:

$$\tau_{b,x}\left(P\right)=0,6CU_x\left(P\right)\left|\vec{U}\left(P\right)\right|,\ \tau_{b,y}\left(P\right)=0,6CU_y\left(P\right)\left|\vec{U}\left(P\right)\right|,$$

для смещенных узлов:

$$\tau_{b,x}\left(q_1\right)=\left(\tau_{b,x}\left(Q_1\right)+\tau_{b,x}\left(P\right)\right)/2,\ \tau_{b,x}\left(q_2\right)=\left(\tau_{b,x}\left(Q_2\right)+\tau_{b,x}\left(P\right)\right)/2,$$

$$\tau_{b,y}\left(q_3\right)=\left(\tau_{b,y}\left(Q_3\right)+\tau_{b,y}\left(P\right)\right)/2,\ \tau_{b,y}\left(q_4\right)=\left(\tau_{b,y}\left(Q_4\right)+\tau_{b,y}\left(P\right)\right)/2.$$

Для расчета вектора скорости можно использовать модель гидродинамики, рассмотренную в работах [3,5].

На третьем шаге вычисляются градиенты глубины для смещенных узлов:

$$gradH\left(q_1\right)=\frac{H\left(Q_1\right)-H\left(P\right)}{h_x}\overline{i}+\frac{H\left(Q_3\right)+H\left(Q_{13}\right)-H\left(Q_4\right)-H\left(Q_{14}\right)}{4h_y}\overline{j},$$

$$gradH\left(q_2\right)=\frac{H\left(P\right)-H\left(Q_2\right)}{h_x}\overline{i}+\frac{H\left(Q_3\right)+H\left(Q_{23}\right)-H\left(Q_4\right)-H\left(Q_{24}\right)}{4h_y}\overline{j},$$

$$gradH\left(q_3\right)=\frac{H\left(Q_1\right)+H\left(Q_{13}\right)-H\left(Q_2\right)+H\left(Q_{23}\right)}{4h_x}\overline{i}+\frac{H\left(Q_3\right)-H\left(P\right)}{h_y}\overline{j},$$

$$gradH\left(q_1\right)=\frac{H\left(Q_1\right)+H\left(Q_{14}\right)-H\left(Q_2\right)+H\left(Q_{24}\right)}{4h_x}\overline{i}+\frac{H\left(P\right)-H\left(Q_4\right)}{h_y}\overline{j}.$$

На четвертом шаге вычисляются модули касательных тангенциальных напряжений: $\tau\left(q_i\right)=\left|\vec{\tau}_b\left(q_1\right)-\frac{\tau_{bc}}{\sin\varphi_0}gradH\left(q_i\right)\right|,\quad i=\overline{1,4}.$

На пятом шаге вычисляются коэффициенты k для смещенных узлов:

$$k\left(q_1\right)=\frac{A\varpi d\tau^{\beta-1}\left(q_1\right)}{\left((\rho_1-\rho_0)gd\right)^{\beta}}h\left(\tau\left(q_1\right)-\tau_{bc}\right),$$

$$k\left(q_2\right)=\frac{A\varpi d\tau^{\beta-1}\left(q_2\right)}{\left((\rho_1-\rho_0)gd\right)^{\beta}}h\left(\tau\left(q_2\right)-\tau_{bc}\right),$$

$$k\left(q_3\right)=\frac{A\varpi d\tau^{\beta-1}\left(q_3\right)}{\left(\left(\rho_1-\rho_0\right)gd\right)^{\beta}}h\left(\tau\left(q_3\right)-\tau_{bc}\right),$$

$$k\left(q_4\right)=\frac{A\varpi d\tau^{\beta-1}\left(q_4\right)}{\left(\left(\rho_1-\rho_0\right)gd\right)^{\beta}}h\left(\tau\left(q_4\right)-\tau_{bc}\right).$$

На шестом шаге рассчитываем вспомогательные коэффициенты:

$$B_1=\frac{\tau_{bc}}{\sin\varphi_0}\frac{k\left(q_1\right)}{h_x^2},\ B_2=\frac{\tau_{bc}}{\sin\varphi_0}\frac{k\left(q_2\right)}{h_x^2},$$

$$B_3=\frac{\tau_{bc}}{\sin\varphi_0}\frac{k\left(q_1\right)}{h_y^2},\ B_4=\frac{\tau_{bc}}{\sin\varphi_0}\frac{k\left(q_1\right)}{h_y^2},$$

$$B_6=\left(1-\sigma\right)B_1,\ B_7=\left(1-\sigma\right)B_2,\ B_8=\left(1-\sigma\right)B_3,\ B_9=\left(1-\sigma\right)B_4,$$

$$B_5=\frac{1-\varepsilon}{h_t}-\left(B_6+B_7+B_8+B_9\right).$$

На седьмом шаге вычисляются коэффициенты сеточного уравнения:

$$B\left(P,Q_1\right)=\sigma B_1,\ B\left(P,Q_2\right)=\sigma B_2,\ B\left(P,Q_3\right)=\sigma B_3,\ B\left(P,Q_4\right)=\sigma B_4,$$

$$A\left(P\right)=\frac{1-\varepsilon}{h_t}+B\left(P,Q_1\right)+B\left(P,Q_2\right)+B\left(P,Q_3\right)+B\left(P,Q_4\right).$$

На восьмом шаге рассчитывается правая часть сеточного уравнения:

$$F\left(P\right)=B_5H\left(P\right)+B_6H\left(Q_1\right)+B_7H\left(Q_2\right)+B_8H\left(Q_3\right)+B_9H\left(Q_4\right)-$$

$$-\frac{k\left(q_1\right)\tau_{b,x}\left(q_1\right)-k\left(q_2\right)\tau_{b,x}\left(q_1\right)}{h_x}-\frac{k\left(q_3\right)\tau_{b,y}\left(q_3\right)-k\left(q_4\right)\tau_{b,y}\left(q_4\right)}{h_y}.$$

Таким образом строятся сеточные уравнения для задачи транспорта наносов.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Леонтьев И.О.* Прибрежная динамика: волны, течения, потоки наносов. – М.: Геос., 2001. – 272 с.
2. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. – М. : Наука, 1983.
3. *Чистяков А.Е.* Трехмерная модель движения водной среды в Азовском море с учетом транспорта солей и тепла // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2009. – № 8 (97). – С. 75-82.
4. *Сухинов А.И.* Двумерные схемы расщепления и некоторые их приложения. – М.: МАКС Пресс, 2005. – 408 с.
5. *Проценко Е.А.* Модель и алгоритмы решения задачи о транспорте наносов // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2009. – № 8 (97). – С. 71-75.
6. *Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Алексеенко Е.В.* Численная реализация трехмерной модели гидродинамики для мелководных водоемов на супервычислительной системе // Математическое моделирование. – 2011. – Т. 23, № 3. – С. 3-21.

Статью рекомендовал к опубликованию к.ф.-м.н., доцент Н.Е. Ляхова.

Сухинов Александр Иванович
Технологический институт федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Южный федеральный университет» в г. Таганроге.
E-mail: sukhinov@gmail.ru.
347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44.
Тел.: 88634310599; 89281021106.
Руководитель ТТИ ЮФУ; д.ф.-м.н.; профессор.

Чистяков Александр Евгеньевич
E-mail: cheese_05@mail.ru.
Тел.: 88634371606.
Кафедра высшей математики; ассистент.

Проценко Елена Анатольевна
E-mail: rab55555@ rambler.ru.
Старший преподаватель.

Sukhinov Alexander Ivanovich
Taganrog Institute of Technology – Federal State-Owned Autonomy Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”.
E-mail: sukhinov@gmail.ru
44, Nekrasovskiy, Taganrog, 347928, Russia.
Phone: +78634310599.
The head of TIT SFedU; Dr. of Phis.-Math. Sc.; Professor.

Chistyakov Alexander Evgenjevich
E-mail: cheese_05@mail.ru.
Phone: +78634371606.
The Department of Higher Mathematics; Assistant.

Protsenko Elena Anatol'evna
E-mail: rab55555@ rambler.ru.
Senior Lecturer.

УДК 519.6

А.В. Шишеня

ТРЕХМЕРНАЯ МОДЕЛЬ ГИДРОДИНАМИКИ И ПРОЦЕССОВ ПЕРЕНОСА ТЕПЛА И СОЛЕЙ В АКВАТОРИИ АЗОВСКОГО МОРЯ С УЧЕТОМ СГОННО-НАГОННЫХ ЯВЛЕНИЙ

Работа посвящена построению математической модели гидродинамики и процессов массопереноса в мелководных водоемах, а также разработке методов учета свободной поверхности водоема для моделирования сгонно-нагонных явлений. Предложен способ аппроксимации уравнений непрерывной модели, позволяющий учитывать заполненность ячеек сетки. Рассматриваются различные методы расчета заполненности: на основе функции свободной поверхности и по полю давления. Проведены численные эксперименты на модельной области и анализ результатов. Результаты расчета согласуются с реальным физическим процессом.

Гидродинамика; свободная поверхность; vof-метод; тепломассоперенос.