

Сухинов Александр Иванович

Технологический институт федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Южный федеральный университет» в г. Таганроге.

E-mail: sukhinov@gmail.ru.

347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44.

Тел.: 88634310599; 89281021106.

Руководитель ТТИ ЮФУ; д.ф.-м.н.; профессор.

Чистяков Александр Евгеньевич

E-mail: cheese_05@mail.ru.

Тел.: 88634371606.

Кафедра высшей математики; ассистент.

Проценко Елена Анатольевна

E-mail: rab55555@rambler.ru.

Старший преподаватель.

Sukhinov Alexander Ivanovich

Taganrog Institute of Technology – Federal State-Owned Autonomy Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”.

E-mail: sukhinov@gmail.ru

44, Nekrasovskiy, Taganrog, 347928, Russia.

Phone: +78634310599.

The head of TIT SFedU; Dr. of Phis.-Math. Sc.; Professor.

Chistyakov Alexander Evgenjevich

E-mail: cheese_05@mail.ru.

Phone: +78634371606.

The Department of Higher Mathematics; Assistant.

Protsenko Elena Anatol'evna

E-mail: rab55555@rambler.ru.

Senior Lecturer.

УДК 519.6

А.В. Шишениа

**ТРЕХМЕРНАЯ МОДЕЛЬ ГИДРОДИНАМИКИ И ПРОЦЕССОВ ПЕРЕНОСА
ТЕПЛА И СОЛЕЙ В АКВАТОРИИ АЗОВСКОГО МОРЯ С УЧЕТОМ
СГОННО-НАГОННЫХ ЯВЛЕНИЙ**

Работа посвящена построению математической модели гидродинамики и процессов массопереноса в мелководных водоемах, а также разработке методов учета свободной поверхности водоема для моделирования сгонно-нагонных явлений. Предложен способ аппроксимации уравнений непрерывной модели, позволяющий учитывать заполненность ячеек сетки. Рассматриваются различные методы расчета заполненности: на основе функции свободной поверхности и по полю давления. Проведены численные эксперименты на модельной области и анализ результатов. Результаты расчета согласуются с реальным физическим процессом.

Гидродинамика; свободная поверхность; vof-метод; тепломассоперенос.

A.V. Shishenya

THREE-DIMENSIONAL MODEL OF HYDRODYNAMICS AND HEAT AND SALINITY TRANSFER IN THE SEA OF AZOV TAKING INTO ACCOUNT WIND-SURGE PHENOMENA

The work is devoted to the creating of the mathematical model of hydrodynamics and heat and salinity transfer in shallow water basins as well as to the development of the methods for treating with free surface of the water body for wind-surge phenomena modelling. In the article a new method for sampling the continuous model equations is suggested. It allows to take into account fullness of the sampling grid cells. The methods of the fullness of cells calculation are considered as well: based on the function of free surface and using pressure field. Numerical experiments and analysis of results were held for a model region. Simulation results coincide with real physical process.

Hydrodynamics; free surface; vof-method; heat and mass transfer.

Введение. Азовское море является самым мелким морем в мире, вследствие чего сгонно-нагонные явления оказывают значительное влияние на его состояние. В то же время низкая соленость и высокая концентрация биогенных веществ обуславливают высокую рыбопродуктивность и хозяйственную ценность. Однако, в последнее время наблюдается снижение качества воды, замор рыбы, интенсивное заиливание моря. Исправить ситуацию возможно с помощью моделирования различных сценариев развития ситуации в зависимости от принимаемых мер. При этом следует рассматривать динамику популяций флоры и фауны моря вместе с учетом направления и скоростей течений, процессов распространения примесей, температурного режима, сгонно-нагонных явлений и смыва биогенных веществ из почвы. В работе [1] построена двумерная, а в [2,3] трехмерная математическая модель гидродинамики мелководных водоемов с учетом стока рек, трения о дно и ветровых напряжений. Модель, построенная в [2], учитывает тепло- и массоперенос, а также зависимость плотности воды от температуры и солености. В работе [4] построена модель динамики токсичных сине-зеленых водорослей, учитывающая флуоресценцию фитопланктона, неоднородность пространственного распределения зоопланктона и биогенных веществ, а в [5] на основе модели гидродинамики проводится подробный анализ причин экологической катастрофы в Азовском море в 2001 году. В то же время ранее авторами уже рассматривалась модель распространения солей и тепла в Азовском море [6]. В настоящей работе продемонстрирована оригинальная техника аппроксимации уравнений непрерывной модели гидродинамики и тепло-массопереноса, позволяющая учитывать частичную заполненность ячеек дискретной сетки, и предложены способы расчета коэффициентов заполненности.

Непрерывная модель. Рассмотрим задачу моделирования гидродинамики, а также переноса тепла и солей в Азовском море. Будем полагать, что плотность жидкости является величиной переменной и в каждой точке зависит от давления и температуры. Учтём также, что поверхность моря может менять свою форму, а форма берега может варьироваться в зависимости от уровня жидкости.

В непрерывную математическую модель гидродинамики и переноса тепла и солей входят [2]:

- ◆ уравнения движения (Навье–Стокса):

$$u'_t + uu'_x + vv'_y + ww'_z = -\frac{1}{\rho} p'_x + (\mu u'_x)'_x + (\mu v'_y)'_y + (\mu w'_z)'_z + f_x,$$

$$v'_t + uv'_x + vv'_y + ww'_z = -\frac{1}{\rho} p'_y + (\mu v'_x)'_x + (\mu v'_y)'_y + (\gamma w'_z)'_z + f_y, \quad (1)$$

$$w'_t + uw'_x + vw'_y + ww'_z = -\frac{1}{\rho} p'_z + (\mu w'_x)'_x + (\mu w'_y)'_y + (\gamma w'_z)'_z + f_z,$$

здесь μ , γ – микротурбулентные вязкости жидкости по горизонтали и вертикали соответственно, при этом можно считать, что μ является константой;

♦ уравнение неразрывности:

$$\rho'_t + (\rho u)'_x + (\rho v)'_y + (\rho w)'_z = 0; \quad (2)$$

♦ уравнения переноса тепла и солей:

$$T'_t + uT'_x + vT'_y + wT'_z = (\mu_T T'_x)'_x + (\mu_T T'_y)'_y + (\gamma_T T'_z)'_z + f_T, \quad (3)$$

$$S'_t + uS'_x + vS'_y + wS'_z = (\mu_S S'_x)'_x + (\mu_S S'_y)'_y + (\gamma_S S'_z)'_z + f_S; \quad (4)$$

♦ уравнение состояния:

$$\begin{aligned} \rho(T, S) = & 800,969062 \cdot 10^{-4} + 588,194023 \cdot 10^{-4} T + 797,018644 \cdot 10^{-3} S - \\ & - 811,465413 \cdot 10^{-5} T^2 - 325,310441 \cdot 10^{-5} TS + 131,710842 \cdot 10^{-6} S^2 + \\ & + 476,600414 \cdot 10^{-7} T^3 + 389,187483 \cdot 10^{-7} ST^2 + \\ & + 287,971530 \cdot 10^{-8} S^2 T - 611,831499 \cdot 10^{-10} S^3. \end{aligned} \quad (5)$$

Граничные условия. На входе – устья рек:

$$\vec{v}|_{\gamma_i} = \vec{v}_i(t), \quad \left. \frac{\partial p}{\partial \vec{n}} \right|_{\gamma_i} = 0, \quad i = 1, 2 \dots r. \quad (6)$$

Непроницаемая граница – берега и дно:

$$\left. \frac{\partial p}{\partial \vec{n}} \right|_{\gamma} = 0, \quad \rho_v \mu \left. \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right|_{\gamma} = -\tau_x(t), \quad \rho_v \mu \left. \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} \right|_{\gamma} = -\tau_y(t). \quad (7)$$

Верхняя граница – поверхность:

$$\left. \frac{\partial p}{\partial \vec{n}} \right|_{\gamma} = 0, \quad \rho_a \mu \left. \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right|_{\gamma} = -\tau_x(t), \quad \rho_a \mu \left. \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} \right|_{\gamma} = -\tau_y(t), \quad w|_{\gamma} = -\omega - \frac{p'_t}{\rho_0 g}. \quad (8)$$

На выходе – Керченский пролив, озеро Сиваш:

$$\left. \frac{\partial p}{\partial \vec{n}} \right|_{\gamma} = 0, \quad \left. \frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{n}} \right|_{\gamma} = 0, \quad (9)$$

здесь γ_i – участки границы, где находятся устья рек; $\vec{v}_i(t)$ – скорости течения соответствующих рек; r – количество рек; $\tau_x(t)$, $\tau_y(t)$ – составляющие тангенциальных напряжений на дне и поверхности; ω – интенсивность испарений; g – ускорение свободного падения; ρ_0 – плотность пресной воды; ρ – плотность воды с учетом температуры и растворенных солей.

Для задания составляющих тангенциальных напряжений для свободной поверхности и дна будем использовать закон Ван-Дорна:

$$\tau_x = \rho_c C(|\vec{V}|) \cdot V_x |\vec{V}|, \quad \tau_y = \rho_c C(|\vec{V}|) \cdot V_y |\vec{V}|, \quad (10)$$

где ρ_c – плотность среды, относительное движение которой вызывает тангенциальные напряжения, \vec{V} – относительная скорость движения этой среды. В случае стенок и дна $\rho_c = \rho_v$, $\vec{V} = -\vec{v}$, а в случае поверхности $\rho_c = \rho_a$, $\vec{V} = \vec{W} - \vec{v}$, где ρ_a – плотность атмосферы, \vec{W} – скорость ветра или прилегающей среды. Безразмерный коэффициент определяется следующим образом:

$$C(|\vec{V}|) = \begin{cases} 0,0088, & |\vec{V}| < 6,6 \frac{M}{c}, \\ 0,0026, & |\vec{V}| > 6,6 \frac{M}{c}. \end{cases}$$

Дискретизация по времени. Схема расщепления по физическим процессам. При решении задачи гидродинамики (1)–(2) основной сложностью является нахождение поля давления. Компоненты поля скоростей входят во все уравнения (1)–(2), а поле давления содержится в уравнениях (1), поэтому не понятно, какое уравнение следует использовать для нахождения поля давления. Один из способов разрешения этой проблемы – метод поправки к давлению – используется в MAC-методе (Markers And Cells).

Будем искать поле скоростей в два этапа. Для этого введём в рассмотрение поле скоростей $\vec{\tilde{v}} = (\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w})$, которое не обязательно удовлетворяет уравнению неразрывности. Требуемое поле скоростей $\vec{v} = (u, v, w)$ найдем исходя из уравнения неразрывности и используя вспомогательное поля $\vec{\tilde{v}}$ и поле давления.

Введём следующие обозначения:

$$u = u^n, \quad \hat{u} = u^{n+1}, \quad v = v^n, \quad \hat{v} = v^{n+1}, \quad w = w^n, \quad \hat{w} = w^{n+1}.$$

Уравнения конвективного и диффузионного переноса импульса имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{u} - u}{\tau} + u\tilde{u}'_x + v\tilde{u}'_y + w\tilde{u}'_z &= (\mu\tilde{u}'_x)'_x + (\mu\tilde{u}'_y)'_y + (\mu\tilde{u}'_z)'_z + f_x, \\ \frac{\tilde{v} - v}{\tau} + u\tilde{v}'_x + v\tilde{v}'_y + w\tilde{v}'_z &= (\mu\tilde{v}'_x)'_x + (\mu\tilde{v}'_y)'_y + (\mu\tilde{v}'_z)'_z + f_y, \\ \frac{\tilde{w} - w}{\tau} + u\tilde{w}'_x + v\tilde{w}'_y + w\tilde{w}'_z &= (\mu\tilde{w}'_x)'_x + (\mu\tilde{w}'_y)'_y + (\mu\tilde{w}'_z)'_z + f_z. \end{aligned} \quad (11)$$

Уравнение для расчета давления имеет вид

$$\tau \cdot (p''_{x^2} + p''_{y^2} + p''_{z^2}) = \rho'_t + (\rho\tilde{u})'_x + (\rho\tilde{v})'_y + (\rho\tilde{w})'_z. \quad (12)$$

Переход на следующий временной слой осуществляется по формулам

$$\begin{aligned} \frac{\hat{u} - \tilde{u}}{\tau} &= -\frac{1}{\rho} p'_x, \\ \frac{\hat{v} - \tilde{v}}{\tau} &= -\frac{1}{\rho} p'_y, \\ \frac{\hat{w} - \tilde{w}}{\tau} &= -\frac{1}{\rho} p'_z. \end{aligned} \quad (13)$$

Пространственная аппроксимация уравнений. Введем систему координат: направим ось Ox на восток, ось Oy на юг, а ось Oz вертикально вниз. Покроем расчётную область равномерной прямоугольной сеткой с шагами h_x, h_y, h_z по соответствующим трём пространственным направлениям.

Обозначим внутренние узлы сетки ω :

$$\omega = \left\{ (x_i, y_j, z_k), x_i = i \cdot h_x, y_j = j \cdot h_y, z_k = k \cdot h_z, i = 1 \dots n_1 - 2, j = 1 \dots n_2 - 2, k = 1 \dots n_3 - 2 \right\}$$

где n_1, n_2, n_3 – количество узлов по направлениям x, y, z соответственно, а границу области расчета обозначим через \mathcal{U} .

Введем для удобства смещенную сетку с узлами $\xi_{i-\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}, k-\frac{1}{2}} = x_{i,j,k}$. Таким образом, центрами ячеек сетки с узлами $\{x_{i,j,k}\}$ являются $\{\xi_{i,j,k}\}$, а $\{x_{i,j,k}\}$ – центры ячеек сетки с узлами $\{\xi_{i,j,k}\}$. Введём множество

$$D_{i,j,k} = \left(\xi_{i-1, j-1, k-1} : \xi_{i-\frac{1}{2}, j-1, k-1} \right) \times \left(\xi_{i-1, j-1, k-1} : \xi_{i-1, j-\frac{1}{2}, k-1} \right) \times \left(\xi_{i-1, j-1, k-1} : \xi_{i-1, j-1, k-\frac{1}{2}} \right),$$

а заполненное жидкостью подмножество области $D_{i,j,k}$ обозначим $\Omega_{i,j,k}$. Зададим сеточные функции u, v, w, p на сетке ω , а кусочно-постоянную функцию q в ячейках $\{\xi_{i,j,k}\}$ (рис. 1).

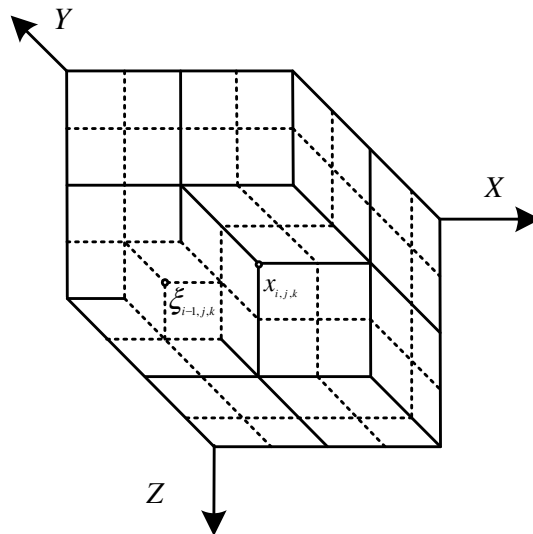


Рис. 1. Ячейки и расчетные узлы сетки

Введем верхний индекс для множеств D и Ω по следующему правилу:

$$D_{i,j,k}^{1,0,0} = D_{i,j,k} \cup D_{i+\frac{1}{2},j,k}, \quad D_{i,j,k}^{0,1,0} = D_{i,j,k} \cup D_{i,j+\frac{1}{2},k}, \quad D_{i,j,k}^{0,0,1} = D_{i,j,k} \cup D_{i,j,k+\frac{1}{2}},$$

$$\begin{aligned}
 D_{i,j,k}^{1,1,0} &= D_{i,j,k}^{1,0,0} \cup D_{i,j+\frac{1}{2},k}^{1,0,0} = D_{i,j,k}^{0,1,0} \cup D_{i+\frac{1}{2},j,k}^{0,1,0}, \\
 D_{i,j,k}^{1,0,1} &= D_{i,j,k}^{1,0,0} \cup D_{i,j,k+\frac{1}{2}}^{1,0,0} = D_{i,j,k}^{0,0,1} \cup D_{i+\frac{1}{2},j,k}^{0,0,1}, \\
 D_{i,j,k}^{0,1,1} &= D_{i,j,k}^{0,0,1} \cup D_{i,j+\frac{1}{2},k}^{0,0,1} = D_{i,j,k}^{0,1,0} \cup D_{i,j,k+\frac{1}{2}}^{0,1,0}, \\
 D_{i,j,k}^{1,1,1} &= D_{i,j,k}^{1,1,0} \cup D_{i,j,k+\frac{1}{2}}^{1,1,0} = D_{i,j,k}^{1,0,1} \cup D_{i,j+\frac{1}{2},k}^{1,0,1} = D_{i,j,k}^{0,1,1} \cup D_{i+\frac{1}{2},j,k}^{0,1,1}.
 \end{aligned}$$

Введем кусочно-постоянную функцию $q_{i,j,k}$ заполненности ячейки $\xi_{i,j,k}$:

$$q_{i,j,k} = \frac{\mu\left(\Omega_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^{1,1,1}\right)}{\mu\left(D_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^{1,1,1}\right)} = \frac{8 \cdot V_{i,j,k}}{h_x h_y h_z},$$

где $V_{i,j,k}$ – объем жидкости в ячейке $\xi_{i,j,k}$. Введем также следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
 u_{i,j,k} &= \frac{1}{h_x h_y h_z} \iiint_{D_{i,j,k}^{1,1,1}} u d\omega, \quad v_{i,j,k} = \frac{1}{h_x h_y h_z} \iiint_{D_{i,j,k}^{1,1,1}} v d\omega, \quad w_{i,j,k} = \frac{1}{h_x h_y h_z} \iiint_{D_{i,j,k}^{1,1,1}} w d\omega, \\
 \tilde{u}_{i,j,k} &= \frac{1}{h_x h_y h_z} \iiint_{D_{i,j,k}^{1,1,1}} \tilde{u} d\omega, \quad \tilde{v}_{i,j,k} = \frac{1}{h_x h_y h_z} \iiint_{D_{i,j,k}^{1,1,1}} \tilde{v} d\omega, \quad \tilde{w}_{i,j,k} = \frac{1}{h_x h_y h_z} \iiint_{D_{i,j,k}^{1,1,1}} \tilde{w} d\omega, \\
 p_{i,j,k} &= \frac{1}{h_x h_y h_z} \iiint_{D_{i,j,k}^{1,1,1}} p d\omega, \quad \rho_{i,j,k} = \frac{1}{h_x h_y h_z} \iiint_{D_{i,j,k}^{1,1,1}} \rho d\omega, \quad T_{i,j,k} = \frac{1}{h_x h_y h_z} \iiint_{D_{i,j,k}^{1,1,1}} T d\omega, \\
 S_{i,j,k} &= \frac{1}{h_x h_y h_z} \iiint_{D_{i,j,k}^{1,1,1}} S d\omega.
 \end{aligned}$$

Аппроксимируем теперь уравнения диффузии-конвекции. Для краткости положим $\phi = \{u, v, w\}$ и проинтегрируем уравнения по заполненной части ячейки:

$$\iiint_{\Omega_{i,j,k}^{1,1,1}} \left(\frac{\tilde{\phi} - \phi}{\tau} + u \tilde{\phi}'_x + v \tilde{\phi}'_y + w \tilde{\phi}'_z \right) d\omega = \iiint_{\Omega_{i,j,k}^{1,1,1}} \left((\mu \tilde{\phi}'_x)'_x + (\mu \tilde{\phi}'_y)'_y + (\gamma \tilde{\phi}'_z)'_z + f \right) d\omega.$$

Затем воспользуемся линейностью тройного интеграла:

$$\begin{aligned}
 &\iiint_{\Omega_{i,j,k}^{1,1,1}} \frac{\tilde{\phi} - \phi}{\tau} d\omega + \iiint_{\Omega_{i,j,k}^{1,1,1}} u \tilde{\phi}'_x d\omega + \iiint_{\Omega_{i,j,k}^{1,1,1}} v \tilde{\phi}'_y d\omega + \iiint_{\Omega_{i,j,k}^{1,1,1}} w \tilde{\phi}'_z d\omega = \\
 &= \iiint_{\Omega_{i,j,k}^{1,1,1}} (\mu \tilde{\phi}'_x)'_x d\omega + \iiint_{\Omega_{i,j,k}^{1,1,1}} (\mu \tilde{\phi}'_y)'_y d\omega + \iiint_{\Omega_{i,j,k}^{1,1,1}} (\gamma \tilde{\phi}'_z)'_z d\omega + \iiint_{\Omega_{i,j,k}^{1,1,1}} f d\omega.
 \end{aligned}$$

Вычислим каждый из полученных интегралов отдельно. Тогда согласно теореме о среднем первый интеграл можно преобразовать следующим образом:

$$\iiint_{\Omega_{i,j,k}^{0,1,1}} \frac{\tilde{\varphi} - \varphi}{\tau} d\omega = \frac{\tilde{\varphi}_{i,j,k} - \varphi_{i,j,k}}{\tau} q_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} h_x h_y h_z.$$

Рассмотрим аппроксимацию конвективного слагаемого:

$$\iiint_{\Omega_{i,j,k}^{0,1,1}} u \overline{\varphi}'_x d\omega = \iiint_{\Omega_{i,j,k}^{0,1,1}} u \overline{\varphi}'_x d\omega + \iiint_{\Omega_{i+1,j,k}^{0,1,1}} u \overline{\varphi}'_x d\omega \cong q_{i,j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} \iiint_{D_{i+\frac{1}{2},j,k}^{0,1,1}} u \overline{\varphi}'_x d\omega + q_{i-1,j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} \iiint_{D_{i,j,k}^{0,1,1}} u \overline{\varphi}'_x d\omega.$$

Для каждого из полученных интегралов воспользуемся теоремой о среднем:

$$\begin{aligned} & q_{i,j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} \iiint_{D_{i+\frac{1}{2},j,k}^{0,1,1}} u \overline{\varphi}'_x d\omega + q_{i-1,j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} \iiint_{D_{i,j,k}^{0,1,1}} u \overline{\varphi}'_x d\omega \cong \\ & \cong q_{i,j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} u_{i+\frac{1}{2},j,k} \iiint_{D_{i+\frac{1}{2},j,k}^{0,1,1}} \overline{\varphi}'_x d\omega + q_{i-1,j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} u_{i-\frac{1}{2},j,k} \iiint_{D_{i,j,k}^{0,1,1}} \overline{\varphi}'_x d\omega. \end{aligned}$$

Теперь вычислим приближенно эти интегралы, используя формулу Ньютона–Лейбница по переменной x и пользуясь теоремой о среднем для интегралов по переменным y и z :

$$\begin{aligned} q_{i,j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} u_{i+\frac{1}{2},j,k} \iiint_{D_{i+\frac{1}{2},j,k}^{0,1,1}} \overline{\varphi}'_x d\omega &= q_{i,j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} u_{i+\frac{1}{2},j,k} \int_{x_i}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \int_{z_{k-\frac{1}{2}}}^{z_{k+\frac{1}{2}}} \overline{\varphi}'_x dx dy dz \cong \\ & \cong q_{i,j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} u_{i+\frac{1}{2},j,k} \left(\overline{\varphi}_{i+\frac{1}{2},j,k} - \overline{\varphi}_{i,j,k} \right) h_y h_z, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_{i-1,j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} u_{i-\frac{1}{2},j,k} \iiint_{D_{i,j,k}^{0,1,1}} \overline{\varphi}'_x d\omega &= q_{i-1,j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} u_{i-\frac{1}{2},j,k} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_i} \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \int_{z_{k-\frac{1}{2}}}^{z_{k+\frac{1}{2}}} \overline{\varphi}'_x dx dy dz \cong \\ & \cong q_{i-1,j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} u_{i-\frac{1}{2},j,k} \left(\overline{\varphi}_{i,j,k} - \overline{\varphi}_{i-\frac{1}{2},j,k} \right) h_y h_z. \end{aligned}$$

Имеем следующую аппроксимацию рассматриваемого слагаемого:

$$\iiint_{\Omega_{i,j,k}^{0,1,1}} u \overline{\varphi}'_x d\omega \cong q_{i,j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} u_{i+\frac{1}{2},j,k} \frac{\overline{\varphi}_{i+1,j,k} - \overline{\varphi}_{i,j,k}}{2} h_y h_z + q_{i-1,j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} u_{i-\frac{1}{2},j,k} \frac{\overline{\varphi}_{i,j,k} - \overline{\varphi}_{i-1,j,k}}{2} h_y h_z.$$

Аналогично производится аппроксимация остальных конвективных слагаемых:

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega_{i,j,k}^{1,1,1}} v \bar{\varphi}'_y d\omega &\cong q_{i-\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2}} v_{i,j+\frac{1}{2},k} \frac{\bar{\varphi}_{i,j+1,k} - \bar{\varphi}_{i,j,k}}{2} h_x h_z + q_{i-\frac{1}{2},j-1,k-\frac{1}{2}} v_{i,j-\frac{1}{2},k} \frac{\bar{\varphi}_{i,j,k} - \bar{\varphi}_{i,j-1,k}}{2} h_x h_z, \\ \iiint_{\Omega_{i,j,k}^{1,1,1}} w \bar{\varphi}'_z d\omega &\cong q_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k} w_{i,j,k+\frac{1}{2}} \frac{\bar{\varphi}_{i,j,k+1} - \bar{\varphi}_{i,j,k}}{2} h_y h_x + q_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k-1} w_{i,j,k-\frac{1}{2}} \frac{\bar{\varphi}_{i,j,k} - \bar{\varphi}_{i,j,k-1}}{2} h_y h_x. \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь аппроксимацию диффузионного слагаемого:

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega_{i,j,k}^{1,1,1}} (\mu \bar{\varphi}'_x)'_x d\omega &= \iiint_{\Omega_{i,j,k}^{1,1,1}} (\mu \bar{\varphi}'_x)'_x d\omega + \iiint_{\Omega_{i+1,j,k}^{0,1,1}} (\mu \bar{\varphi}'_x)'_x d\omega \cong \\ &\cong q_{i,j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} \iiint_{D_{i+1,j,k}^{0,1,1}} (\mu \bar{\varphi}'_x)'_x d\omega + q_{i-1,j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} \iiint_{D_{i,j,k}^{0,1,1}} (\mu \bar{\varphi}'_x)'_x d\omega. \end{aligned}$$

Теперь вычислим приближенно эти интегралы, используя формулу Ньютона–Лейбница по переменной x и пользуясь теоремой о среднем для интегралов по переменным y и z :

$$\begin{aligned} q_{i,j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} \iiint_{D_{i+1,j,k}^{0,1,1}} (\mu \bar{\varphi}'_x)'_x d\omega + q_{i-1,j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} \iiint_{D_{i,j,k}^{0,1,1}} (\mu \bar{\varphi}'_x)'_x d\omega &= \\ &= q_{i,j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_{i-\frac{1}{2}}}^{y_{i+\frac{1}{2}}} \int_{z_{i-\frac{1}{2}}}^{z_{i+\frac{1}{2}}} (\mu \bar{\varphi}'_x)'_x dx dy dz + q_{i-1,j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{y_{i-\frac{1}{2}}}^{y_{i+\frac{1}{2}}} \int_{z_{i-\frac{1}{2}}}^{z_{i+\frac{1}{2}}} (\mu \bar{\varphi}'_x)'_x dx dy dz \cong \\ &\cong q_{i,j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} \left(\mu_{i+\frac{1}{2},j,k} \bar{\varphi}'_{i+\frac{1}{2},j,k} - \mu_{i,j,k} \bar{\varphi}'_{i,j,k} \right) h_y h_z + q_{i-1,j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} \left(\mu_{i,j,k} \bar{\varphi}'_{i,j,k} - \mu_{i-\frac{1}{2},j,k} \bar{\varphi}'_{i-\frac{1}{2},j,k} \right) h_y h_z. \end{aligned}$$

Для аппроксимации оставшихся производных используем центральные конечные разности:

$$\begin{aligned} q_{i,j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} \mu_{i+\frac{1}{2},j,k} \bar{\varphi}'_{i+\frac{1}{2},j,k} h_y h_z + q_{i-1,j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} \mu_{i-\frac{1}{2},j,k} \bar{\varphi}'_{i-\frac{1}{2},j,k} h_y h_z + \left(q_{i-1,j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} - q_{i,j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} \right) \mu_{i,j,k} \bar{\varphi}'_{i,j,k} h_y h_z &= \\ &= q_{i,j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} \mu_{i+\frac{1}{2},j,k} \frac{\bar{\varphi}_{i+1,j,k} - \bar{\varphi}_{i,j,k}}{h_x} h_y h_z + q_{i-1,j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} \mu_{i-\frac{1}{2},j,k} \frac{\bar{\varphi}_{i,j,k} - \bar{\varphi}_{i-1,j,k}}{h_x} h_y h_z + \\ &\quad + \left(q_{i-1,j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} - q_{i,j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} \right) \mu_{i,j,k} \bar{\varphi}'_{i,j,k} h_y h_z. \end{aligned}$$

Имеем следующую аппроксимацию рассматриваемого слагаемого:

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega_{i,j,k}^{1,1,1}} (\mu \bar{\varphi}'_x)'_x d\omega &\cong q_{i,j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} \mu_{i+\frac{1}{2},j,k} \frac{\bar{\varphi}_{i+1,j,k} - \bar{\varphi}_{i,j,k}}{h_x} h_y h_z + q_{i-1,j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} \mu_{i-\frac{1}{2},j,k} \frac{\bar{\varphi}_{i,j,k} - \bar{\varphi}_{i-1,j,k}}{h_x} h_y h_z + \\ &\quad + \left(q_{i-1,j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} - q_{i,j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} \right) \mu_{i,j,k} \bar{\varphi}'_{i,j,k} h_y h_z. \end{aligned}$$

Аналогично производится аппроксимация остальных диффузионных слагаемых:

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega_{i,j,k}^{1,1,1}} (\mu \bar{\varphi}'_y)'_y d\omega &\cong q_{i-\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2}} \mu_{i,j+\frac{1}{2},k} \frac{\bar{\varphi}_{i,j+1,k} - \bar{\varphi}_{i,j,k}}{h_y} h_x h_z + q_{i-\frac{1}{2},j-1,k-\frac{1}{2}} \mu_{i,j-\frac{1}{2},k} \frac{\bar{\varphi}_{i,j,k} - \bar{\varphi}_{i,j-1,k}}{h_y} h_x h_z + \\ &+ \left(q_{i-\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2}} - q_{i-\frac{1}{2},j-1,k-\frac{1}{2}} \right) \mu_{i,j,k} \bar{\varphi}'_{y,j,k} h_x h_z. \\ \iiint_{\Omega_{i,j,k}^{1,1,1}} (\gamma \bar{\varphi}'_z)'_z d\omega &\cong q_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k} \gamma_{i,j,k+\frac{1}{2}} \frac{\bar{\varphi}_{i,j,k+1} - \bar{\varphi}_{i,j,k}}{h_z} h_y h_x + q_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k-1} \gamma_{i,j,k-\frac{1}{2}} \frac{\bar{\varphi}_{i,j,k} - \bar{\varphi}_{i,j,k-1}}{h_z} h_y h_x + \\ &+ \left(q_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k} - q_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k-1} \right) \gamma_{i,j,k} \bar{\varphi}'_{z,j,k} h_y h_x. \end{aligned}$$

Найдем аппроксимацию уравнения Пуассона для давления. Для этого проинтегрируем его по заполненной части ячейки:

$$\iiint_{\Omega_{i,j,k}^{1,1,1}} \tau \cdot (p''_{x^2} + p''_{y^2} + p''_{z^2}) d\omega = \iiint_{\Omega_{i,j,k}^{1,1,1}} \left(\rho'_i + (\rho \tilde{u})'_x + (\rho \tilde{v})'_y + (\rho \tilde{w})'_z \right) d\omega.$$

Воспользуемся свойством линейности интеграла:

$$\begin{aligned} \tau \cdot \iiint_{\Omega_{i,j,k}^{1,1,1}} p''_{x^2} d\omega + \tau \cdot \iiint_{\Omega_{i,j,k}^{1,1,1}} p''_{y^2} d\omega + \tau \cdot \iiint_{\Omega_{i,j,k}^{1,1,1}} p''_{z^2} d\omega = \\ = \iiint_{\Omega_{i,j,k}^{1,1,1}} \rho'_i d\omega + \iiint_{\Omega_{i,j,k}^{1,1,1}} (\rho \tilde{u})'_x d\omega + \iiint_{\Omega_{i,j,k}^{1,1,1}} (\rho \tilde{v})'_y d\omega + \iiint_{\Omega_{i,j,k}^{1,1,1}} (\rho \tilde{w})'_z d\omega. \end{aligned}$$

Рассмотрим аппроксимацию каждого слагаемого. Ранее были рассмотрены аппроксимации интегралов, аналогичных первым четырём:

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega_{i,j,k}^{1,1,1}} p''_{x^2} d\omega &\cong q_{i,j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} \mu_{i+\frac{1}{2},j,k} \frac{p_{i+1,j,k} - p_{i,j,k}}{h_x} h_y h_z + q_{i-1,j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} \mu_{i-\frac{1}{2},j,k} \frac{p_{i,j,k} - p_{i-1,j,k}}{h_x} h_y h_z + \\ &+ \left(q_{i-1,j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} - q_{i,j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} \right) p'_{x,j,k} h_y h_z, \\ \iiint_{\Omega_{i,j,k}^{1,1,1}} p''_{y^2} d\omega &\cong q_{i+1,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} \mu_{i+\frac{1}{2},j,k} \frac{p_{i,j+1,k} - p_{i,j,k}}{h_y} h_x h_z + q_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} \mu_{i-\frac{1}{2},j,k} \frac{p_{i,j,k} - p_{i,j-1,k}}{h_y} h_x h_z + \\ &+ \left(q_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} - q_{i+1,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} \right) p'_{y,j,k} h_x h_z, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \iiint_{\Omega_{i,j,k}^{1,1,1}} p'_z d\omega &\cong q_{i,j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} \mu_{i+\frac{1}{2},j,k} \frac{P_{i,j,k+1} - P_{i,j,k}}{h_z} h_y h_x + q_{i-1,j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} \mu_{i-\frac{1}{2},j,k} \frac{P_{i,j,k} - P_{i,j,k-1}}{h_z} h_y h_x + \\
 &+ \left(q_{i-1,j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} - q_{i,j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} \right) p'_{x,j,k} h_y h_x, \\
 \iiint_{\Omega_{i,j,k}^{1,1,1}} \rho'_i d\omega &\cong \frac{\hat{\rho}_{i,j,k} - \rho_{i,j,k}}{\tau} q_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} h_x h_y h_z.
 \end{aligned}$$

Аппроксимация правой части уравнения для расчета давления имеет вид

$$\begin{aligned}
 \iiint_{\Omega_{i,j,k}^{1,1,1}} (\rho \ddot{u})'_x d\omega &\cong q_{i,j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} \frac{(\rho \ddot{u})_{i+1,j,k} - (\rho \ddot{u})_{i,j,k}}{2} h_y h_z + q_{i-1,j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} \frac{(\rho \ddot{u})_{i,j,k} - (\rho \ddot{u})_{i-1,j,k}}{2} h_y h_z, \\
 \iiint_{\Omega_{i,j,k}^{1,1,1}} (\rho \ddot{v})'_y d\omega &\cong q_{i-\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2}} \frac{(\rho \ddot{v})_{i,j+1,k} - (\rho \ddot{v})_{i,j,k}}{2} h_x h_z + q_{i-\frac{1}{2},j-1,k-\frac{1}{2}} \frac{(\rho \ddot{v})_{i,j,k} - (\rho \ddot{v})_{i,j-1,k}}{2} h_x h_z, \\
 \iiint_{\Omega_{i,j,k}^{1,1,1}} (\rho \ddot{w})'_z d\omega &\cong q_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k} \frac{(\rho \ddot{w})_{i,j,k+1} - (\rho \ddot{w})_{i,j,k}}{2} h_y h_x + q_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k-1} \frac{(\rho \ddot{w})_{i,j,k} - (\rho \ddot{w})_{i,j,k-1}}{2} h_y h_x.
 \end{aligned}$$

Аппроксимацию слагаемых в центральных узлах можно получить, положив заполненность равной единице.

Расчет заполненности ячеек. При расчете заполненности будем считать, что колебания плотности достаточно малы и слабо влияют на форму поверхности водоема. Для учета стонно-нагонных явлений можно считать, что свободная поверхность водоема задана уравнением $z = \xi(x, y)$. Зная функцию $\xi(x, y)$, можно найти объем жидкости в ячейках по формуле

$$q_{i,j,k} = \max \left(\int_{y_j}^{y_{j+1}} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{\max(\xi(x,y), z_k)}^{\min(h(x,y), z_{k+1})} dz dx dy, 0 \right). \quad (14)$$

Выведем уравнение для расчета свободной поверхности. Скорость движения свободной поверхности равна

$$w_\xi = \frac{dz}{dt} = \xi'_t + u|_\xi \xi'_x + v|_\xi \xi'_y.$$

В то же время $w|_\xi = w_\xi + \frac{\omega}{\rho_0}$, тогда

$$\xi'_t + u|_\xi \xi'_x + v|_\xi \xi'_y - w|_\xi = -\frac{\omega}{\rho_0}. \quad (15)$$

Аналогично на дне:

$$w_{-h} = \frac{dh}{dt} = w|_{-h} + u|_{-h} h'_x + v|_{-h} h'_y = 0. \quad (16)$$

Проинтегрируем уравнение неразрывности для постоянной плотности по переменной z на интервале $(\xi(x, y); h(x, y))$:

$$\int_{\xi}^h u'_x dz + \int_{\xi}^h v'_y dz + w|_h - w|_{\xi} = 0. \quad (17)$$

Заметим, что имеет место формула дифференцирования интеграла:

$$\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f'_y(x, y) dx = \frac{d}{dy} \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y) dx - f(\psi(y), y) \cdot \psi'(y) + f(\varphi(y), y) \cdot \varphi'(y). \quad (18)$$

Обозначим

$$U = \int_{\xi}^h u dz, \quad V = \int_{\xi}^h v dz, \quad (19)$$

тогда уравнение (17) примет вид

$$(h + \xi)'_t + U'_x + V'_y = -\xi'_t - u|_{\xi} \xi'_x - v|_{\xi} \xi'_y + w|_{\xi} + w|_h + u|_h h'_x + v|_h h'_y. \quad (20)$$

С учетом соотношений (15), (16) имеем:

$$\xi'_t + U'_x + V'_y = \frac{\omega}{\rho_0}. \quad (21)$$

Проинтегрируем теперь выражения (13) с учетом того, что $p|_h = \rho g(h + \xi)$, $p|_{\xi} = 0$:

$$\begin{aligned} \hat{U} - \tilde{U} &= -\frac{\tau}{\rho} \int_{\xi}^h p'_x dz = -\tau H g (h + \xi)'_x, \\ \hat{V} - \tilde{V} &= -\frac{\tau}{\rho} \int_{\xi}^h p'_y dz = -\tau H g (h + \xi)'_y. \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в (21), находим:

$$\xi'_t - \tau g \left(H (h + \xi)'_x \right)'_x - \tau g \left(H (h + \xi)'_y \right)'_y = \frac{\omega}{\rho_0} + \tilde{U}'_x + \tilde{V}'_y. \quad (22)$$

После того, как найдена сеточная функция возвышения уровня на новом временном слое, можно пересчитать заполненность ячеек. Аппроксимируем в каждой приповерхностной ячейке возвышение уровня кусочно-линейной функцией и найдем заполненность по формуле (14), тогда после интегрирования получим:

$$q_{i,j,k} = h_x h_y \frac{\xi_{i,j} + \xi_{i+1,j} + \xi_{i,j+1} + \xi_{i+1,j+1}}{4}. \quad (23)$$

Итак, на каждом временном шаге алгоритма расчета модели производятся следующие действия:

1. Численно решаются уравнения диффузии-конвекции (11) и находятся промежуточные значения скоростей.
2. Решается уравнение (12) для нахождения поля давления.
3. Производится коррекция поля скорости согласно соотношениям (13).
4. По найденному полю скорости рассчитываются поля температуры и соли на новом временном слое.

5. Вычисляются интегралы скоростей на промежуточном временном слое (19) и из уравнения (22) находится функция возвышения уровня на новом слое.
6. Исходя из функции возвышения уровня по формуле (23) рассчитываются заполненности ячеек.

Такая техника для нахождения заполненности ячеек требует решения дополнительного уравнения для расчета функции возвышения уровня. Вместо этого может быть предложен способ расчета заполненности по полю давления. Предполагается, что степень заполненности определяется давлением столба жидкости внутри данной ячейки. Если среднее давление в узлах, которые относятся к вершинам рассматриваемой ячейки, больше давления столба жидкости внутри ячейки, то ячейка считается заполненной полностью. В общем случае используется следующая формула для расчета заполненности ячейки:

$$q_{i,j,k} = \frac{P_{i-1,j,k}^+ + P_{i,j-1,k}^+ + P_{i,j,k-1}^+ + P_{i-1,j-1,k}^+ + P_{i-1,j,k-1}^+ + P_{i,j-1,k-1}^+ + P_{i-1,j,k-1}^+ + P_{i-1,j-1,k-1}^+}{8g\rho h_y},$$

где $P_{i,j,k}^+ = P_{i,j,k} \cdot \eta(P_{i,j,k})$, η – функция Хэвисайда.

Численные эксперименты. Проверка корректности построенной модели производилась на распространенной модельной задаче. Область расчета представляет собой параллелепипед, вдоль одной из границ которого течет жидкость. Для расчета свободной поверхности был применен описанный выше эмпирический метод. Полученные результаты представлены на рис. 2,3 и согласуются с реальным физическим процессом.



Рис. 2. Трехмерная визуализация функции возвышения уровня

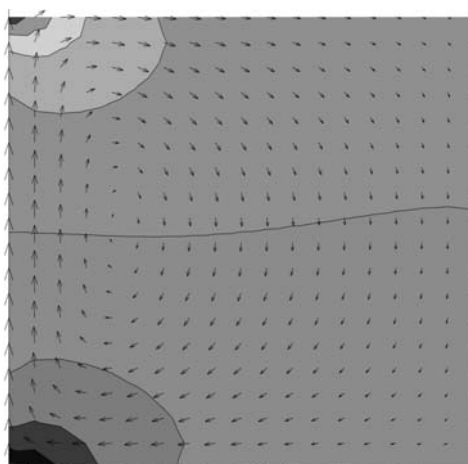


Рис. 3. Решение модельной задачи. Поле скорости в приповерхностном слое и функция возвышение уровня (вид сверху)

Заключение. В работе построена непрерывная модель гидродинамики и переноса тепла и солей в мелководных водоемах. Для учета формы свободной поверхности вводится функция заполненности ячеек сетки. Для расчета заполненности предложены две модели: на основе функции свободной поверхности и на основе поля давления. Метод на основе функции свободной поверхности требует, чтобы область расчета была простой по оси аппликата, в то время как эвристический метод не налагает никаких ограничений. Рассматривается оригинальный метод аппроксимации непрерывных уравнений, позволяющий учесть частичную заполненность ячеек расчетной сетки. Такой подход имеет ряд преимуществ по сравнению с σ -сетками [7]. Во-первых, предлагаемый в статье метод позволяет проводить аппроксимацию на структурированных сетках, для которых расчетные узлы расположены в центрах контрольного объема, что позволяет получить более точную аппроксимацию. Во-вторых, данный подход более прост в реализации по сравнению с σ -сетками при тех же условиях применимости, что позволяет строить более сложные модели. Проверка адекватности построенной модели проводилась на модельной задаче. Результаты численного моделирования являются физическими и соответствуют ожидаемым.

Автор выражает благодарность А.И. Сухинову и А.Е. Чистякову за полезное обсуждение материалов статьи.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Сухинов А.И., Чистяков А.Е. Двумерная модель турбулентного движения водной среды в Миусском лимане. Математическое моделирование и информационные технологии / Юж.-Рос. гос. техн. ун-т (НПИ). г. Новочеркасск: Ред. журн. «Изв. вузов. Электромеханика», 2007. (Приложение к журналу). – С. 43-47.
2. Чистяков А.Е. Трехмерная модель движения водной среды в Азовском море с учетом транспорта солей и тепла // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2009. – № 8 (97). – С. 75-82.
3. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Алексеенко Е.В. Численная реализация трехмерной модели гидродинамики для мелководных водоемов на супервычислительной системе // Матем. моделирование. – 2011. – № 23. – С. 3-21.
4. Никитина А.В. Численное решение задачи динамики токсичных водорослей в Таганрогском заливе // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2010. – № 6 (107). – С. 113-117.
5. Sukhinov A.I. Reconstruction of 2001 Ecological Disaster in the Azov Sea on the Basis of Precise Hydrophysics Models.// Parallel Computational Fluid Dynamics, Mutidisciplinary Applications, Procoeedings of Parallel CFD 2004 Conference, Las Palmas de Gran Canaria, Spain, ELSEVIER, Amsterdam–Berlin–London–New York–Tokyo, 2005. – P. 231-238.
6. Шишени А.В. Сухинов А.И. Моделирование процессов переноса тепла и солёности в мелководных водоёмах на примере Азовского моря. КРЭС, 2008. – С. 276-277.
7. Ezer T., Mellor G.L. Sensitivity studies with the North Atlantic sigma coordinate Princeton Ocean Model. Dynamics of Atmospheres and Oceans. – 2000. – Vol. 32. – С. 155-208.

Статью рекомендовал к опубликованию к.т.н., доцент В.Е. Мольдерф.

Шишени Александр Владимирович

Технологический институт федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Южный федеральный университет» в г. Таганроге.

E-mail: primat-55-alex@yandex.ru.

347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44.

Тел.: +7928322282; +79081761837.

Кафедра высшей математики; аспирант.

Shishenya Alexander Vladimirovich

Taganrog Institute of Technology – Federal State-Owned Autonomy Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”.

E-mail: primat-55-alex@yandex.ru.

44, Nekrasovskiy, Taganrog, 347928, Russia.

Phone: +7928322282; +79081761837.

The Department of Higher Mathematics; Postgraduate Student.

УДК 519.6

А.Е. Чистяков, Е.А. Костырко

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЕФОРМАЦИИ СТЕРЖНЯ

Работа посвящена актуальной задаче математической физики – разработке и исследованию алгоритмов решения задач теории упругости. Для описания упругих свойств балки используется балочная теория Эйлера. Задача решалась двумя способами: методом разложения в ряд Фурье было получено аналитическое решение задачи, при помощи конечно-разностных аппроксимаций получено численное решение. Выполнено аналитическое исследование предложенной дискретной модели. Получено количественное совпадение результатов численных и аналитических расчетов деформации балки в случае стационарного по времени давления (распределенной нагрузки).

Уравнение балки Эйлера; ряд Фурье; метод баланса; численный эксперимент.

A.E. Chistyakov, E.A. Kostyrko

MATHEMATICAL MODELLING OF DEFORMATION OF THE BAR

This work deals with the development and study of algorithms for solving problems of elasticity theory that is an actual problem of mathematical physics. Euler's theory about beam is used for the description of elastic properties of a beam. The problem is solved in two ways: the decomposition method on Fourier series had been received the analytical decision of a problem; the numerical decision is received with the help finite-difference approximations. Analytical research of the proposed discrete model was completed in this work. Quantitative coincidence of results of numerical and analytical calculations of deformation of a beam is received in case of stationary pressure on time (the distributed loading).

The equation of a beam of Euler; Fourier series; the balance method; a numerical experiment.

Введение. Рассматривается балка с незакрепленными концами. В момент времени $t = 0$ на балку начинает действовать неравномерно распределенная нагрузка P , под действием которой она деформируется. Подобные задачи возникают при изучении деформации льда. Информация о максимальной допустимой распределенной нагрузке используется для выявления возможности ледяных переправ через реки и водохранилища, спасения людей при отколах льда, для изучения свойств льда при выборе платформы для северных полярных станций и т.д.

Постановка задачи. Пусть на поверхности канала находится в непрерывном контакте с жидкостью ледяной стержень (пластина). Канал заполнен идеальной несжимаемой жидкостью. Вычисление максимальной допустимой распределенной нагрузки стержня решается в линейной постановке. Колебание стержня описывается уравнением балки Эйлера [1]:

$$\rho h \frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2} + EI \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} = P(x), \quad (1)$$