

Сухинов Александр Иванович

Технологический институт федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Южный федеральный университет» в г. Таганроге.

E-mail: sukhinov@gmail.ru.

347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44.

Тел.: 88634310599.

Руководитель ТТИ ЮФУ; д.ф.-м.н.; профессор.

Никитина Алла Валерьевна

E-mail: nikitina.vm@gmail.com.

г. Таганрог, ул. Чехова, 38, кв. 3.

Тел.: +79515168538.

Кафедра высшей математики; заведующий кафедрой; к.ф.-м.н.; доцент.

Sukhinov Alexander Ivanovich

Taganrog Institute of Technology – Federal State-Owned Autonomy Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”.

E-mail: sukhinov@gmail.ru

44, Nekrasovskiy, Taganrog, 347928, Russia.

Phone: +78634310599.

The Head of TIT SFedU; Dr. of Phys.-Math. Sc.; Professor.

Nikitina Alla Valer'evna

E-mail: nikitina.vm@gmail.com.

Phone: +79515168538.

38, Chekhov Street, Apt. 3, Taganrog, Russia.

The Department of Higher Mathematics; the Head of Department; Cand. of Phys.-Math. Sc.; Associate Professor.

УДК 519.86

А.И. Сухинов, А.Е. Чистяков, Д.С. Хачунц

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ
МНОГОКОМПОНЕНТНОЙ ВОЗДУШНОЙ СРЕДЫ И ТРАНСПОРТА
ЗАГРЯЗНЯЮЩИХ ВЕЩЕСТВ**

Рассматривается математическое моделирование движения многокомпонентной воздушной среды и распространения загрязняющих веществ. Актуальными проблемами современной физики атмосферы являются математическое моделирование изменчивости газового и аэрозольного состава атмосферы, а также оценка влияния атмосферных примесей на окружающую среду. В работе представлена математическая модель переноса загрязняющих веществ в атмосфере, которая учитывает такие факторы, как переход воды из жидкого в газообразное состояние, турбулентный обмен, осаждение вещества, теплообмен между жидкими и газообразными состояниями, а также переменную плотность и температуру.

Многокомпонентная воздушная среда; конденсация; загрязняющие вещества; турбулентный обмен.

A.I. Sukhinov, A.E. Chistyakov, D.S. Khachunts

**MATHEMATIC MODELLING OF MULTICOMPONENT AIR MOTION
AND POLLUTANTS TRANSPORTATION**

The mathematic modeling of multicomponent air motion and pollutants spreading is described in the paper. The main problems of modern aerophysics are the mathematic modeling of gas and aerosol atmospheric composition variability and the estimation of air pollutants influence

on the environment. The mathematical model of pollutant transport in the atmosphere, which takes into account factors such as the passage of water from liquid to gaseous state, turbulent exchange, the deposition material, the heat exchange between liquid and gaseous states and variable density and temperature, presented in this work.

Multicomponent air; condensation; pollutants; turbulent exchange.

Введение. Атмосфера представляет собой сложную динамическую систему, в которой протекают различные динамические и физико-химические процессы. Эти процессы обусловлены как атмосферной циркуляцией, так и трансформацией газовых и аэрозольных примесей.

Известно, что атмосферные процессы – это суперпозиция колебаний различных пространственно-временных масштабов. Для задач физики атмосферы характерен широкий спектр атмосферных движений: от микромасштабных (наименьший масштаб – тепловое движение молекул) до макромасштабных (наибольший масштаб имеет зональный поток). Пространственная изменчивость газовых примесей и аэрозолей характеризуется широким разнообразием масштабов.

Основные уравнения. Пусть расчетная область содержит источники тепла и загрязняющих веществ, учтем также наличие постоянных воздушных потоков.

Многие процессы трансформации газовых примесей и аэрозолей протекают в турбулентной атмосфере. Поэтому, чтобы воспроизвести пространственно-временную изменчивость турбулентных характеристик атмосферы, решение задачи о распространении примесей необходимо проводить совместно с гидродинамическими моделями. Сформулируем уравнения гидродинамической модели атмосферных процессов.

Уравнение Навье–Стокса. Как известно, применяя закон сохранения массы к жидкости, протекающей через фиксированный бесконечно малый контрольный объем, получим уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_j \frac{\partial (\rho v_j)}{\partial x_j} = 0, \quad (1)$$

где ρ – плотность жидкости, V – вектор скорости. Аналогичным образом из второго закона Ньютона следует уравнение для количества движения

$$\rho \frac{dv}{dt} = \rho g + \frac{\partial}{\partial x_i} \Pi_{ij}, \quad (2)$$

где g – ускорение свободного падения, Π_{ij} – тензор напряжений.

Для всех газов, которые можно считать сплошной средой, а также для большинства жидкостей замечено, что напряжение в некоторой точке линейно зависит от скорости деформации жидкости. Такая жидкость называется ньютоновской. При этом допущении можно вывести общий закон деформации, который связывает тензор напряжений с давлением и компонентами скорости. В индексных обозначениях он записывается в виде

$$\Pi_{ij} = -p\delta_{ij} + \sum_{i,j} \delta_{ij}\mu \frac{\partial v_i}{\partial x_j}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (3)$$

где δ_{ij} – символ Кронекера; μ – коэффициент турбулентного обмена.

Теперь, подставляя (3) в (2), получим известное уравнение Навье–Стокса

$$\frac{dv_i}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu_j \frac{\partial}{\partial x_j} v_i \right) - g_i, \quad (4)$$

где v_i – проекция компонент вектора скорости на ось x_i , $i=1,2,3$.

При соприкосновении поверхности жидкости с ее паром при данной температуре устанавливается определенное для каждой жидкости равновесное давление пара, называемое давлением насыщенного пара. Даже бесконечно малое увеличение давления пара над поверхностью жидкости приводит к конденсации пара на этой поверхности, а бесконечно малое уменьшение давления вызывает испарение жидкости с ее поверхности.

Для описания зависимости давления пара от температуры воспользуемся формулой Менделеева–Клапейрона

$$pV = \sum_i v_i RT, \text{ или } \rho_i = \frac{M_i p}{RT}, \quad (5)$$

где $V_i = \frac{m_i}{M_i}$, m – масса, M – молярная масса, R – универсальная газовая постоянная, V – объем, T – температура.

Как известно, плотность можно записать в виде

$$\rho = \frac{m}{V} = \sum_i \frac{m_i}{V} = \sum_i \frac{V_i}{V} \rho_i = \sum_i \varphi_i \rho_i, \quad i=0,1,2,3,4, \quad (6)$$

где φ_i – объемные доли i -й фазы ($i=0$ – воздух, 1 – вода в газообразном состоянии, 2 – газ на источнике, 3 – вода в жидком состоянии, 4 – сажа); ρ_i – плотность.

Подставив в (5) выражение (6), получим уравнение состояния

$$\rho = \frac{p}{RT} \sum_{i=0}^2 \varphi_i M_i + \sum_{i=3}^4 \varphi_i \rho_i. \quad (7)$$

Уравнение транспорта загрязняющих веществ. Смешение небольших движущихся вихрей с окружающей средой сопровождается переносом вещества. Уравнение транспорта примесей можно представить в следующем виде:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + u \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + v \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + (w - w_0) \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} = \sum_j \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu_j \frac{\partial}{\partial x_j} \varphi \right) \right) + I$$

или

$$\frac{d\varphi}{dt} - w_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} = \sum_j \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu_j \frac{\partial}{\partial x_j} \varphi \right) \right) + I,$$

где I – функция, описывающая распределение и мощность источников примесей, w_0 – скорость осаждения.

Принимая во внимание переход воды из жидкого состояния в газообразное и обратно, а также тот факт, что в процессе транспорта примесей взвешенные частицы осаждаются, запишем уравнения транспорта загрязняющих веществ в многокомпонентной воздушной среде

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu_j \frac{\partial}{\partial x_j} \varphi_1 \right) + \frac{v_g}{\rho},$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\varphi_2}{dt} &= \sum_j \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu_j \frac{\partial}{\partial x_j} \varphi_2 \right) \right), \\
\frac{d\varphi_3}{dt} - w_0 \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_3} &= \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu_j \frac{\partial}{\partial x_j} \varphi_3 \right) - \frac{v_g}{\rho}, \\
\frac{d\varphi_4}{dt} - w_0 \frac{\partial \varphi_4}{\partial x_3} &= \sum_j \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu_j \frac{\partial}{\partial x_j} \varphi_4 \right) \right), \\
\sum_{i=0}^4 \varphi_i &= 1,
\end{aligned} \tag{8}$$

где v_g – массовая скорость испарения, ρ – плотность.

Для определения скорости загрязняющих веществ воспользуемся силами трения и гравитации, которые действуют на них, т.е.

$$kw_0^2 - mg = 0 \text{ или } w_0 = \sqrt{\frac{g}{k} m}.$$

В данной формуле пренебрегаем ускорением движения взвешенных частиц, так как оно мало по сравнению с ускорением свободного падения.

Объемные доли и масса примесей известны

$$\varphi_3 = \frac{V_3}{V}, \quad \varphi_4 = \frac{V_4}{V};$$

$$m = m_3 + m_4, \tag{9}$$

где

$$m_3 = \rho_3 V_3, \quad m_4 = \rho_4 V_4. \tag{10}$$

Разделив φ_4 на φ_3 и выражая V_3 , получим:

$$V_3 = \frac{V_4 \varphi_3}{\varphi_4}. \tag{11}$$

Подставив выражение (11) в (9) и воспользовавшись (10), получим уравнение для m :

$$m = \rho_3 \frac{V_4 \varphi_3}{\varphi_4} + \rho_4 V_4 = m_4 \left(\frac{\rho_3 \varphi_3}{\rho_4 \varphi_4} + 1 \right). \tag{12}$$

Итак, скорость осаждения пара определяется следующей зависимостью:

$$w_0 = \sqrt{\frac{g}{k} m_4 \left(\frac{\rho_3 \varphi_3}{\rho_4 \varphi_4} + 1 \right)}. \tag{13}$$

Уравнения притока тепла (уравнения теплопроводности газа и конденсата). Дополним систему уравнением притока тепла, которое описывает процессы транспорта тепла и теплообмен. Данное уравнение можно записать в виде

$$\frac{dQ}{dt} - w_0 \frac{\partial Q}{\partial x_3} = \sum_j \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu_j \frac{\partial Q}{\partial x_j} \right) \right) + \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + I,$$

где Q – тепловая энергия, λ – коэффициент теплопроводности, I – функция, описывающая распределение и мощность источников тепла, W_0 – скорость осаждения взвешенных частиц.

В случае многокомпонентности рассматриваемых сред для тепловой энергии и коэффициента теплопроводности справедливы формулы

$$Q = \sum_i Q_i \varphi_i = \sum_i \rho_i c_i \varphi_i T, \quad \lambda = \sum_i \lambda_i \varphi_i.$$

В зависимости от рассматриваемой задачи уравнение притока тепла представляют в различных формах. Для нашей задачи необходимы два уравнения – это уравнение теплопроводности газа, которое может быть представлено в виде

$$\left(\sum_{i=0}^2 \rho_i c_{pi} \varphi_i \right) \frac{dT}{dt} = \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left(\sum_{i=0}^2 (\rho_i c_{pi} \mu_j + \lambda_i) \varphi_i \right) \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + q_2 v_g - \alpha_v (T - T_s), \quad (14)$$

где ρ , c_p – плотность и теплоемкость газовой фазы; T , T_s – температура газовой и конденсированной фаз; q – удельная теплота парообразования; α_v – коэффициент теплопередачи; v_g – массовая скорость испарения, и уравнение теплопроводности для конденсата, которое имеет следующий вид:

$$\left(\sum_{i=3}^4 \rho_i c_{pi} \varphi_i \right) \left(\frac{dT_s}{dt} - w_0 \frac{\partial T}{\partial x_3} \right) = \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left(\sum_{i=3}^4 \rho_i c_{pi} \varphi_i \mu_j \right) \frac{\partial T_s}{\partial x_j} \right) + \alpha_v (T - T_s), \quad (15)$$

где c_{pi} , ρ_i , φ_i – удельные теплоемкости, истинные плотности и объемные доли i -й фазы; T , T_s – температура газовой и конденсированной фаз.

Модель турбулентности. Движение большего числа мелких частиц сопровождается турбулентной диффузией, т.е. в процессе мелкомасштабного турбулентного перемешивания наблюдается перенос таких субстанций, как водяной пар, тепло, примеси и, до некоторой степени, количества движения, из областей с избытком этих свойств в области с недостатком тех же самых свойств. Турбулентная диффузия играет важную роль, поскольку весь водяной пар, большая часть тепла и различные примеси поступают в тропосферу от земной поверхности под влиянием турбулентности. Для ее описания воспользуемся моделью Абрамовича–Секундова, учитывающую такие важные факторы, как предыстория потока, конвективный и диффузионный перенос турбулентных пульсаций:

$$\frac{\partial v_{турб}}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 v_i \frac{\partial v_{турб}}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left((v_{мол} + kv_{турб}) \frac{\partial v_{турб}}{\partial x_i} \right) + v_{турб} f \left(\frac{v_{турб}}{8v_{мол}} \right) D - \gamma S,$$

$$S = \frac{v_{турб} (v_{мол} + \beta v_{турб})}{L_{\min}^2}, \quad (16)$$

$$D = \sqrt{\sum_{i=1}^3 \sum_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)},$$

$$f(z) = 0,2 \frac{z^2 + 1,47z + 0,2}{z^2 - 1,47z + 1},$$

где $\kappa = 2,0$, $\gamma = 50,0$, $\beta = 0,06$, L_{\min} – кратчайшее расстояние до твердой стенки; $\nu_{\text{мол}}$ – молекулярная вязкость, а $\nu_{\text{турб}}$ – турбулентная вязкость.

Выводы. В работе разработана математическая модель переноса загрязняющих веществ в атмосфере, которая учитывает такие факторы, как переход воды из жидкого в газообразное состояние, турбулентный обмен, осаждение вещества, теплообмен между жидкими и газообразными состояниями и переменную плотность и температуру.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Гадельшин В.К., Любимищенко Д.С., Сухинов А.И.* Математическое моделирование поля ветровых течений и распространения загрязняющих примесей в условиях городского рельефа местности с учетом k - ϵ -модели турбулентности // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2010. – № 6 (107). – С. 49-66.
2. *Алоян А.Е.* Динамика и кинетика газовых примесей и аэрозолей в атмосфере: Курс лекций. – М.: ИВМ РАН, 2002. – 201 с.
3. *Володин Е.М.* Математическое моделирование общей циркуляции атмосферы: Курс лекций. – М.: ИВМ РАН, 2007. – 87 с.
4. *Чистяков А.Е.* Трехмерная модель движения водной среды в Азовском море с учетом транспорта солей и тепла // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2009. – № 8 (97). – С. 75-82.
5. *Васильев В.С.* Аппроксимации в системах уравнений мелкой воды на криволинейных системах // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2010. – № 6 (107). – С. 77-84.
6. *Редин А.А.* Математическая модель электродинамики атмосферного приземного слоя с учетом одного- и двукратного заряженного аэрозоля // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2010. – № 6 (107). – С. 84-89.

Статью рекомендовал к опубликованию д.ф.-м.н., профессор А.А. Илюхин.

Сухинов Александр Иванович

Технологический институт федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Южный федеральный университет» в г. Таганроге.

E-mail: sukhinov@gmail.ru.

347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44.

Тел.: 88634310599.

Руководитель ТТИ ЮФУ; д.ф.-м.н.; профессор.

Чистяков Александр Евгеньевич

E-mail: cheese_05@mail.ru.

Тел.: 88634371606.

Кафедра высшей математики; ассистент.

Хачунц Дианна Самвеловна

E-mail: diana-hachunts@mail.ru.

Тел.: +79287786737.

Аспирант.

Sukhinov Alexander Ivanovich

Taganrog Institute of Technology – Federal State-Owned Autonomy Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”.

E-mail: sukhinov@gmail.ru.

44, Nekrasovskiy, Taganrog, 347928, Russia.

Phone: +78634310599.

The Head of TIT SFedU; Dr. of Phis.-Math. Sc.; Professor.

Chistyakov Alexander Evgenjevich

E-mail: cheese_05@mail.ru.

Phone: +78634371606.

The Department of Higher Mathematics; Assistant.

Khachunts Dianna Samvelovna

E-mail: diana-hachunts@mail.ru.

Phone: +79287786737.

Postgraduate Student.

УДК 681.3.06:502.504

В.К. Гадельшин, Ю.А. Мещерякова, Т.И. Погорелова

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ КОНЦЕНТРАЦИЙ ВРЕДНЫХ ВЕЩЕСТВ В ВОЗДУШНОЙ СРЕДЕ ПО СТАТИСТИЧЕСКИМ ДАННЫМ

Рассматривается задача контроля и оперативного прогнозирования состояния воздушной среды на основе статистических данных по выбросам загрязняющих веществ автотранспортом в экологически проблемных местах г. Таганрога. Предлагается программный комплекс, включающий базу данных измерений и программное обеспечение, осуществляющий группировку данных на основе алгоритмов кластеризации, реализующий процедуру оперативного прогнозирования концентрации вредных веществ в атмосфере при заданных параметрах методами распознавания образов. Приводятся примеры контрольных расчетов.

Прогнозирование; кластеризация; автомобильные выбросы; загрязнение атмосферы; распознавание образов.

V.K. Gadelshin, J.A. Meshcheryakova, T.I. Pogorelova

THE FORECASTING PROCEDURE THE CONCENTRATION OF HARMFUL SUBSTANCES INTO THE ATMOSPHERE OF STATISTICAL DATA

This is a study of air pollution harmful emissions from vehicles. It addresses the problem of organizing the procedure of forecasting the use of an environmental database, formed according to the results of field experiments. In the grouping of data carried out on the basis of algorithms for clustering, using the method of pattern recognition is implemented forecasting procedure the concentration of harmful substances into the atmosphere during the given parameters, the forecast is implemented in a software package, generate verification program, performed control calculations.

Forecasting procedure; clustering; emissions from vehicles; air pollution; of pattern recognition.

Одной из главных экологических проблем в городах является высокий уровень загрязнения воздушной среды. Основные источники выбросов вредных, загрязняющих атмосферу веществ – автотранспорт и промышленные предприятия. Например, в 2009 г. на долю автотранспорта в г. Таганроге приходилось 79,1 % от общего объема выбросов загрязняющих веществ, а по данным УГИБДД ГУВД по Ростовской области количество автомобилей в Таганроге с 35 тысяч в 2001 г. к 2010 г. увеличилось до 61 тысячи. Вблизи транспортных магистралей с интенсивным движением при неблагоприятных метеоусловиях и заторах содержание вредных примесей в воздухе значительно превышает допустимый уровень.

Сложность проведения регулярных трудоемких натурных экспериментов для оперативной и долговременной оценки и прогнозирования состояния воздушной