2. *Никитина А.В.* Численное решение задачи динамики токсичных водорослей в Таганрогском заливе // Известия ЮФУ. Технические науки. 2010. – № 6 (107). – С. 113-116.
3. *Матишов Г.Г., Фуштей Т.В.* К проблеме вредоносных «цветений воды» в Азовском море //Электронный журнал «Исследовано в России». – 2003. – С. 213-225.
4. *Ластивка Т.В.* Сезонная динамика фитопланктона. Современное развитие эстуарных экосистем на примере Азовского моря. – Апатиты: Изд-во КНЦ РАН,1999. – С. 73-95.
5. *Роговая О.Г.* Экологическое моделирование. – СПб.: ООО «Книжный мир», 2007. – 104 с.
6. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. – М.: Наука, 1977. – 656 с.

Статью рекомендовал к опубликованию д.ф.-м.н., профессор А.И. Жорник.

Никитина Алла Валерьевна – Технологический институт федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Южный федеральный университет» в г. Таганроге; e-mail: nikitina.vm@gmail.com; 347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44; тел.: 88634371606; кафедра высшей математики; зав. кафедрой; доцент.

Третьякова Мария Валерьевна – студентка.

Nikitina Alla Valerievna – Taganrog Institute of Technology – Federal State-Owned Autonomy Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”; e-mail: nikitina.vm@gmail.com; 44, Nekrasovsky, Taganrog 347928, Russia; phone: +78634371606; the department of higher mathematics; head of department; associate professor.

Tretyakova Maria Valerievna – student.

УДК 519.85:004.421

А.П. Попов

ПОИСК РЕШЕНИЯ КАК ПУАССОНОВСКИЙ ПРОЦЕСС

Обсуждаются условия, которые должны удовлетворяться для того, чтобы поиск решения тестовых заданий можно было рассматривать как однородный во времени (пуассоновский) стохастический процесс. Тщательное изучение эмпирических распределений времени, необходимого для поиска верных ответов на тестовые задания, позволяют сделать заключение о том, что все эти эмпирические распределения принадлежат к хорошо известному классу гамма распределений. Плотность гамма распределения зависит от двух параметров: в рамках модели безразмерный параметр α интерпретируется как трудность тестового задания, а параметр λ, который имеет размерность обратного времени, ассоциируется с уровнем подготовленности испытуемого.

Время поиска решения тестовых заданий; однородный во времени процесс; сравнение эмпирических распределений с теоретическими зависимостями.

A.P. Popov

SEARCH OF SOLUTION AS POISSON’S PROCESS

There are discussed conditions which must be satisfied for one can consider the search of test tasks solutions as time homogenous (Poisson’s) stochastic process. Careful studying of empirical distributions of times required for searching of true answers on test tasks allows making conclusion that all these empirical distributions are possessed to well known class of gamma distributions. Density of gamma distributions depends on two parameters: in framework of model dimensionless parameter α is interpreted difficulties of test task, and parameter λ, which has a dimension of inverse time, is associated with level of training of participant of trial.

Times of search of test tasks solutions; time homogenous process; comparison of empirical distributions with theoretical dependences.

Введение. В работе [1] была предложена модель тестирования, основанная на предположении, что поиск решения тесовых заданий является однородным во времени (пуассоновским) стохастическим процессом, а распределение времени поиска решения тестовых заданий зависит всего от двух параметров. Безразмерный параметр α интерпретируется как трудность тестового задания, а имеющий размерность обратного времени параметр λ ассоциируется с уровнем подготовленности испытуемого.

Краткая теория. В рамках модели принято допущение, что время поиска верного решения тестового задания является случайной величиной, подчиняющейся гамма-распределению [4–5]:

$$f(\alpha,\lambda,t)=\frac{(\lambda t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}e^{-\lambda t}\lambda\,. \qquad (1)$$

Прямая проверка показывает, что при фиксированном значении параметра λ свертка двух гамма распределений вновь является гамма распределением:

$$\int_0^\infty f(\alpha_1,\lambda,t-t')f(\alpha_2,\lambda,t')dt'=f(\alpha_1+\alpha_2,\lambda,t), \qquad (2)$$

что согласуется с принятым предположением об однородности во времени процесса поиска решения тестовых заданий.

Характеристическая функция гамма-распределения [4–5]:

$$\varphi(\alpha,\lambda,\xi)=\int_0^\infty f(\alpha_1,\lambda,t)\exp(i\xi t)dt=\left(1-i\frac{\xi}{\lambda}\right)^{-\alpha} \qquad (3)$$

удовлетворяет функциональному уравнению:

$$\varphi(\alpha_1,\lambda,\xi)\varphi(\alpha_2,\lambda,\xi)=\varphi(\alpha_1+\alpha_2,\lambda,\xi). \qquad (4)$$

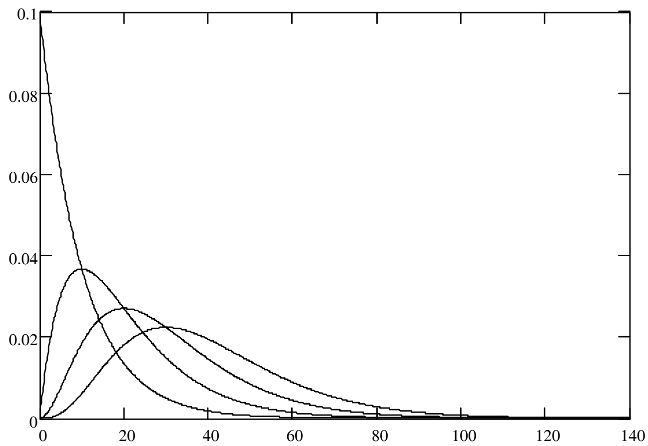


Рис. 1. Плотность гамма-распределения для значений α = 1, 2, 3, 4 при фиксированном значении λ = 0,1 $с^{-1}$ (время указано в секундах)

При α > 1 зависимость плотности гамма-распределения от времени имеет максимум, причем мода распределения равна:

$$t_o=\frac{\alpha-1}{\lambda}\,. \qquad (5)$$

Математическое ожидание и среднеквадратичное отклонение гамма-распределения равны [5]:

$$\langle t \rangle = \frac{\alpha}{\lambda} \quad \sigma(t) = \frac{\sqrt{\alpha}}{\lambda}. \tag{6}$$

Используя (6), можно связать трудность тестового задания с математическим ожиданием и среднеквадратичным отклонением времени поиска решения задания:

$$\alpha = \left(\frac{\langle t \rangle}{\sigma(t)} \right)^2. \tag{7}$$

Функциональному уравнению (4), которое, как и уравнение (2), выполняется для любого пуассоновского процесса, удовлетворяет не только характеристическая функция (3), но и любая функция вида

$$\varphi(\alpha, \lambda, \xi) = \left(g\left(\frac{\xi}{\lambda} \right) \right)^{\alpha}. \tag{8}$$

Заданная на вещественной числовой оси функция g(ξ) должна быть непрерывной и положительно определенной, и удовлетворять условию нормировки g(0) = 1. Эти достаточно слабые ограничения являются следствием известной теоремы Бохнера–Хинчина [5]. Таким образом, однородность во времени процесса поиска решения не определяет однозначно распределение времени поиска решения тестовых заданий. Предпочтение, отданное гамма-распределению, на эвристическом уровне можно объяснить соображениями простоты, но на самом деле этот выбор требует эмпирического обоснования.

Процедура обработки данных. Созданная в отделе контроля качества образования система компьютерного тестирования АЛЬФА фиксирует не только правильность решения тестовых заданий, но и время, затраченное на их решение. После завершения каждой сессии компьютерного тестирования формируются два массива, содержащих правильность и время решения тестовых заданий:

$$\chi_{i,j} \quad i = 1,2,...n \quad j = 1,2,...N, \tag{8}$$

$$t_{i,j} \quad i = 1,2,...n \quad j = 1,2,...N, \tag{9}$$

где n – число заданий в индивидуальных тестах, N – число студентов, принявших участие в сессии тестирования.

Входящий в систему компьютерного тестирования АЛЬФА модуль обработки использует процедуру, основанную на принципе максимального правдоподобия. В данном случае логарифмическая функция правдоподобия равна

$$L(\alpha, \lambda, t) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{N} \chi_{i,j} \ln\left(f\left(\alpha_i, \lambda_j, t_{i,j} \right) \right). \tag{10}$$

Необходимые условия максимума функции (10) приводят к системе нормальных уравнений правдоподобия:

$$\psi(\alpha_i) = \frac{1}{N_i} \sum_{j=1}^{N} \chi_{i,j} \ln\left(\lambda_j t_{i,j} \right) \quad i = 1, 2, ...n, \tag{11}$$

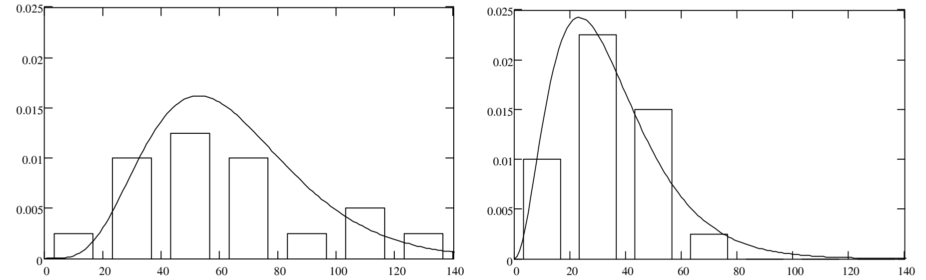
$$\lambda_j = \frac{\sum_{i=1}^{n} \chi_{i,j} \alpha_i}{\sum_{i=1}^{n} \chi_{i,j} t_{i,j}} \quad j = 1,2,...N, \tag{12}$$

где N_i – число испытуемых, верно решивших i-е задание;

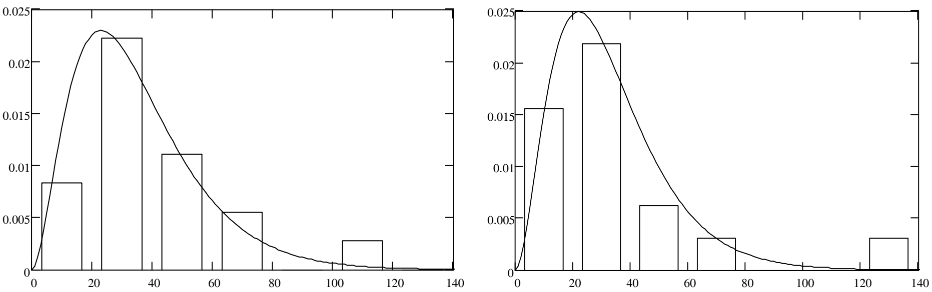
ψ(α) – пси функция Эйлера.

Решая систему уравнений (11 – 12) методом итераций, можно найти наиболее вероятные значения трудности тестовых заданий и уровня подготовленности испытуемых. Формула (7) используется здесь лишь для определения стартовых значений трудности тестовых заданий. Приобретенный нами опыт показывает, что для достижения относительной точности порядка ε ~ 0,01, вполне достаточной с практической точки зрения, обычно хватает 20 – 25 итераций.

Время поиска верного решения. Ниже приведены результаты тестирования по информатике, в котором участвовали 46 студентов факультета МИиФ ПИ ЮФУ. Индивидуальные тесты формировались случайным выбором из разбитой на блоки базы тестовых заданий, и содержали 20 заданий.



1 2. $p = 0{,}43$ $\alpha = 5{,}8$ $\overline{\lambda} = 0{,}090\ c^{-1}$ *1* 8. $p = 0{,}43$ $\alpha = 3{,}2$ $\overline{\lambda} = 0{,}093\ c^{-1}$



1 13. $p = 0{,}39$ $\alpha = 2{,}9$ $\overline{\lambda} = 0{,}083\ c^{-1}$ *1* 20. $p = 0{,}35$ $\alpha = 3{,}1$ $\overline{\lambda} = 0{,}093\ c^{-1}$

Рис. 2. Распределение времени поиска верного решения заданий

На рис. 2 для четырех наугад выбранных заданий показаны гистограммы эмпирического распределения времени выхода на верное решение тестовых заданий вместе с нанесенными на них графиками теоретической зависимости (1). В подписи к каждому графику указан номер тестового задания, вероятность верного решения задания, его трудность и средний уровень подготовленности студентов, верно решивших это задание.

Строго говоря, распределение времени поиска верного решения любого тестового задания в данной сессии тестирования должно получаться в результате усреднения распределений тех участников сессии, которые верно решили данное задание:

$$f_i(t) = \frac{1}{N_i} \sum_{j=1}^{N} \chi_{i,j} f\left(\alpha_i, \lambda_j, t\right) \quad i = 1, 2, \ldots n. \tag{13}$$

Однако численный эксперимент показал, что распределение (13) практически совпадает с распределением, полученным усреднением уровня подготовленности испытуемых, верно решивших задание:

$$f_i(t) = f\left(\alpha_i, \bar{\lambda}_i, t\right) \quad \bar{\lambda}_i = \frac{1}{N_i}\sum_{j=1}^{N}\chi_{i,j}\lambda_j \quad i = 1,2,...n. \tag{14}$$

Именно распределение (14) использовалось нами при сравнении эмпирического распределения времени, затраченного испытуемыми на решение тестовых заданий, с теоретической зависимостью. Дать строгое обоснование замены распределения (13) распределением (14) не удалось, хотя некие эвристические доводы в пользу возможности использования такой замены в качестве допустимой аппроксимации распределения (13), все же имеются.

Отметим также, что, несмотря на относительно небольшой объем выборки, эмпирические распределения времени поиска решения тестовых заданий согласуются с теоретической зависимостью гораздо лучше, чем следовало ожидать на основе априорных оценок границ для значений плотности эмпирических распределений. Хорошее согласие эмпирических данных с теоретической зависимостью (1) наблюдалось нами и ранее [1–3], причем на выборках самого разного объема, полученных при обработке данных тестирования по широкому спектру дисциплин – от психологии, истории и русского языка до химии, физики, линейной алгебры и информатики.

Время поиска неверного решения. В заключение обсудим еще одну эмпирически установленную закономерность. Уже на начальном этапе работы с новой моделью тестирования нами был обнаружен любопытный и до некоторой степени курьезный факт: оказалось, что процесс выхода на неверное решение тестовых заданий подчиняется тем же самым закономерностям, что и процесс поиска верного решения. Так, время выхода на неверное решение тестовых заданий оказывается случайной величиной, которая также подчиняется гамма-распределению (разумеется, с другими значениями параметров):

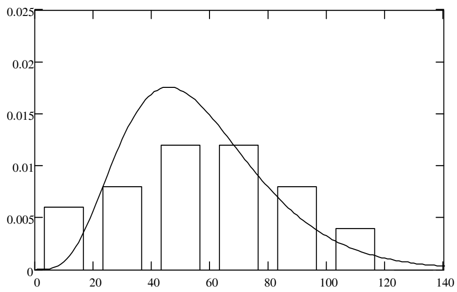
$$\tilde{f}(\beta,\mu,t) = \frac{(\mu t)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}e^{-\mu t}\mu. \tag{15}$$

Сложности возникли не при поиске разумной интерпретации обнаруженной зависимости, а при попытках подыскать подходящие названия фигурирующим в ней параметрам. Параметр β мы назвали трудностью поиска неверного решения, а второй параметр μ получил условное название уровня неподготовленности испытуемых.

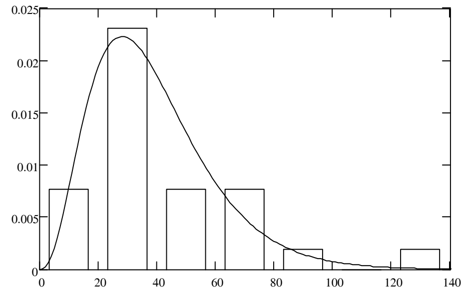
На рис. 3 для тех же четырех заданий показаны гистограммы эмпирического распределения времени выхода на неверное решение тестовых заданий вместе с нанесенными на них графиками теоретической зависимости (15). В подписи к каждому графику указан номер тестового задания, вероятность неверного решения задания, его трудность, а также средний уровень неподготовленности студентов, неверно решивших это задание.

Заключение. Приведенные выше результаты анализа обработки данных тестирования позволяют сделать следующие выводы:

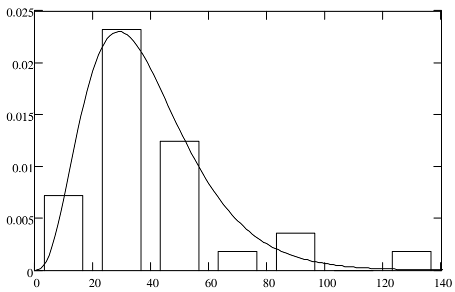
1. Поиск как верного, так и неверного решения тестовых заданий можно считать однородным во времени (пуассоновским) стохастическим процессом.
2. Время выхода на верное (неверное) решение тестового задания является случайной величиной, которая подчиняется гамма распределению.
3. Безразмерный параметр α гамма-распределения можно интерпретировать как трудность выхода на верное (неверное) решение тестового задания.
4. Параметр гамма-распределения λ, имеющий размерность обратного времени, ассоциируется с уровнем подготовленности (неподготовленности) испытуемого.



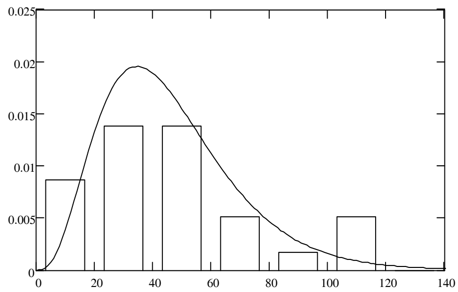
1 2. $q = 0{,}57\ \beta = 5{,}8\ \overline{\mu} = 0{,}090\ c^{-1}$



1 8. $q = 0{,}57\ \beta = 3{,}7\ \overline{\mu} = 0{,}094\ c^{-1}$



1 13. $q = 0{,}61\ \beta = 4{,}0\ \overline{\mu} = 0{,}102\ c^{-1}$



1 20. $q = 0{,}65\ \beta = 4{,}1\ \overline{\mu} = 0{,}088\ c^{-1}$

Рис. 3. Распределение времени выхода на неверное решение заданий

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Попов А.П., Богомолов А.А., Попова Л.А.* Новая математическая модель тестирования // Наука и образование. – 2005. – № 3. – С. 221.
2. *Попов А.П.* Новое направление в теории тестирования // Известия ЮФУ. Педагогические науки. – 2008. – № 1–2. – С. 24.
3. *Попов А.П., Попова Т.Ю., Акулов С.Ю.* О принципиально новом направлении в теории тестирования // Грани познания: электронный журнал. – ВГПУ, 2009. – № 4 (5). URL: http: // www.grani.vspu.ru.
4. *Гнеденко Б.В.* Курс теории вероятностей. – М., 1988. – 448 с.
5. *Королюк В.С., Портенко Н.И., Скороход А.В., Турбин А.Ф.* Справочник по теории вероятностей и математической статистике. – М., 1985. – 640 с.

Статью рекомендовал к опубликованию д.т.н., профессор А.Н. Чукарин.

Попов Александр Петрович – Педагогический институт федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Южный федеральный университет»; e-mail: nanosys@mail.ru; 344068, г. Ростов-на-Дону, ул. Криворожская, 57, кв. 20; тел.: +79094412895; отдел контроля качества образования; начальник.

Popov Alexander Petrovich – Federal State-Owned Autonomy Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”; e-mail: nanosys@mail.ru; 57, ap. 20, Krivorozhskaya street, Rostov-on-Don, 344068, Russia; phone: +79094412895; the department of education quality control; chief.