УДК 621.3.06

В.А. Литвиненко, С.А. Ховансков, Е.В. Литвиненко

МОДИФИЦИРОВАННЫЙ АДАПТИВНЫЙ АЛГОРИТМ ОПРЕДЕЛЕНИЯ МАКСИМАЛЬНЫХ ПОЛНЫХ ПОДГРАФОВ*

В статье рассматривается модификация адаптивного алгоритма определения максимальных полных подграфов симметрического графа, позволяющая организовать выбор параметров адаптации не только в начале выполнения алгоритма, но при выполнении самого алгоритма. При этом значение параметра адаптации может, как уменьшаться, так и увеличиваться, т.е. точность решения может, как увеличиваться, так и уменьшаться в процессе выполнения алгоритма, что, в целом, позволит сделать процесс управления точностью решения более гибким. Выбор параметра адаптации производится после каждого этапа, на котором произведено определение максимальных подграфов одно вершины графа. Приведено описание алгоритма.

Алгоритмы на графах; максимальный полный подграф; точность решения; параметрическая адаптация; размерность задачи; ресурс времени; база данных; управление точностью; двоичное дерево; модифицированный алгоритм.

V.A. Litvinenko, S.A. Hovanskov, E.V. Litvinenko

THE MODIFIED ADAPTIVE ALGORITHM OF DEFINITION OF THE MAXIMUM FULL SUBGRAPHS

In article updating of adaptive algorithm of the maximum full subgraphs definition of the symmetric count, allowing to organize a choice of parameters of adaptation not only at the beginning of algorithm performance is considered, but at performance of the algorithm. Thus value of parameter of adaptation can, both to decrease, and to increase, i.e. accuracy of the decision can, both to increase, and to decrease in the course of algorithm performance that, as a whole, will allow to make management of accuracy of the decision of more flexible. The choice of parameter of adaptation is made after each stage on which definition of the maximum subgraphs of one top of the count is made. The algorithm description is provided.

Algorithms on columns; maximum full subgraph; accuracy of the decision; parametrical adaptation; dimension of a task; time resource; database; management of accuracy; binary tree; the modified algorithm.

Введение. Задача определения максимальных полных подграфов [1, 2] относится к экстремальным задачам на графах. К задаче определения максимальных полных подграфов сводятся достаточно большое количество задач, имеющих практическое значение, например, [3]. Однако трудоемкость алгоритмов определения максимальных полных подграфов затрудняет ее применение.

В настоящее время активно развиваются различные методы, направленные на повышение эффективности решения экстремальных задач на графах. Среди таких методов следует отметить различные биоинспиророванные методы и алгоритмы [5, 6]. Одним из перспективных направлений является также использование методов искусственного интеллекта [7–9] для решения экстремальных задач на графах, в том числе, и задачи определения максимальных полных подграфов [11–14].

В работах [11–15] развивается один из методов искусственного интеллекта – метод параметрической адаптации для решения экстремальных задач на графах.

* Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (проект № 11-01-00975-а).

В работе [11, 13] предложен адаптивный алгоритм определения максимальных полных подграфов, основанный на методе параметрической адаптации, который является модификацией алгоритма определения максимальных полных подграфов, предложенного в [3].

Теорема, на которой основан алгоритм [3]. Пусть в графе $G=(X,U)$ имеется вершина $x_i \in X$ $[\Gamma x_i \bigcup \{x_i\} = X]$ и определена клика $L=(X'', U'')$ с множеством вершин $X''=\{x_i\} \bigcup X'$, где $X' \subset X$. Тогда, если $\forall x_k \in C = X \setminus X''$ выделены все максимальные полные подграфы, то и $\forall x_j \in X'$ будут получены все максимальные полные подграфы.

Практическое значение этой теоремы в том, что, если для каждой вершины графа $x_i \in X$ эту теорему применить только один раз, то будут выделены все максимальные полные подграфы графа. Но, если для каждой вершины графа $x_i \in X$ эту теорему применить два и более раз, то тогда будут определены не все максимальные полные подграфы графа и решение будет приближенным, точность которого будет зависеть от того, сколько раз применена теорема к одной и той же вершине графа $x_i \in X$. В предельном случае можно определить все максимальные полные подграфы, покрывающие все ребра графа.

Весь процесс определения всех максимальных полных подграфов состоит из n этапов, где n – количество вершин графа, каждый из которых связан с определенной вершиной $x_l \in X$.

На каждом l-м этапе определяются все максимальные полные подграфы графа $G=(X, U)$, образованные вершинами множества X' подграфа $G_l=(X_l, U_l)$, где $X_l=\Gamma' x_l \bigcup \{x_l\}$ – множество вершин, а U_l – множество ребер.

Алгоритм [11] основан на систематическом переборе полных подграфов и проверке их на максимальность.

Полный подграф $G'=(X', U')$, где X' – множество вершин, а U' – множество ребер, графа $G=(X,U)$ является максимальным полным подграфом, если

$$\bigcap\nolimits_{\forall x_s \in X'} \Gamma x_s = \emptyset. \quad (1)$$

Проверка на максимальность заключается в определении пересечения множеств вершин, смежных с каждой вершиной, образующей выделенный полный подграф. Если такое пересечение кажется пустым, то это будет означать, что выделенный полный подграф является максимальным полным подграфом.

Рассмотрим определение полных подграфов на каком-то l-ом этапе для подграфа $G_l=(X_l, U_l)$.

Если $\Gamma x_l = \emptyset$, то выделяется максимальный полный подграф $L_j=(X_j, U_j)[X_j=\{x_l\}]$. В противном случае переходим к выделению полных подграфов.

Определим множество $M_1= \Gamma' x_l$ и $M_{1,1}=M_1$. Определим вершину $x_{z,1} \in M_{1,1}$ с наименьшим индексом z (дополнительный индекс в обозначении вершин соответствует шагу выделения полного подграфа).

Определим множество $M_{1,2}= M_{1,1} \cap \Gamma' x_{z,1}$. Затем найдем вершину $x_{z,2} \in M_{1,2}$ $[(z,2) > (z,1)$ и $(z,2)$ – наименьший индекс]. Затем определим $M_{1,3}= M_{1,2} \cap \Gamma' x_{z,2}$ и вершину $x_{z,3} \in M_{1,3}$ $[(z,3) > (z,2)$ и $(z,3)$ – наименьший индекс] и т.д., пока на $k1$-ом шаге не получим множество

$$M_{1,k1}= M_{1,k1-1} \cap \Gamma' x_{z,k1} = \emptyset. \quad (2)$$

Тогда получим полный подграф $B'_\Psi=\{x_l\} \bigcup \{\bigcup_{\xi=1}^{k1} x_{z,\zeta}\}$, где Ψ – порядковый номер максимального полного подграфа.

Теперь воспользуемся теоремой. Составим множество $C_1= M_1 \setminus B'_\Psi$. Выберем вершину $x_{m,1} \in C_1$ с наименьшим индексом $(m,1) > l$. Определим $M_2= M_1 \cap \Gamma x_{m,1}$ и

$M_{2,1}= M_2$, для которого аналогично предыдущей процедуре выделения полного подграфа получим полный подграф

$$B'_{\psi+1}=\{x_l\} \bigcup \{x_{m,1}\} \bigcup \{\bigcup_{\xi=2}^{k2} x_{z,\zeta}\}.$$

Затем составим множество $C_2= M_1 \setminus B'_{\psi+1}$, выберем вершину $x_{m,2}\in C_2$ с наименьшим индексом $(m,2)>l$ и определим $M_3=M_2\cap \Gamma x_{m,2}$ и $M_{3,1}=M_3$. После чего определим: $B'_{\psi+2}=\{x_l\} \bigcup \{x_{m,1}\} \bigcup \{x_{m,2}\} \bigcup \{\bigcup_{\xi=3}^{k3} x_{z,\zeta}\}$, $C_3=M_3\setminus B'_{\psi+2}$, вершину $x_{m,3}\in C_3$ [$(m,3)> l$ и $(m,3)$ – наименьший индекс] и т.д.

На i-м шаге: $M_i=M_{i-1}\cap \Gamma x_{m,i-1}$ [$x_{m,i-1}\in C_{i-1}$ и $(m,i-1)$ – наименьший индекс];

$$M_{i,1}=M_i;\ B'_{\psi+i-1}=\{x_l\} \bigcup \{\bigcup_{\varphi=3}^{i-1} x_{m,\varphi}\} \bigcup \{\bigcup_{\xi=i}^{ki} x_{z,\zeta}\},\ C_i=M_i\setminus B'_{\psi+i-1}. \tag{3}$$

Множества M_i и C_i – запоминаются, а множества $M_{i,1}, M_{i,2}, \ldots M_{i,\kappa}$ – нет.

Аналогичные действия выполняются до тех пор, пока на шаге $i=q$:

$$M_q= M_{q-1}\cap \Gamma x_{m,q-1}=\emptyset \tag{4}$$

или

$$C_q= M_q\setminus B'_{\psi+q-1}=\emptyset. \tag{5}$$

При выполнении любого из условий (4) или (5) переходим к предыдущему множеству M_{q-1}, с тем отличием, что при выполнении (4) выделяется полный подграф

$$B''_{\psi+q-1}=\{x_l\} \bigcup \{\bigcup_{\varphi=1}^{q-1} x_{m,\varphi}\}. \tag{6}$$

Множества $B'_{\psi+i-1}$ и $B''_{\psi+q-1}$ обозначены по-разному, для того, чтобы подчеркнуть различие в способах их получения.

Затем из множества C_{q-1} исключаем вершину $x_{m,q-1} \in C_{q-1}$ и добавляем вершину $x_{m,q-1}$ в множество D_{q-1}. Отметим, что при выполнении (3) начальное состояние множества $D_q= \emptyset$.

В том случае, когда $D_{q-1} \neq C_{q-1}$, переходим к формированию множеств M_{q-2}, C_{q-2}, D_{q-1} и т.д., пока $D_1=C_1$ или $C_1= \emptyset$. Если $C_{q-1}\neq \emptyset$,то вновь определяем вершину $x_{\delta,q-1}\in C_{q-1}$[$(\delta,q-1)> (m, q-1)$], а затем – множества M_q, C_q, D_q и т.д.

Чтобы исключить повторное выделение одних и тех же полных подграфов выражение (4) примет следующий вид:

$$M_q=M_{q-1}\cap \Gamma x_{m,q-1}\setminus D_{q-1}. \tag{7}$$

Для проверки на максимальность выделенного полного подграфа проводится проверка (1).

Управление точностью решения задачи выделения максимальных полных подграфов. Пусть λ – количество полных подграфов, которые выделяются для каждого M_q в соответствии с процедурой выделения полного подграфа типа $B'_{\psi+i-1}$. В том случае, если теорема применяется только один раз к подграфу $C_q= (M_q,U_q)$, т.е. λ=1 и множество $B'_{q,t}$ [$t= \lambda$] определятся только одно для каждого множества M_q, то будут выделены все максимальные полные подграфы. Тем самым, будет получено точное решение задачи определения максимальных полных подграфов. Если параметр λ>1, то будут определяться не все максимальные полные подграфы, а только их часть. При этом количество максимальных полных подграфов будет уменьшаться с увеличением значения параметра λ.

Таким образом, задавая различные значения параметру адаптации λ можно получать решения с различной степенью точности, и, те самым, управлять точностью решения задачи определения максимальных полных подграфов.

Модификация адаптивного алгоритма заключается в том, что значение параметра адаптации λ может изменяться в процессе выполнения алгоритма.

После определения всех максимальных полных подграфов, в которые входит вершина $x_i \in X$, размерность исследуемого графа уменьшается на одну вершину и алгоритмом адаптации можно провести заново выбор адаптирующего воздействия, поскольку изменились условия выполнении алгоритма – уменьшилась размерность задачи.

Для этого алгоритм адаптации, зная ресурс времени, отведенный на решение задачи, и фактическое время, уже использованное на решение задачи к моменту выделения клик и время, затраченное на выделение максимальных полных подграфов, в которые входит вершина $x_i \in X$, заново определяет адаптирующее воздействие – значение параметра λ. После этого выполнение адаптивного алгоритма продолжается с новым значением параметра адаптации λ. При этом значение параметра адаптации λ может, как уменьшаться, так и увеличиваться, т.е. точность решения может как увеличиваться, так и уменьшаться в процессе выполнения алгоритма, что, в целом, позволит сделать процесс управления точностью решения более гибким.

Сформулируем адаптивный алгоритм определения максимальных полных подграфов, позволяющий управлять точностью решения, с учетом предложенной модификации.

Исходными данными для выполнения алгоритма являются: граф $G=(X, U)$, заданный матрицей смежности; внешние условия выполнения алгоритма:

1) размерность графа: n – количество вершин графа и m – количество ребер графа;

2) β – требуемая точность решения;

3) d – ресурс времени, отведенный на решение задачи.

Алгоритм.

1°. Начало работы алгоритма. Задание начальных значений: $\gamma=0$; $\psi=0$; $l=0$.

2°. Выбор значения параметра адаптации λ с использованием алгоритма адаптации на основе анализа внешних условий, с учетом уменьшения размерности задачи и времени, использованного на исследование графа.

3°. $l=l+1$. Если $l=n$, то переход к 10°, иначе выбрать очередное множество Γx_l и переход к 4°.

4°. Если $\Gamma x_l=\emptyset$, то $\gamma=\gamma+1$ и выделить максимальный полный подграф $L\gamma=(X\gamma,U\gamma)[X\gamma=\{x_l\},\ U\gamma=\emptyset]$ и переход к 3°, иначе i=1, $M_1=\Gamma' x_l$, $C_i=M_i$, $D_q=\emptyset$, $t=1$ и переход к 3°.

5°. $\psi= \psi+1$. Для M_i в соответствии с (4) определить $B'_{\psi,t}$. При $t>1$ определить $M_{i,1}= M_{i,1}\cap \Gamma x_{z,1}$ и проверить полный подграф $G_\psi=(B'_{\psi,t},U_\psi)$ на максимальность согласно (1). Если условие (1) выполнятся, то выделить максимальный полный подграф $L\gamma= G_\psi$. Переход к 6°.

6°. $C_i=C_i \backslash B'_{\psi,t}$. Если $C_i=\emptyset$, то переход к 8°, иначе, если $t=\lambda$, то переход к 7°, иначе $t= t+1$ и переход к 5°.

7°. $i=i+1$. $M_i=M_{i-1}\cap \Gamma x_{m,i-1} \backslash D_{q-1}$ [$x_{m,i-1}\in C_{i-1}$ $(m,i-1)$ – наименьший индекс]. Если $M_i=\emptyset$, то $\psi= \psi+1$ и определить B''_ψ в соответствии с (7), проверить полный подграф $G_\psi=(X_\psi,U_\psi)[X_\psi= B''_\psi]$ на максимальность в соответствии с (1). Если условие (1) выполняется, то $\gamma=\gamma+1$ и выделить максимальный полный подграф $L\gamma= G_\psi$, переход к 8°. Если $M_i\neq\emptyset$, то запомнить $M_i, M_{i,1}=M_i$, $t=1$, $C_i=M_i$, $D_q=\emptyset$ и переход к 5°.

8°. $i=i-1$. $C_i= C_i \backslash x_{m,i-1}$. Переход к 9°.

9°. Если $C_i=\emptyset$, то переход к 8° до выполнения условия $C_1=\emptyset$, тогда переход к 2°, иначе $D_i= D_i\cup\{x_{m,i}\}$ и переход к 7°.

10°. Конец работы алгоритма.

Заключение. Рассмотренная модификация адаптивного алгоритма определения максимальных полных подграфов позволяет организовать выбор параметров адаптации не только в начале выполнения алгоритма, но при выполнении алгоритма, повышая, тем самым, повышая гибкость управления точностью решения.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Кристофидес Н.* Теория графов. Алгоритмический подход / Пер. с англ. под ред. Г.Г. Гаврилова. – М.: Мир, 1978. – 432 с.
2. *Литвиненко В.А.* Применение адаптивных алгоритмов определения экстремальных множеств графов при решении оптимизационных задач автоматизированного проектирования ЭВА // Известия ТРТУ. – 2001. – № 4 (22). – С. 361-362.
3. *Курейчик В.М., Литвиненко В.А.* Определение клик симметрического графа // Известия Северо-Кавказского научного центра высшей школы. Технические науки. – 1979. – № 2. – С. 13-16.
4. *Чернышев Ю.О., Литвиненко В.А., Ховансков С.А., Литвиненко Е.В.* Методы управления точностью решения экстремальных задач на графах // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2010. – № 7 (108). – С. 84-91.
5. *Курейчик В.В., Курейчик В.М., Родзин С.И.* Концепция эволюционных вычислений, инспирированных природными системами // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2009. – № 4 (93). – С. 16-24.
6. *Курейчик В.М. Кажаров А.А.* Использование роевого интеллекта в решении NP-трудных задач // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2011. – № 7 (120). – С. 30-37.
7. *Растригин Л.А.* Адаптация сложных систем. – Рига: Зинатне, 1981. – 375 с.
8. *Курейчик В.М., Лебедев Б.К., Лебедев О.Б., Чернышев Ю.О.* Адаптация на основе самообучения / Монография. – Ростов н/Д.: Изд-во РГАСХМ ГОУ, 2005.
9. *Курейчик В.М., Лебедев Б.К., Лебедев О.Б.* Поисковая адаптация. Теория и практика / Монография. – М.: Физматлит, 2006.
10. *Калашников В.А., Литвиненко В.А.* К вопросу определения семейств клик графа. 30. Intern. Wiss. Koll. TH llmenau Vortragsreihe. 1985. – С. 41-44.
11. *Литвиненко В.А.* Адаптивные алгоритмы определения экстремальных множеств графов // Известия ТРТУ. – 2000. – № 2 (16). – С. 186-189.
12. *Литвиненко В.А., Зеленский Л.И., Белогородцев Р.А.* Исследование эффективности модифицированного алгоритма определения клик графа // Известия ТРТУ. – 2002. – № 3 (26). – С. 204-205.
13. *Litvinenko V.A.* Adaptive algorithms of definition of extreme sets of graphs // Proceeding of the International Scientific Conferences «Intelligent System (IEEE AIS'03)» and «Intelligent CAD's (CAD-2003)». Scientific publication in 3 volumes. – 2003. – Vol. 3. – C. 52-59.
14. *Литвиненко В.А., Калашников В.А.* Алгоритм адаптации проектной операции определения клик графа // Известия ТРТУ. – 2003. – № 2(31). – С. 165-170.
15. *Литвиненко В.А., Хованскоев С.А., Литвиненко Е.В.* Применение методов искусственного интеллекта для управления точностью решения задач на графах // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2011. – № 7 (120). – С. 153-159.

Статью рекомендовал к опубликованию д.т.н., профессор Ю.О. Чернышев.

Литвиненко Василий Афанасьевич – Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Южный федеральный университет»; e-mail: litv@tsure.ru; 347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44, ГСП 17А; тел.: 88634371651; кафедра систем автоматизированного проектирования; к.т.н.; доцент.

Хованскоев Сергей Андреевич – e-mail: sah59@mail.ru; кафедра систем автоматизированного проектирования; к.т.н.; доцент.

Литвиненко Егор Васильевич – e-mail: valmont_ego_vas@mail.ru; студент.

Litvinenko Vasiliy Afanasievich – Federal State-Owned Autonomy Educational Establishment of Higher Vocational Education "Southern Federal University"; e-mail: litv@tsure.ru; GSP-17A, 44, Nekrasovskiy, Taganrog, 347928, Russia; phone: +78634371651; the department of computer aided design; cand. of eng. sc.; associate professor.

Hovanskov Sergey Andreevich – e-mail: sah59@mail.ru; cand. of eng. sc.; associate professor.

Litvinenko Yegor Vasilievich e-mail: valmont_ego_vas@mail.ru; student.