Раздел I. Математические методы синтеза систем

УДК 681.12

А.Р. Гайдук, К.В. Бесклубова

МЕТОДЫ ОЦЕНКИ ПЕРЕМЕННЫХ СОСТОЯНИЯ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ*

Исследуется задача оценки нормы вектора переменных состояния динамической системы при ограниченном управлении в виде линейной обратной связи по состоянию. Оценка производится с применением метода функций Ляпунова, неравенства Коши и инвариантных эллипсоидов. Получены аналитические выражения, определяющие область начальных значений переменных состояния, при которых обеспечивается гарантированная устойчивость системы управления. Проведено моделирование линейной системы с ограниченным управлением при различных начальных условиях. Результаты моделирования подтверждают справедливость полученных выражений.

Система управления; ограничение на управление; функция Ляпунова; оценка области устойчивости; переменные состояния.

A.R. Gaiduk, K.V. Besklubova

ESTIMATION METHODS OF THE LINEAR SYSTEM'S STATE VARIABLES

In this work we researched the task of estimations of state variables vector's norm of dynamic system. Constraint control in the form of linear state feedback is considered. The estimation is produced with application of Lyapunov's function method, an inequality of Cauchy and invariant ellipsoids. Analytical expressions, defining conditions of the guaranteed system's stability, are received. Simulation of the linear system with constraint control is led at the various initial conditions which results prove the specified expressions.

Control system; control constraint; Lyapunov's function; an estimation of stability area; state variables.

Введение. Практически всегда допустимые значения управляющих воздействий реальных объектов ограничены по величине. Если управление, формируемое устройством управления, превышает допустимое значение, то система может потерять устойчивость и работоспособность. В связи с этим в данной работе рассматривается задача оценки переменных состояния линейной динамической системы с ограничением на управление. Решение задачи получено методом функций Ляпунова с применением неравенства Коши и инвариантных эллипсоидов.

Постановка задачи. Рассмотрим систему, заданную уравнениями

$$\dot{x} = Ax + bu\,,\ \ y = c^T x\,, \tag{1}$$

где x – n-вектор состояния; A, b, c – матрицы коэффициентов; u – скалярное управление по состоянию, описываемое выражением

$$u = \begin{cases} -k^T x, & \left\|k^T x\right\| < u_{\max} \\ -u_{\max} sign(k^T x), & \left\|k^T x\right\| \ge u_{\max} \end{cases} \tag{2}$$

k – вектор параметров этого управления, $u_{\max}$ – допустимое значение управления.

* Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 11-08-01196-а).

Предполагается, что система (1) является вполне управляемой, а вектор k такой, что собственные числа p_i, $i=\overline{1,n}$ матрицы $D = A - bk^T$ замкнутой системы (1) имеют $\operatorname{Re} p_i < 0$, а сама система при $\left\|k^T x\right\| < u_{\max}$ удовлетворяет заданным требованиям к качеству. Уравнения замкнутой системы с управлением (2) можно представить в следующем виде:

$$\dot{x} = Dx\,,\; y = c^T x\,. \tag{3}$$

Ниже рассматриваются методы решения задачи определения диапазонов изменения переменных состояния, в которых сохраняется устойчивость системы (3).

Решение задачи. Поскольку система (3) является устойчивой, то для неё можно найти функцию Ляпунова в виде квадратичной формы $V(x) = x^T Px$. В этом выражении P – симметричная, положительно-определенная матрица, которую можно найти путем решения уравнения Ляпунова

$$D^T P + PD = -C\,, \tag{4}$$

где C, в общем случае, симметричная, положительно-определенная матрица. В настоящей работе принимается $C = \gamma E$, где E – единичная матрица, $\gamma > 0$.

Производная по времени функции $V(x) = x^T Px$ вдоль траекторий системы определяется выражением $\dot{V}(x) = -x^T Cx$. Так как $C > 0$, то $\dot{V}(x)$ является отрицательно-определенной функцией. Поэтому при ограниченной норме $\left\|x_0\right\|$ вектора начальных значений x_0 решение $x(t) = x(t, x_0)$ системы (3) также является ограниченным при всех $t \ge 0$ и стремится к нулю с ростом времени.

В работе [1] показано, что если $x_0 \in \Omega_0$, где Ω_0 – область пространства состояний, которая определяется условием

$$\left\|x_0\right\| \le \frac{u_{\max}}{\rho_0 \left\|k\right\|}, \tag{5}$$

на траекториях $x(t, x_0)$ системы (1) выполняется неравенство $\left\|k^T x\right\| < u_{\max}$. Здесь параметр $\rho_0 = \sqrt{\lambda_n^P / \lambda_1^P}$, λ_1^P, λ_n^P – соответственно наименьшее и наибольшее собственные числа матрицы P.

Фактически выражение (5) определяет область начальных значений вектора состояния системы (1), в которой система остается линейной. При невыполнении условия (5) система в соответствии с (2) становится нелинейной.

Оценить допустимый диапазон изменения переменных состоянии системы (1), при котором выполняется неравенство $\left\|k^T x\right\| < u_{\max}$, позволяет также метод инвариантных эллипсоидов [2, 3].

Эллипсоид

$$\varepsilon_\rho(p) = \left\{x \in R^n : x^T Px \le \rho^2\right\},\quad P > 0 \tag{6}$$

называется инвариантным притягивающим для (1), если для любого $x_0 \in \varepsilon_\rho(p)$ при всех $t \ge 0$ будет выполнено условие

$$x(t, x_0) \in \varepsilon_\rho(p)\,. \tag{7}$$

Здесь параметр ρ^2 должен быть связан с допустимым значением управления $u_{\max}$; матрица P, как и ранее, является решением уравнения (4).

Фактически эллипсоид ε_ρ представляет собой область в пространстве состояний системы (1), ограниченную поверхностью $x^T Px = \rho^2$. Если на управление системы не налагается каких-либо условий, т.е. система устойчива при любом векторе начальных значений x_0, все траектории системы с ростом времени стремятся к эллипсоиду ε_ρ и попадают в него при некотором $t > t_\rho > 0$.

Согласно лемме 1 из [2], если начальные значения вектора переменных состояния системы (1) удовлетворяют равенству $x^T Px = \rho^2$, то при всех $t \geq 0$ выполняется условие

$$x^T(t, x_0)Px(t, x_0) \leq \rho^2. \tag{8}$$

При этом, по лемме 2 из [2], обеспечить выполнение неравенства $|u| \leq u_{\max}$ можно при выполнении условий (8) и

$$\begin{bmatrix} P^{-1} & Y^T \\ Y & \frac{u_{\max}^2}{\rho^2}E \end{bmatrix} \geq 0, \tag{9}$$

где вектор $Y = -k^T P^{-1}$.

Таким образом, задаваясь некоторым значением $u_{\max}$, по условию (9), можно найти параметр ρ^2, который и определяет размеры эллипсоида ε_ρ, который является границей области начальных значений x_0, при которых обеспечивается неравенство $|u| \leq u_{\max}$ и устойчивость системы (1).

Оба указанных метода позволяют найти область начальных значений в пространстве переменных состояния, где гарантируется выполнение условия устойчивости системы. Однако практические исследования показывают, что и за пределами этих областей, при несколько бóльшей норме вектора x_0, система остается устойчивой. Это связано с тем, что метод функций Ляпунова приводит к достаточным условиям устойчивости. Далее проводится сравнение качества оценок области допустимых значений переменных состояния, которую дают приведенные выражения (5) и (8), (9).

Пример. В качестве примера рассматривается следующая система:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 32 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x,. \tag{10}$$

Для нее по требованиям к качеству найдено управление $u = -[0.13 \quad 0.60 \quad 0.74]x$. Пусть максимально допустимое значение управления $u_{\max} = 5$.

Решение уравнения Ляпунова (4) принимает вид

$$P = \begin{bmatrix} 0.10 & -0.17 & -0.23 \\ -0.17 & 2.11 & 1.2 \\ -0.23 & 1.2 & 4.80 \end{bmatrix}.$$

Собственные числа матрицы P имеют значения $\lambda_1^P = 0,08$, $\lambda_2^P = 1,65$, $\lambda_3^P = 5,27$.

При этих параметрах норма вектора начальных значений x_0 в соответствии с (5) ограничена значением 0,65.

При компонентах вектора x_0, удовлетворяющих неравенству (5), графики изменения переменных состояния системы (10) принимают вид рис. 1.

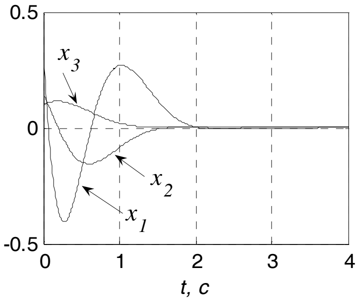


Рис. 1. Переменные системы при $x_0 \in \Omega_0$

При выборе несколько больших значений компонент вектора x_0, таких, что условие (5) не выполняется, получим графики, показанные на рис. 2.

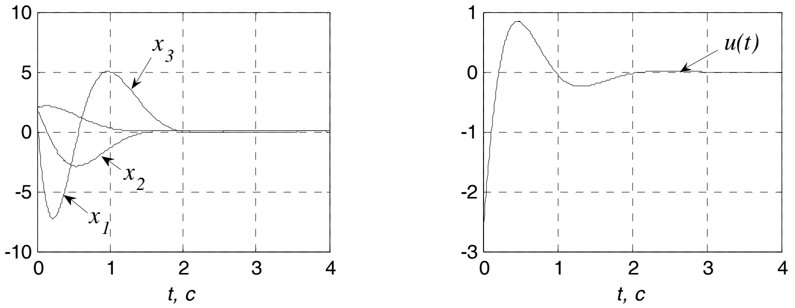


Рис. 2. Переменные состояния и управляющее воздействие при $x_0 \notin \Omega_0$

Очевидно, система в этом случае сохраняет устойчивость, несмотря на нарушение условия (5). При дальнейшем увеличении нормы вектора x_0 управляющее воздействие равно своему максимально допустимому значению, а система теряет устойчивость. Это подтверждается изменениями переменных состояния, изображенных на рис. 3. Соотношения (8), (9) метода инвариантных эллипсоидов позволяют в явном виде построить область начальных значений переменных состояния, в которых выполняется условие $|u| \le u_{\max}$. Эта область для системы (10) показана на рис. 4. Если начальные значения вектора переменных состояния попадают в область ε_ρ, т.е. $x_0 \in \varepsilon_\rho(p)$, то соответствующий график $x(t)$ целиком располагается этой области, как показано на рис. 4. Если же начальная точка находится вне области ε_ρ, но не слишком удалена от неё, то система остается устойчивой, как видно из рис. 5,а.

Необходимо отметить, что как неравенство (5), так и выражения (8), (9) описывают не всю область, в которой выполняется условие $|u| \le u_{\max}$, а лишь её часть. Использование этих условий связано с удобством их практического применения, так как они позволяют аналитически описать область, в которой гарантируется устойчивость системы, как при выполнении условия $|u| \le u_{\max}$, так и при его нарушении.

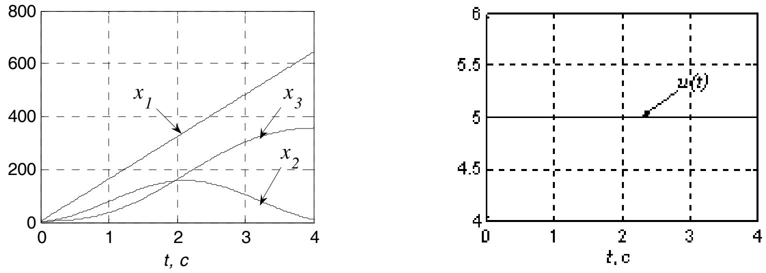


Рис. 3. Переменные состояния и управление неустойчивой системы (10)

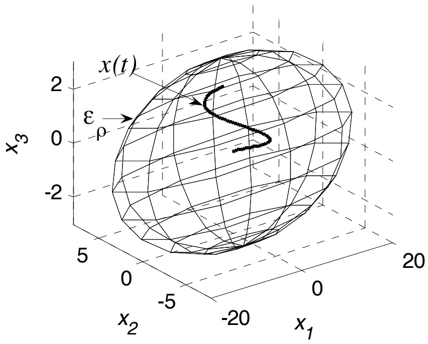
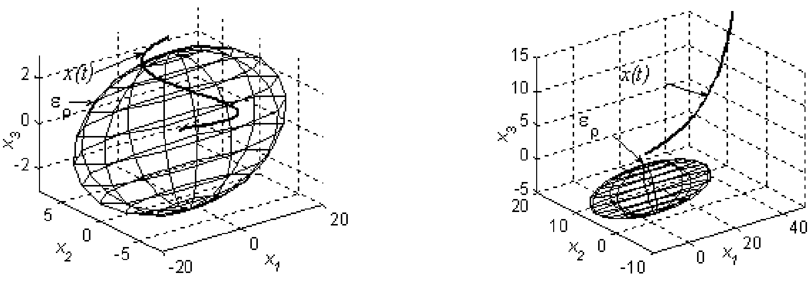


Рис. 4. Допустимая область начальных значений

Если же начальная точка находится за границей области ε_ρ , то система становится неустойчивой, что подтверждается рис. 5,б.



а б

Рис. 5. Переменные состояния системы

Заключение. Рассмотренные методы позволяют указать области гарантированной устойчивости и выполнения неравенства $|u| \le u_{\max}$. По-видимому, целесообразно найти аналитические оценки и области начальных значений, при которых управление превышает допустимое значение, но система остается устойчивой.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Гайдук А.Р.* Оценки переменных состояния линейных систем. Наука и образование на рубеже тысячелетий: сборник научно-исследовательских работ. Вып. 2. – М.: Учлитвуз, 2011. – С. 23-27.
2. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Наука, 1967.

3. *Поляк Б.Т., Щербаков П.С.* Множества достижимости и притяжения линейных систем с ограниченным управлением: описание с помощью инвариантных эллипсоидов. Сб. «Стохастическая оптимизация в информатике» / Под ред. О.Н. Граничина. Вып. 4. – СПб.: СПб ГУ, 2008. – С. 3-23.
4. *Гайдук А.Р., Плаксиенко Е.А.* Синтез динамических систем по требуемым показателям качества // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2008. – № 4. – С. 7-12.
5. *Гайдук А.Р.* Теория и методы аналитического синтеза систем автоматического управления (Полиномиальный подход). – М.: Физматлит, 2011.

Статью рекомендовал к опубликованию д.т.н., профессор Н.И. Витиска

Гайдук Анатолий Романович – Технологический институт федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Южный федеральный университет» в г. Таганроге; e-mail: gaiduk_2003@mail.ru; 347904, г. Таганрог, ул. Слесарная 26, кв. 2; тел.: 88634626287; кафедра систем автоматического управления; д.т.н.; профессор.

Бесклубова Ксения Валериевна – e-mail: besklubova@rambler.ru; 347904, г. Таганрог, ул. Яблочкина, 8/1, кв. 33; тел.: 88634387349; магистрантка.

Gaiduk Anatoly Romanovich – Taganrog Institute of Technology – Federal State-Owned Autonomy Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”; e-mail: gaiduk_2003@mail.ru; 26, Slesarnaya street; app. 2; Taganrog, 347904, Russia; phone: +78634626287; the department of automatic control systems; dr. of eng. sc.; professor.

Besklubova Ksenia Valeryevna – e-mail: besklubova@rambler.ru; 8/1, Yablochkina street, app. 33, Taganrog; 347904, Russia; phone: +78634387349; the department of automatic control systems; magister.

УДК 681.5

Го Пэн

МЕТОД СИНТЕЗА СИСТЕМ С РЕГУЛЯТОРОМ ПО ВЫХОДУ И ВОЗДЕЙСТВИЯМ

Рассматривается аналитический метод синтеза регуляторов по выходу и воздействиям. Регуляторы этого типа позволяют управлять не только полюсами системы, но и её нулями, что позволяет обеспечивать устойчивость систем управления линейными объектами произвольного вида как устойчивыми, так и неустойчивыми. При этом учитываются условия физической реализуемости регуляторов, а условия устойчивости не противоречат условиям астатизма и точности. Решение задачи синтеза структуры и параметров требуемого регулятора сводится к решению систем линейных алгебраических уравнений. Эффективность предложенного метода показана на численном примере.

Объект; регулятор; система; устойчивость; качество; синтез; расчетные уравнения.

Guo Peng

DESIGN METHOD OF SYSTEMS WITH CONTROLLER ON OUTPUT AND DISTURBANSES

The article deals with an analytical method for the design of systems with controller on output and disturbances. Controller of this type allow you to control not only the poles of the system, but also its zeros, which ensures stability control systems linear objects of arbitrary type as stable or unstable. This takes into account the conditions of physical realizability controller, and stability conditions do not contradict the conditions of astatism and accuracy. Solution to the problem of synthesis of structure and parameters of the desired controller is reduced to solving systems of linear algebraic equations. The effectiveness of the proposed method is shown on the numerical example.

Object; controller; system stability; the quality; design; the calculated equation.