

Дегтярева Екатерина Евгеньевна – Технологический институт федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Южный федеральный университет» в г. Таганроге; e-mail: katerina.degtyreva@gmail.com; 347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44; тел.: +79045069696; кафедра высшей математики; аспирантка.

Чистяков Александр Евгеньевич – e-mail: cheese_05@mail.ru; тел.: +78634371606; кафедра высшей математики; доцент.

Degtyareva Ekaterina Evgenievna – Taganrog Institute of Technology – Federal State-Owned Autonomy Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”; e-mail: katerina.degtyreva@gmail.com; 44, Nekrasovsky, Taganrog, 347928, Russia; phone: +79045069696; the department of higher mathematics; post-graduate student.

Chistyakov Alexander Evgenjevich – e-mail: cheese_05@mail.ru; phone: +78634371606; the department of higher mathematics; associate professor.

УДК 532.5.031

Кандалфт Хекмат

ТРЕХМЕРНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДВИЖЕНИЯ ВОДНОЙ СРЕДЫ ПРИ НАЛИЧИИ НА ПОВЕРХНОСТИ ЛЕДЯНОЙ ПЛАСТИНЫ

Работа посвящена развитию математических подходов к изучению гидродинамических процессов в однородной жидкости, поверхностью активными напряжениями и начальными возмущающими факторами. Разработана трехмерная математическая модель движения водной среды, при наличии ледовой пластины на поверхности водоема. Основными уравнениями математической модели являются: система уравнений Навье–Стокса и уравнение неразрывности. Для построения численного алгоритма применен метод расщепления по физическим процессам. Для данной задачи получено численное решение, позволяющее определять поведение жидкости при данных условиях. На основе интегрирования интерполяционного метода выполнена аппроксимация трехмерной математической модели гидродинамики. Был разработан комплекс программ, предназначенный для построения трехмерных полей скоростей движения водной среды.

Ледяная пластина; ячейка; гидродинамика; уравнений движения жидкости; уравнений неразрывности; заполненность.

Hekmat Kandalfit

TREE-DIMENSIONAL MATHEMATICAL MODEL OF A MOTION OF THE AQUATIC ENVIRONMENT, THE SURFACE OF WHICH IS COVERED BY ICE PLATE

This article is dedicated to the development of mathematical approaches of the study of hydrodynamic processes in an homogeneous fluid, the surface of the active stresses and initial disturbances. A mathematical model of the motion of w in the reservoir is partially covered by ice plate. For this task, the numerical solution determines the behavior of the fluid under these conditions. It creates a three-dimensional discrete finite-volume model describing the hydrodynamic processes, taking into account the ice cover on the surface. Designed program was developed to build three-dimensional velocity fields of motion of the aquatic environment in the event of mathematical modeling of the reservoir area covered by an ice layer. The numerical model is three-dimensional; the decision is based on the Navier-Stokes approximations. To construct a numerical algorithm, a method of splitting by physical processes was used.

The ice plate; hydrodynamics; the equations of fluid motion; the equations of continuity; the occupancy rate.

Введение. Решению задач гидродинамики посвящено много научных трудов. В работе [3] была предложена трехмерная модель движения водной среды в мелководных водоемах. В [4] построена двумерная в вертикальной плоскости модель движения волн для водоема с нелинейной функцией рельефа дна. В [5] были приведены расчеты прибрежных волновых процессов, при этом учитывалось динамическое изменение геометрии расчетной области. В [6] смоделированы двумерные гидродинамические процессы при обтекании надводного объекта. В данной работе предложена трехмерная модель движения водной среды при наличии на поверхности надводного объекта.

1. Постановка задачи. Рассматривается задача волновой динамики жидкости. Исходными уравнениями являются:

– уравнение Навье–Стокса

$$u'_t + uu'_x + vv'_y + ww'_z = \frac{-P'_x}{\rho} + (\mu u'_x)'_x + (\eta v'_y)'_y + (\xi w'_z)'_z; \quad (1)$$

$$v'_t + uv'_x + vv'_y + wv'_z = \frac{-P'_y}{\rho} + (\mu v'_x)'_x + (\eta v'_y)'_y + (\xi v'_z)'_z; \quad (2)$$

$$w'_t + uw'_x + vw'_y + ww'_z = \frac{-P'_z}{\rho} + (\mu w'_x)'_x + (\eta w'_y)'_y + (\xi w'_z)'_z + g; \quad (3)$$

– уравнение неразрывности

$$u'_x + v'_y + w'_z = 0. \quad (4)$$

Уравнения (1)–(4) рассматриваются при следующих граничных условиях:

– на дне водоема

$$\rho_s \eta u'_y(x, y, z, t) = -\tau_x(t), \rho_s \xi v'_z(x, y, z, t) = -\tau_y(t), P'_n(x, y, z, t) = 0, V(x, y, z, t) = 0; \quad (5)$$

– на свободной поверхности жидкости

$$w'_z(x, y, z, t) = \frac{P'_t}{g\rho}, P'_n(x, y, z, t) = 0, V(x, y, z, t) = 0; \quad (6)$$

– на поверхности жидкости покрытой ледяной пластиной

$$\rho_v \eta u'_y(x, y, z, t) = -\tau_x(t), \rho_v \xi v'_z(x, y, z, t) = -\tau_y(t), P'_n(x, y, z, t) = 0, V(x, y, z, t) = 0; \quad (7)$$

– на входе задается поток от источника

$$u'_x(x, y, z, t) = 0, v'_y(x, y, z, t) = 0, w'_z(x, y, z, t) = 0, P'_n(x, y, z, t) = 0, V(x, y, z, t) = 0; \quad (8)$$

– на выходе

$$u'_x(x, y, z, t) = 0, v'_y(x, y, z, t) = 0, w'_z(x, y, z, t) = 0, P'_n(x, y, z, t) = 0, V(x, y, z, t) = 0; \quad (9)$$

– начальные условия: при моменте $t = 0$ выполняются следующие условия:

$$P = \rho gh, u = 0, v = 0, w = 0,$$

где $V = \{u, v, w\}$ – вектор скорости движения водной среды, P – давление, μ, η – коэффициенты турбулентного обмена по горизонтальным направлениям, ξ – коэффициент турбулентного обмена по вертикальному направлению, g – ускорение свободного падения, ρ – плотность жидкости, ρ_s – плотность суспензии (взвеси). Система координат выбрана таким образом, τ_x, τ_y – тангенциальное напряжение на дне жидкости (закон Ван-Дорна). Система координат выбрана таким образом, что ось Ox, Oy совмещены с поверхностью невозмущенной жидкости и направлена в сторону движения, ось Oz – вертикально вниз.

Имеются разные временные слои два реальных при n , $n+1$ и один промежуточный слой при $n + \sigma$ соответственно можно обозначить $P^{n+1} = \hat{P}$, $P^{n+\sigma} = \check{P}$, $P^{n+\sigma/2} = \bar{P}$, $P^n = P$, $u^{n+1} = \hat{u}$, $u^{n+\sigma} = \check{u}$, $u^{n+\sigma/2} = \bar{u}$, $u^n = u$, $v^{n+1} = \hat{v}$, $v^{n+\sigma} = \check{v}$, $v^{n+\sigma/2} = \bar{v}$, $v^n = v$, $w^{n+1} = \hat{w}$, $w^{n+\sigma} = \check{w}$, $w^{n+\sigma/2} = \bar{w}$, $w^n = w$.

Расщепляя уравнения (1)–(4) по физическим процессам, получим:

$$\frac{\hat{u} - u}{h_t} + uu'_x + vv'_y + ww'_z = (\mu u'_x)'_x + (\eta v'_y)'_y + (\xi w'_z)'_z, \quad (10)$$

$$\frac{\check{v} - v}{h_t} + uv'_x + vv'_y + ww'_z = (\mu v'_x)'_x + (\eta v'_y)'_y + (\xi w'_z)'_z, \quad (11)$$

$$\frac{\hat{w} - w}{h_t} + uw'_x + vv'_y + ww'_z = (\mu w'_x)'_x + (\eta w'_y)'_y + (\xi w'_z)'_z + g, \quad (12)$$

$$\frac{\hat{u} - \check{u}}{h_t} = \frac{-P'_x}{\rho}, \quad \frac{\check{v} - \bar{v}}{h_t} = \frac{-P'_y}{\rho}, \quad \frac{\hat{w} - \bar{w}}{h_t} = \frac{-P'_z}{\rho}. \quad (13)$$

После дифференцирования системы уравнений (13) по x, y, z соответственно, получим:

$$\frac{(\hat{u})'_x - (\check{u})'_x}{h_t} = \frac{-P''_{xx}}{\rho}, \quad \frac{(\check{v})'_y - (\bar{v})'_y}{h_t} = \frac{-P''_{yy}}{\rho}, \quad \frac{(\hat{w})'_z - (\bar{w})'_z}{h_t} = \frac{-P''_{zz}}{\rho}. \quad (14)$$

Суммируя уравнения (14), учитывая уравнение неразрывности (4), получим уравнение

$$P''_{xx} + P''_{yy} + P''_{zz} = \frac{\rho}{h_t} \left((\hat{u})'_x + (\check{v})'_y + (\hat{w})'_z \right) \quad (15)$$

Расчет задач гидродинамики по данному методу осуществляется в три этапа. На первом этапе считается поле скоростей на промежуточном временном слое (10)–(12). На втором этапе рассчитывается давление (15). На третьем этапе уточняется поле скоростей по давлению (14).

Дискретная модель гидродинамики. Для аппроксимации задачи применяется интегро-интерполяционный метод [2]. Расчетные ячейки представляют собой параллелепипед, они могут быть заполненными, частично заполненными или пустыми. Вводятся коэффициенты $q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6$, описывающие заполненность областей [5], находящихся в окрестности ячейки. Значение q_0 , характеризует заполненность всей области. Заполненные части областей Ω_m будем называть D_m , где $m = \overline{0...6}$. В соответствии с этим коэффициенты q_m можно вычислить по формулам:

$$(q_m)_{i,j,k} = \frac{S_{D_m}}{S_{\Omega_m}},$$

Дискретный аналог математической модели гидродинамики (1)–(9) может быть представлен следующими сеточными уравнениями:

♦ для составляющей вектора скорости $u_{i,j,k}$:

$$(q_0)_{i,j,k} \frac{\bar{u}_{i,j,k} - u_{i,j,k}}{h_t} + (q_1)_{i,j,k} u_{i+1/2,j,k} \frac{\bar{u}_{i+1,j,k} - \bar{u}_{i,j,k}}{2h_x} + (q_2)_{i,j,k} u_{i-1/2,j,k} \frac{\bar{u}_{i,j,k} - \bar{u}_{i-1,j,k}}{2h_x} + (q_3)_{i,j,k} v_{i,j+1/2,k} \frac{\bar{u}_{i,j+1,k} - \bar{u}_{i,j,k}}{2h_y} + (q_4)_{i,j,k} v_{i,j-1/2,k} \frac{\bar{u}_{i,j,k} - \bar{u}_{i,j-1,k}}{2h_y} +$$

$$\begin{aligned}
 & + (q_5)_{i,j,k} w_{i,j,k+1/2} \frac{\check{u}_{i,j,k+1} - \check{u}_{i,j,k}}{2h_z} + (q_6)_{i,j,k} w_{i,j,k-1/2} \frac{\check{u}_{i,j,k} - \check{u}_{i,j,k-1}}{2h_z} = \\
 & = (q_1)_{i,j,k} \mu_{i+1/2,j,k} \frac{\check{u}_{i+1,j,k} - \check{u}_{i,j,k}}{h_x^2} - (q_2)_{i,j,k} \mu_{i-1/2,j,k} \frac{\check{u}_{i,j,k} - \check{u}_{i-1,j,k}}{h_x^2} + \\
 & + (q_3)_{i,j,k} \eta_{i,j+1/2,k} \frac{u_{i,j+1,k} - u_{i,j,k}}{h_y^2} - (q_4)_{i,j,k} \eta_{i,j-1/2,k} \frac{u_{i,j,k} - u_{i,j-1,k}}{h_y^2} + \\
 & + \left((q_3)_{i,j,k} - (q_4)_{i,j,k} \right) \frac{\tau_x}{\rho h_y} (m_1)_{i,j,k} + \\
 & + (q_5)_{i,j,k} \xi_{i,j,k+1/2} \frac{\check{u}_{i,j,k+1} - \check{u}_{i,j,k}}{h_z^2} - (q_6)_{i,j,k} \xi_{i,j,k-1/2} \frac{\check{u}_{i,j,k} - \check{u}_{i,j,k-1}}{h_z^2}; \quad (16)
 \end{aligned}$$

◆ для составляющей вектора скорости $v_{i,j,k}$:

$$\begin{aligned}
 & (q_0)_{i,j,k} \frac{\check{v}_{i,j,k} - v_{i,j,k}}{h_t} + (q_1)_{i,j,k} u_{i+1/2,j,k} \frac{\check{v}_{i+1,j,k} - \check{v}_{i,j,k}}{2h_x} + (q_2)_{i,j,k} u_{i-1/2,j,k} \frac{\check{v}_{i,j,k} - \check{v}_{i-1,j,k}}{2h_x} + \\
 & + (q_3)_{i,j,k} v_{i,j+1/2,k} \frac{\check{v}_{i,j+1,k} - \check{v}_{i,j,k}}{2h_y} + (q_4)_{i,j,k} v_{i,j-1/2,k} \frac{\check{v}_{i,j,k} - \check{v}_{i,j-1,k}}{2h_y} + \\
 & + (q_5)_{i,j,k} w_{i,j,k+1/2} \frac{\check{v}_{i,j,k+1} - \check{v}_{i,j,k}}{2h_z} + (q_6)_{i,j,k} w_{i,j,k-1/2} \frac{\check{v}_{i,j,k} - \check{v}_{i,j,k-1}}{2h_z} = \\
 & = (q_1)_{i,j,k} \mu_{i+1/2,j,k} \frac{\check{v}_{i+1,j,k} - \check{v}_{i,j,k}}{h_x^2} - (q_2)_{i,j,k} \mu_{i-1/2,j,k} \frac{\check{v}_{i,j,k} - \check{v}_{i-1,j,k}}{h_x^2} + \\
 & + (q_3)_{i,j,k} \eta_{i,j+1/2,k} \frac{\check{v}_{i,j+1,k} - \check{v}_{i,j,k}}{h_y^2} - (q_4)_{i,j,k} \eta_{i,j-1/2,k} \frac{\check{v}_{i,j,k} - \check{v}_{i,j-1,k}}{h_y^2} + \\
 & + \left((q_3)_{i,j,k} - (q_4)_{i,j,k} \right) \frac{\tau_x}{\rho h_y} (m_1)_{i,j,k} + \\
 & + (q_5)_{i,j,k} \xi_{i,j,k+1/2} \frac{\check{v}_{i,j,k+1} - \check{v}_{i,j,k}}{h_z^2} - (q_6)_{i,j,k} \xi_{i,j,k-1/2} \frac{\check{v}_{i,j,k} - \check{v}_{i,j,k-1}}{h_z^2}; \quad (17)
 \end{aligned}$$

◆ для составляющей вектора скорости $w_{i,j,k}$:

$$\begin{aligned}
 & (q_0)_{i,j,k} \frac{\check{w}_{i,j,k} - w_{i,j,k}}{h_t} + (q_1)_{i,j,k} u_{i+1/2,j,k} \frac{\check{w}_{i+1,j,k} - \check{w}_{i,j,k}}{2h_x} + (q_2)_{i,j,k} u_{i-1/2,j,k} \frac{\check{w}_{i,j,k} - \check{w}_{i-1,j,k}}{2h_x} + \\
 & + (q_3)_{i,j,k} v_{i,j+1/2,k} \frac{\check{w}_{i,j+1,k} - \check{w}_{i,j,k}}{2h_y} + (q_4)_{i,j,k} v_{i,j-1/2,k} \frac{\check{w}_{i,j,k} - \check{w}_{i,j-1,k}}{2h_y} + \\
 & + (q_5)_{i,j,k} w_{i,j,k+1/2} \frac{\check{w}_{i,j,k+1} - \check{w}_{i,j,k}}{2h_z} + (q_6)_{i,j,k} w_{i,j,k-1/2} \frac{\check{w}_{i,j,k} - \check{w}_{i,j,k-1}}{2h_z} = \\
 & = (q_1)_{i,j,k} \mu_{i+1/2,j,k} \frac{\check{w}_{i+1,j,k} - \check{w}_{i,j,k}}{h_x^2} - (q_2)_{i,j,k} \mu_{i-1/2,j,k} \frac{\check{w}_{i,j,k} - \check{w}_{i-1,j,k}}{h_x^2} +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (q_3)_{i,j,k} \eta_{i,j+1/2,k} \frac{\tilde{w}_{i,j+1,k} - \tilde{w}_{i,j,k}}{h_y^2} - (q_4)_{i,j,k} \eta_{i,j-1/2,k} \frac{\tilde{w}_{i,j,k} - \tilde{w}_{i,j-1,k}}{h_y^2} + \\
& + (q_5)_{i,j,k} \xi_{i,j,k+1/2} \frac{\tilde{w}_{i,j,k+1} - \tilde{w}_{i,j,k}}{h_z^2} - (q_6)_{i,j,k} \xi_{i,j,k-1/2} \frac{\tilde{w}_{i,j,k} - \tilde{w}_{i,j,k-1}}{h_z^2} + \\
& + \left((q_1)_{i,j,k} - (q_2)_{i,j,k} \right) \frac{\tau_z}{\rho h_x} (m_1)_{i,j,k} + (q_0)_{i,j,k} g. \quad (18)
\end{aligned}$$

◆ сеточными уравнениями для расчета поля давления:

$$\begin{aligned}
& (q_1)_{i,j,k} \frac{P_{i+1,j,k} - P_{i,j,k}}{h_x^2} - (q_2)_{i,j,k} \frac{P_{i,j,k} - P_{i-1,j,k}}{h_x^2} + (q_3)_{i,j,k} \frac{P_{i,j+1,k} - P_{i,j,k}}{h_y^2} - \\
& - (q_4)_{i,j,k} \frac{P_{i,j,k} - P_{i,j-1,k}}{h_y^2} + (q_5)_{i,j,k} \frac{P_{i,j,k+1} - P_{i,j,k}}{h_z^2} - (q_6)_{i,j,k} \frac{P_{i,j,k} - P_{i,j,k-1}}{h_z^2} - \\
& - \frac{\alpha(m_1)_{i,j,k}}{h_x} \left((q_1)_{i,j,k} - (q_2)_{i,j,k} \right) - \frac{\alpha(m_2)_{i,j,k}}{h_y} \left((q_3)_{i,j,k} - (q_4)_{i,j,k} \right) = \\
& = \frac{\rho}{h_t} \left(\frac{(q_1)_{i,j,k} \tilde{u}_{i+1/2,j,k} - (q_2)_{i,j,k} \tilde{u}_{i-1/2,j,k}}{h_x} + \frac{(q_3)_{i,j,k} \tilde{u}_{i,j+1/2,k} - (q_4)_{i,j,k} \tilde{u}_{i,j-1/2,k}}{h_y} + \right. \\
& \left. + \frac{(q_5)_{i,j,k} \tilde{u}_{i,j,k+1/2} - (q_6)_{i,j,k} \tilde{u}_{i,j,k-1/2}}{h_z} \right) - \frac{\left((q_5)_{i,j,k} - (q_6)_{i,j,k} \right) \left(\hat{P}_{i,j,k} - P_{i,j,k} \right)}{gh_z \tau^2} H \left((q_5)_{i,j,k} - (q_6)_{i,j,k} \right); \quad (19)
\end{aligned}$$

◆ уравнениями для уточнения поля скоростей по давлению:

$$(q_0)_{i,j,k} \frac{\ddot{u}_{i,j,k} - \tilde{u}_{i,j,k}}{h_t} = - \left((q_1)_{i,j,k} \frac{\ddot{P}_{i+1,j,k} - \ddot{P}_{i,j,k}}{2h_x \rho} + (q_2)_{i,j,k} \frac{\ddot{P}_{i,j,k} - \ddot{P}_{i-1,j,k}}{2h_x \rho} \right), \quad (20)$$

$$(q_0)_{i,j,k} \frac{\ddot{v}_{i,j,k} - \tilde{v}_{i,j,k}}{h_t} = - \left((q_3)_{i,j,k} \frac{\ddot{P}_{i,j+1,k} - \ddot{P}_{i,j,k}}{2h_y \rho} + (q_4)_{i,j,k} \frac{\ddot{P}_{i,j,k} - \ddot{P}_{i,j-1,k}}{2h_y \rho} \right), \quad (21)$$

$$(q_0)_{i,j,k} \frac{\ddot{w}_{i,j,k} - \tilde{w}_{i,j,k}}{h_t} = - \left((q_5)_{i,j,k} \frac{\ddot{P}_{i,j,k+1} - \ddot{P}_{i,j,k}}{2h_z \rho} + (q_6)_{i,j,k} \frac{\ddot{P}_{i,j,k} - \ddot{P}_{i,j,k-1}}{2h_z \rho} \right), \quad (22)$$

где параметры: m_1 , m_2 – «маски» граничных условий.

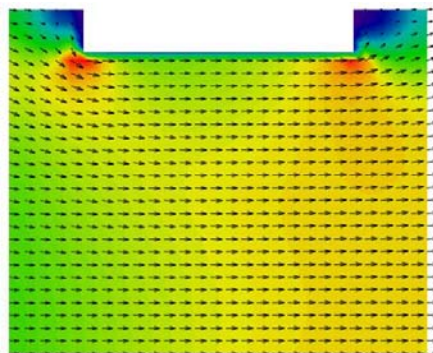


Рис. 1. Поле вектора скоростей жидкости вид с боку сечения (xOz , $y=l/2$)

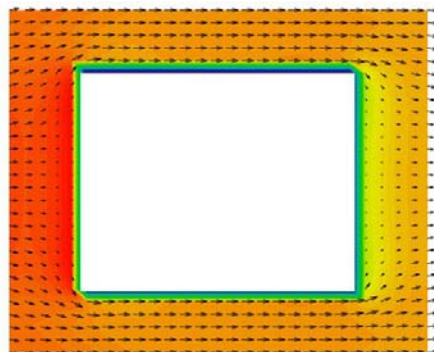


Рис. 2. Поле вектора скоростей жидкости сечение (xOy , $z=0$)

Результаты численных экспериментов расчета движения водной среды, частично покрытой ледяной пластиной, на основе разработанных алгоритмов, представлены на рис. 1 и 2, где изображена динамика набегающего к пластине потока воды видом сверху – рис. 1, и видом с боку – рис. 2.

Расчеты производились на сетках размером: $N_x \times N_y \times N_z = 30 \times 30 \times 30$ с шагами по оси x , y , z , соответствующими $h_x=1$, $h_y=1$, $h_z=1$, границы по пространству $l_x = N_x h_x$, $l_y = N_y h_y$, $l_z = N_z h_z$.

Выводы. Разработана трехмерная математическая модель для расчета полей скоростей; приведена программная реализация математической модели для расчета полей скоростей водной среды; выполнен численный эксперимент, построены картины потока воды водоема при наличии на поверхности водоема надводного объекта.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. – М.: Физматлит, 2001. – 320 с.
2. Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1989.
3. Чистяков А.Е. Трехмерная модель движения водной среды в Азовском море. Молодежь и современные информационные технологии. Сб. трудов VI Всероссийской научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых. – Томск, 26-28 февраля 2008 г. – С. 484-485.
4. Тимофеева Е.Ф. Математическая модель движения волн для водоема с нелинейной функцией рельефа дна // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2010. – № 6 (107). – С. 95-102.
5. Сухинов А.И., Тимофеева Е.Ф., Чистяков А.Е. Построение и исследование дискретной математической модели расчета прибрежных волновых процессов // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2011. – № 8 (121). – С. 22-32.
6. Фоменко Н.А. Моделирование гидродинамических процессов при обтекании корпуса судна // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2011. – № 8 (121). – С. 139-147.

Статью рекомендовал к опубликованию д.т.н., профессор Н.И. Чернов.

Кандалфт Хекмат – Технологический институт федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Южный федеральный университет» в г. Таганроге; e-mail: hekmat_81@live.ru; 347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44; тел.: +79518316913; кафедра высшей математики; аспирант.

Hekmat Kandalf – Taganrog Institute of Technology – Federal State-Owned Autonomy Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”; e-mail: hekmat_81@live.ru; 44, Nekrasovsky, Taganrog, 347928, Russia; phone: +79518316913; the department of higher mathematics; postgraduate student.