

Косенко Олеся Валентиновна – Технологический институт федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Южный федеральный университет» в г. Таганроге; e-mail: O_kosenko@mail.ru; 347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44; тел.: 88634371689; кафедра систем автоматического управления; аспирантка.

Kosenko Olesya Valentinovna – Taganrog Institute of Technology – Federal State-Owned Autonomy Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”; e-mail: O_kosenko@mail.ru; 44, Nekrasovsky, Taganrog, 347928, Russia; phone: +78634371689; the department of automatic control systems; postgraduate student.

УДК 519.816

Е.С. Никул

АЛГОРИТМ АНАЛИЗА МАТРИЦ ПАРНЫХ СРАВНЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ ВЫЧИСЛЕНИЯ ВЕКТОРОВ ПРИОРИТЕТОВ

Рассматривается: алгоритм анализа матриц парных сравнений с помощью вычисления векторов приоритетов, его достоинства и недостатки, сравниваются два метода оценки: с использованием шкалы относительной важности и путем вычисления соотношений на основе заданных значений, осуществляются расчеты по определению относительных приоритетов факторов и значение согласованности оценок, даются примеры вычисления векторов приоритетов матрицы парных сравнений.

Метод парных сравнений; анализ матрицы парных сравнений; вычисление собственных векторов; алгоритм вычисления векторов приоритетов; относительные величины характеристик важности; достоверность результатов.

E.S. Nickul

ALGORITHM FOR ANALYZING MATRICES OF PAIRWISE COMPARISONS BY CALCULATING VECTORS OF PRIORITIES

In article it is considered: an analysis algorithm of matrixes of pair comparisons by means of calculation of vectors of priorities, its merits and demerits, are compared two methods of an estimation: with use of a scale of relative importance and by calculation of parities on the basis of preset values, calculations by definition of relative priorities of factors and value of a coordination of estimations are carried out, examples of calculation of vectors of priorities of a matrix of pair comparisons are given.

Method of paired comparisons; analysis of the matrix of pairwise comparisons; the computation of eigenvectors; an algorithm for calculating vectors of priorities; the relative values of the characteristics of importance; the reliability of the results.

Основным элементом для представления интенсивности взаимовлияния факторов является матрица парных сравнений. Факторы, находящиеся на одном уровне обладают одинаковыми наборами показателей. Значения этих показателей для каждого фактора различные. Конечной целью сравнения факторов – выяснить их рейтинг среди рассматриваемого множества, причем, *рейтинг* стремятся получить в виде количественной индивидуальной оценки. Сначала рассматривают факторы, находящиеся на самом нижнем уровне (альтернативы) и попарно сравнивают друг с другом. При сравнении пары факторов исследователь стремится установить насколько один фактор лучше (хуже) другого, что выражается установлением количественной оценки. Просмотрев все сочетания возможных пар факторов, и установив между ними оценки взаимного влияния, исследователь получает матрицу парных сравнений.

Метод парных сравнений (точнее модификация по Т. Саати) заключается в сравнении изучаемых факторов (альтернатив, критериев) между собой. Факторы сравниваются попарно по отношению к их воздействию («весу», или «интенсивности») на общую для них характеристику [3].

Обозначим через A_1, A_2, \dots, A_n основные факторы. Тогда для определения важности фактора заполняется матрица парных сравнений. Если обозначить долю фактора A_i через w_i (оценка, которую проставляет ЛППР или эксперт, в соответствии с выбранной шкалой), то элемент матрицы $a_{ij} = w_i / w_j$, которая представлена в табл. 1. Таким образом, в предлагаемом варианте применения метода парных сравнений, определяются не величины разностей значений факторов, а их отношение, при этом очевидно $a_{ij} = 1/a_{ji}$.

Таблица 1

Общее представление матрицы парных сравнений

	A1	A2	...	An
A1	1	a_{12}		a_{1n}
A2	a_{21}	1		a_{2n}
...			...	
An	a_{n1}	a_{n2}		1

Матрица парных сравнений в данном случае является положительно определенной, обратносимметричной матрицей, имеющей ранг, равный 1. Особенностью обратносимметричной матрицы парных сравнений является:

1) на главной диагонали всегда должна стоять оценка, равная 1 (равная важность, сравниваемых факторов, критериев, альтернатив), т.е. $a_{ij} = a_{ji}$ при $i=j$;

2) всегда должно выдерживаться соотношение, отвечающее условию: если при сравнении i -го фактора с j -м фактором ставится оценка a_{ij} , то при сравнении j -го фактора с i -м, оценка a_{ji} должна быть обратной a_{ij} , т.е. $a_{ji} = 1/a_{ij}$.

Работа экспертов состоит в том, что, производя попарное сравнение факторов A_1, \dots, A_n , необходимо заполнить таблицу парных сравнений. Если w_1, w_2, \dots, w_n неизвестны заранее, то попарные сравнения элементов производятся с использованием субъективных суждений, численно оцениваемых по шкале, а затем решается проблема нахождения компонента w .

В подобной постановке задачи решение проблемы состоит в отыскании вектора (w_1, w_2, \dots, w_n) . Существует несколько различных способов вычисления искомого вектора. Каждый из методов позволяет, кроме непосредственного нахождения вектора отвечать еще на некоторые дополнительные вопросы.

Предположим, что необходимо провести сравнение для четырех факторов, которые сравниваются по критерию, имеющего конкретные численные значения, выраженные в условных единицах (например, критерием является фактор опасности взрыва при перегреве). Графическое представление параметров факторов, опасность которых, выражена в условных единицах, представлено на рис. 1. Легко заметить, что наиболее важным среди рассматриваемых факторов, является фактор A3 (опасность которого равна 9 у.е.), а наименее предпочтительным фактором является фактор A4.

В рассматриваемом примере критерий «опасность» имеет для каждого фактора численное значение, следовательно, нет необходимости проводить какие-либо вычисления, чтобы сказать, какой из факторов более предпочтителен, кроме того, можно совершенно точно сказать, во сколько раз один фактор опаснее другого или наоборот, проведя не сложные вычисления. Но для понимания смысла рейтингования методом парных сравнений по методу Т. Саати, проведем все необходимые действия, и покажем конечный результат. Просматривая данные, которые

отображены в виде гистограммы на рис. 1, можно сделать заключение, что самым предпочтительным фактором (при условии, что необходимо установить приоритеты для факторов по наибольшей опасности) является фактор А3, далее следуют факторы А1, А2 и А4. Исследователь фактически выстраивает логическую цепочку приоритетов: $A3 > A1 > A2 > A4$, где знак «>» обозначает превосходство одного фактора над другим. При заполнении матрицы парных сравнений, с использованием шкалы относительной важности, предложенной Т. Саати, матрица парных сравнений, для рассматриваемого примера, будет выглядеть, как это показано в табл. 2. Вероятней всего рассуждения исследователя будут выглядеть так: фактор А3 имеет очень сильное превосходство над фактором А4, поэтому на пересечении строки А3 и столбца А4 можно поставить оценку, равную 9. При сравнении фактора А1 с другими факторами, строку для А1 можно заполнить, как это показано в табл. 2. Действительно, только фактор А3 имеет преобладание (не значительно опаснее) над фактором А1, поэтому, установлена оценка, равная 1/3, т.е. $a_{13} = 1/3$.



Рис. 1. Графическое представление факторов опасности, выраженных в условных единицах

Дроби, показанные в матрице (табл. 2), приведены для того, чтобы было видно, что это обратная величина сравнения двух факторов. Например, при сравнении факторов А1 и А2 будем иметь соответствующие оценки: $a_{12} = 5$, а для $a_{21} = 1/5$. Проведя суммирование оценок по столбцам матрицы парных сравнений, получаем абсолютные суммарные веса для каждого фактора. Следует отметить, что чем меньше значение суммы элементов столбца матрицы, тем выше рейтинг фактора. Имея вектор суммарных значений весов, можно предварительно сделать заключение о рейтинговании факторов по заданному критерию. В табл. 3 представлены результаты, полученные путем вычисления соотношений опасности, сравниваемых факторов на основе заданных численных значений. Отношения опасности между парами факторов в табл. 3 показаны в виде дробей, а итоговая строка таблицы отображает сумму по столбцам.

Таблица 2

Формирование матрицы на основе использования значений шкалы относительной важности

	Фактор А1	Фактор А2	Фактор А3	Фактор А4
Фактор А1	1	5	1/3	7
Фактор А2	1/5	1	1/5	3
Фактор А3	3	5	1	9
Фактор А4	1/7	1/3	1/9	1
Сумма	4,34	11,33	1,64	20,00

Таблица 3

**Формирование матрицы путем вычисления соотношений опасностей
сравниваемых факторов**

	Фактор А1	Фактор А2	Фактор А3	Фактор А4
Фактор А1	1	7/2	7/9	7/1
Фактор А2	2/7	1	2/9	2/1
Фактор А3	9/7	9/2	1	9/1
Фактор А4	1/7	1/2	1/9	1
Сумма	2,71	9,50	2,11	19,00

Как видно из табл. 3, приоритеты для рассматриваемых факторов сохранились, хотя итоговые суммы по столбцам несколько отличаются от результатов, полученных в табл. 2. Естественно, перед исследователем встают два вопроса:

1) как получить относительные величины, которые характеризуют важность каждого фактора в рассматриваемой ситуации;

2) как определить достоверность результатов, полученных при выборе оценок относительной важности из шкалы оценок Т. Саати.

Для ответа на поставленные вопросы осуществляются расчеты по определению относительных приоритетов факторов и значение согласованности оценок, которые проставил эксперт.

Рассмотрим теперь квадратную положительную матрицу порядка n , которая получена в результате парных сравнений n факторов:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Матрица A называется обратносимметричной, если для любых i и j выполняется соотношение: $A_{ji} = 1 / a_{ij}$. Из этого, в частности, следует, что $a_{ii} = 1$. Тем самым, идеальная матрица сравнений – обратносимметричная и согласованная. При этом справедливо следующее утверждение: положительная обратносимметричная матрица является согласованной тогда и только тогда, когда порядок матрицы и ее наибольшее собственное значение совпадают, т.е. $\lambda_{\max} = n$.

Собственный вектор матрицы суждений обеспечивает упорядочение приоритетов, часто значения собственного вектора матрицы парных сравнений называют вектором приоритетов, а собственное значение является мерой согласованности суждений. Таким образом, следующим шагом, после составления матрицы суждений (матрицы парных сравнений), является вычисление вектора приоритетов. Относительная сила, величина или вероятность каждого отдельного фактора в иерархии определяется оценкой соответствующего ему элемента собственного вектора матрицы приоритетов, нормализованного к единице. Метод отыскания вектора w основывается на одном из утверждений линейной алгебры – искомый вектор является собственным вектором матрицы парных сравнений, соответствующим максимальному собственному числу (λ_{\max}). В этом случае отыскивается λ_{\max} , а затем достаточно решить векторное уравнение $A*w = \lambda_{\max}*w$.

Процедура определения собственных векторов матриц поддается приближению, опишем способ приближенного вычисления собственного столбца методом среднего геометрического измерения расстояний между оцениваемыми факторами [1].

$\hat{k}_{geom} = \sqrt[n]{k_1 \cdot k_1 \cdot \dots \cdot k_n}$, где n – количество оцениваемых факторов (критериев, альтернатив).

Алгоритм вычисления среднего геометрического состоит из следующих шагов:

- 1) перемножаем элементы каждой строки и записываем полученные результаты в столбец;
- 2) извлекаем корень n -й степени из каждого элемента найденного столбца;
- 3) складываем элементы этого столбца;
- 4) делим каждый из этих элементов на полученную сумму.

Нормализованную оценку для j -го фактора принято обозначать, как \hat{k}_j , где j – обозначение фактора по строке в матрице парных сравнений [2]. Пользуясь способом приближенного вычисления собственных элементов матрицы парных сравнений, определим собственный столбец (вектор приоритетов) для рассматриваемых четырех факторов по критерию «опасность». Далее необходимо осуществить операцию нормализации вектора приоритетов, что отражено в последнем столбце табл. 4.

Таблица 4

Матрица парных сравнений для факторов с установкой оценок по шкале Т. Саати

	Фактор А1	Фактор А2	Фактор А3	Фактор А4	Вектор приоритетов	Нормализованные оценки вектора приоритета \hat{k}_j
Фактор А1	1	5	1/3	7	1,848148	0,302228
Фактор А2	1/5	1	1/5	3	0,588566	0,096248
Фактор А3	3	5	1	9	3,408658	0,557419
Фактор А4	1/7	1/3	1/9	1	0,269702	0,044104
Сумма	4,3429	11,333	1,6444	20,000	6,115074	1

При вычислении собственных векторов (вектора приоритетов) матрицы парных сравнений, когда существуют вместо дискретной шкалы оценок относительной важности факторов точные значения отношений при парном сравнении (непрерывная шкала измерений), тогда матрица парных сравнений будет содержать «идеальные» значения вектора приоритетов. Проведем вычисления вектора приоритетов для примера, который рассматривался ранее, а данные парных сравнений отображены в табл. 6. Вычисления вектора приоритетов осуществляются методом геометрической средней, а результаты представим в табл. 5. В предложенной табл. 5 значения парных сравнений факторов показаны в виде реальных значений, полученных при осуществлении операции деления опасности одного фактора на опасность другого фактора. Например, при выяснении на сколько фактор А1 превосходит фактор А3, необходимо выполнить простое деление, т.е. $a_{13} = 7 / 9 = 0,778$.

Таблица 5

Матрица парных сравнений с установкой вычисленных оценок соотношений между факторами

	Фактор А1	Фактор А2	Фактор А3	Фактор А4	Вектор приоритетов	Нормализованные оценки вектора приоритета \hat{k}_j
Фактор А1	1,000	3,500	0,778	7,000	2,089322	0,368421
Фактор А2	0,286	1,000	0,222	2,000	0,596949	0,105263
Фактор А3	1,286	4,500	1,000	9,000	2,686271	0,473684
Фактор А4	0,143	0,500	0,111	1,000	0,298475	0,052632
Сумма	2,7143	9,5000	2,1111	19,000	5,671017	1

Сумма всех нормализованных элементов полученного собственного столбца (его называют вектором приоритетов) равна 1. Он позволяет подвести итог проведенному анализу таблицы сравнений, среди рассматриваемых факторов А1, А2, А3 и А4. В обоих случаях (как и следовало ожидать) наивысший приоритет имеет фактор А3, затем идут факторы А1, А2 и А4 соответственно. Расчеты итоговых сумм оценок относительной важности для рассматриваемого примера приведены в табл. 6. Вариант 1 соответствует процедуре установления относительной важности факторов по методу Т. Саати, вариант 2 отражает установление приоритетов факторов вычислением прямого деления опасности одного фактора на опасность другого фактора. При анализе таблицы видны некоторые расхождения в окончательных результатах. При использовании дискретной шкалы для парных сравнений, накапливается некоторая статистическая ошибка, которую необходимо учитывать при определении значимости каждого фактора.

Таблица 6

Значения суммарных величин оценок после проведения процедуры парных сравнений (вариант 1 использован метод Т.Саати), вариант 2 – вычисление приоритетов прямым делением значений опасности фактора на опасность другого фактора

	Фактор А1	Фактор А2	Фактор А3	Фактор А4
Сумма оценок относительной важности факторов с оценками по шкале Т. Саати (вариант 1)	4,3429	11,3333	1,6444	20,0000
Сумма оценок, вычисленных прямым делением значений опасности фактора на опасность другого фактора (вариант 2)	2,7143	9,5000	2,1111	19,0000

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Коробов В.Б.* Сравнительный анализ методов определения весовых коэффициентов «влияющих факторов» // Социология. – 2005. – № 20. – С. 54-72.
2. *Саати Т., Кернс К.* Аналитическое планирование. – М.: Радио и связь, 1991. – 224 с.
3. *Саати Т.* Принятие решений. Метод анализа иерархий. – М.: Радио и связь, 1993. – 278 с.
4. *Никул Е.С.* Алгоритм формализации знаний экспертов. Актуальные вопросы исследования общественных и технических систем. – Таганрог: ТТИ ЮФУ, 2011. – С. 48-50.

Статью рекомендовал к опубликованию д.т.н., профессор В.Е. Золотовский.

Никул Евгений Сергеевич – Технологический институт федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Южный федеральный университет» в г. Таганроге; e-mail: gvrru@mail.ru; 347904, г. Таганрог, ул. Розы Люксембург, 63/1, кв. 56; тел.: 88634611981; кафедра систем автоматического управления; ассистент.

Nickul Eugene Sergeevich – Taganrog Institute of Technology – Federal State-Owned Autonomy Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”; e-mail: gvrru@mail.ru; 63/1, Roza Lyuksemburg street, app. 56, Taganrog, 347904, Russia; phone: +78634611981; the department of automatic control systems; assistant.