

**Атакишев Олег Игоревич** – e-mail: AOI007@MAIL.RU; г. Курск, проспект Хрущева, 5, кв. 71; тел.: 84712504800; кафедра программного обеспечения вычислительной техники; проректор Юго-Западного Государственного университета; д.т.н.; профессор.

**Скорняков Кирилл Сергеевич** – e-mail: Skornkir@yandex.ru; г. Курск, ул. Гагарина, 25а, кв. 27; тел.: +79513119161; кафедра программного обеспечения вычислительной техники; студент.

**Заичко Валерий Александрович** – 305040, г. Курск, ул. 50 лет Октября, 94; тел.: 84712504800; соискатель.

**Риос Аурелио Падайя** – 305040, г. Курск, ул. 50 лет Октября, 94; тел.: 84712504800; соискатель.

**Titenko Eugene Anatol'evich** – Kursk "South-West State University"; e-mail: JOHNTIT@MAIL.RU; 16 – 71, Khrushchev Avenue, Kursk, Russia; phone: +79051588904; the department of computer science software; master of science; associate professor.

**Atakischev Oleg Igorevich** – e-mail: AOI007@MAIL.RU; 5 – 71, Khrushchev avenue, Kursk, Russia; phone: +74712504800; the department of computer science software; pro-rector of the South-West State University; dr. of eng. sc.; professor.

**Skorniyakov Cyril Sergeevich** – e-mail: Skornkir@yandex.ru; 25а – 27, Gagarina street, Kursk, Russia; phone: +79513119161; the department of computer science software; student.

**Zaichko Valery Alexandrovich** – 94, 50 Years of October street; Kursk, 305040, Russia; phone: +74712504800; applicant.

**Rios Aurelio Padayya** – 94, 50 Years of October street, Kursk, 305040, Russia; phone: +74712504800; applicant.

УДК 629.7.05

**В.В. Косьянчук**

**АЛГОРИТМ АППРОКСИМАЦИИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ СИНТЕЗА  
МНОГОСВЯЗНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ АНАЛИТИЧЕСКИМИ  
ЗАВИСИМОСТЯМИ\***

*Рассматривается алгоритм аппроксимации решения задачи синтеза многосвязных систем управления, приводимой к линейным уравнениям, аналитическими зависимостями. Вводится понятие приближенного условия разрешимости. Показывается, что в случае удовлетворения приближенного условия разрешимости решение задачи синтеза многосвязных систем управления аппроксимируется аналитическим решением. Это позволяет сохранить все достоинства аналитического решения и при заданной точности аппроксимации.*

*Аналитическое решение линейных матричных уравнений; условие разрешимости; приближенное условие разрешимости.*

**V.V. Kosyanchuk**

**APPROXIMATION ALGORITHM SOLUTION SYNTHESIS OF CONTROL  
SYSTEMS MULTIPLY ANALYTICAL FUNCTION**

*The article deals with the approximation algorithm for solving the problem of synthesis of multiply-control systems, reducible to linear equations, analytical dependences. The notion of approximate solvability conditions. It is shown that in the case meet the conditions for the solva-*

\* Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 12-08-00767.

*bility of the approximate solution to the problem of synthesis of multiply connected control system is approximated by the analytical solution. This allows you to keep all the advantages of analytical solutions and to provide the required accuracy of approximation.*

*Analytical solution of linear matrix equations; the solvability condition; approximate solvability condition.*

**Введение.** Задача синтеза многосвязных систем управления динамическими системами относится к классическим задачам, пережившим несколько периодов своего развития.

Традиционно анализ и синтез управления линейными системами осуществлялся на основе аппарата передаточных функций и ограничивался преимущественно скалярными системами. В начале 60-х годов Р. Калман использовал понятие пространства состояния системы, позволившее существенно продвинуться в изучении многосвязных (матричных) систем. В начале 70-х годов произошел новый толчок в развитии методов анализа и синтеза на основе матричных передаточных функций, а также еще один подход, за которым закрепилось название геометрического подхода.

В конце 90-х годов зародился новый подход к решению различных задач теории систем, названный вложением систем [1] (в дальнейшем трансформировавшийся в аналитический подход), в основу которого были положены процедуры сведения различных задач к решению линейных матричных уравнений, продемонстрированный в работе [2]. Несколько позже была предложена специальная процедура аналитического решения линейных матричных уравнений [3], широко используемая для получения аналитического решения различных задач многосвязного управления [4-16].

Аналитическое решение позволило:

- 1) проанализировать все внутренние взаимосвязи, характерные для объекта управления;
- 2) вскрыть механизм взаимовлияния и использования различных каналов управления для решения задачи управления;
- 3) в случае невозможности получения аналитического решения указать причину неразрешимости задачи и на ее основе сформулировать направления для внесения изменений в систему, позволяющие добиться решения поставленной задачи;
- 4) получить множество эквивалентных решений;
- 5) получить аналитические зависимости коэффициентов усиления системы управления от коэффициентов математической модели объекта, что существенно упростило настройку коэффициентов системы управления по режимам полета и реализацию в бортовом вычислителе.

Суть аналитического подхода состоит в том, что задача синтеза системы управления (регулятора, предкомпенсатора, матрицы реконфигурации и т.д.) сводится к решению уравнений вида

$$AX = B, \quad (1)$$

$$XA = B, \quad (2)$$

где  $A$  и  $B$  – числовые или символьные заданные матрицы параметров (коэффициентов),  $X$  – матрица с неизвестными действительными числовыми или символьными элементами.

В работе [3] доказано, что линейное матричное уравнение (1) разрешимо относительно матрицы  $X$  тогда и только тогда, когда левый делитель нуля матрицы  $A$  максимального ранга является и левым делителем нуля матрицы  $B$ :

$$\bar{A}^L B = 0, \text{ при } \bar{A}^L \neq 0, B \neq 0, \quad (3)$$

а все множество решений матричного уравнения (1) определяется формулой

$$\{X\}_\mu = \tilde{A}B + \bar{A}^R \mu, \quad (4)$$

где  $\mu$  – матрица подходящего размера с произвольными элементами;  $\bar{A}^L, \bar{A}^R$  – матрицы максимального ранга, удовлетворяющие тождествам

$$\bar{A}^L A = 0, \quad A \bar{A}^R = 0, \quad (5)$$

$\tilde{A}$  – матрица, отвечающая условиям регулярности

$$\tilde{A} \tilde{A} \tilde{A} = \tilde{A}, \quad \tilde{A} \tilde{A} = A. \quad (6)$$

Очевидно, что ключевым моментом получения решения (4) является выполнение условия разрешимости (3). В случае выполнения условия (3) уравнение (1) совместно. Тем не менее зачастую встречаются случаи, при которых условие разрешимости (3) не выполняется, а уравнение (1) становится несовместным.

В случае несовместности уравнения (1) возможна минимизация нормы

$$\|AX - B\| \rightarrow \min, \quad (7)$$

и переход к решению, использующему псевдообратную матрицу. В этом случае решение существует всегда, но появляется ряд существенных ограничений, присущих задачам синтеза систем управления. Использование псевдообращения означает переход только к численным решениям, при этом утрачивается принципиальная возможность использования аналитического решения для настройки коэффициентов усиления по режимам полета, продемонстрированная в работе [5].

В связи с этим рассмотрим возможность аппроксимации решения задачи синтеза многосвязных систем управления, приводимой к линейным уравнениям вида (1), аналитическими зависимостями. Это позволит сохранить все достоинства аналитического решения.

**Основной результат.** Причина несовместности решения уравнения (1) заключается в том, что нарушается ранговое условие Кронекера-Капелли, т.е.

$$\text{rank } A \neq \text{rank } [A \mid B]. \quad (8)$$

В связи с этим представляется возможность перейти от точного аналитического решения (4), удовлетворяющего условиям разрешимости (3), к некоторому приближенному решению, также описываемому соотношением (4), но обеспечивающему не строгое равенство (3), а конечное отклонение  $AX - B$ , которое может быть оценено некоторой нормой

$$\|AX - B\| \leq \xi. \quad (9)$$

Введем понятие приближенного условия разрешимости

$$\bar{A}^L B \neq 0, \quad \|\bar{A}^L B\| \leq \varepsilon. \quad (10)$$

Очевидно, что чем меньше  $\varepsilon$ , тем ближе рассматриваемое произведение к нулю, т.е. условие (10) приближается к (3).

Вырожденность матриц можно оценивать сингулярными числами [17]. Чем меньше максимальное сингулярное число, тем ближе матрица к нулевой. Исходя из этого для оценки близости произведения матриц  $\bar{A}^L B$  к нулю, можно воспользоваться понятием спектральной нормы

$$\|\bar{A}^L B\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max} \left( (\bar{A}^L B)^T \bar{A}^L B \right)}, \quad (11)$$

где  $\lambda$  – максимальное сингулярное число матрицы, определяемое на основе SVD (Singular Value Decomposition)-разложения [17]. Тогда, анализируя спектральную норму (11), можно сделать заключение о близости  $\bar{A}^L B$  к нулю.

В качестве нормы в (10) могут быть использованы норма Фробениуса, Евклидова норма  $l^1$ , Евклидова норма  $l^2$  и т.д., по сути, не меняющие главное – оценку степени близости произведения  $\overline{A}^L B$  к нулю.

В случае удовлетворения условия (10), ограниченная норма служит априорным показателем точности решения уравнения (1), гарантирующим удовлетворение условий (9).

В основу выбора чисел  $\varepsilon$  и  $\xi$  может быть положен анализ сингулярных чисел матриц  $A$  и  $B$ . Конкретные рекомендации по выбору  $\varepsilon$  и  $\xi$  будут даны при решении практической задачи.

Алгоритм аппроксимации решения задачи синтеза многосвязных систем управления аналитическими зависимостями сводится к выполнению следующих шагов:

Шаг 1. Проверяется условие разрешимости (3). Если условие выполняется, находится точное решение с использованием (4), если нет, осуществляется переход к следующему шагу.

Шаг 2. Проверяется приближенное условие разрешимости (10). Если условие выполняется, то для нахождения решения также используется (4).

Прагматический смысл этого заключается в следующем. При выполнении приближенного условия разрешимости (10) гарантируется, что задача синтеза системы управления на основе соотношений (4) будет решена с заданной точностью. Это позволяет сохранить все достоинства аналитического решения, например настройку коэффициентов усиления по режимам полета и простоту реализации в СУ ЛА, при заданной точности аппроксимации.

**Пример.** В качестве примера рассмотрим решение задачи сохранения стереотипа управления летчика в случае отказа одного (из двух) отклоняемого вектора тяги и нескольких аэродинамических поверхностей.

Пусть объект управления представлен в виде

$$\dot{x} = A(a,t)x + B(a,t)u, \quad (12)$$

где  $x \in \mathcal{X}^n$ ,  $u \in \mathcal{X}^m$ ,  $A(a,t)$  – матричная функция векторного  $a$  и скалярного  $t$  аргументов,  $B(a,t)$  – матричная функция размера  $n \times m$ ,  $x$  – вектор состояния,  $u$  – вектор управления.

В случае отказа нескольких органов управления, модель объекта примет вид

$$\dot{x}_f = A(a,t)x_f + B(a,t)Fu, \quad (13)$$

где матрица  $F$  представима в виде диагональной матрицы с единицами на главной диагонали и нулями в местах  $i, j, k, \dots$ , соответствующих отказавшему органу управления.

Введем матрицу  $K_p(a,t)$ , обеспечивающую компенсацию последствий отказа путем перераспределения управляющих сигналов по исправным управляющим поверхностям (матрицу реконфигурации). Тогда,

$$\dot{x}_f = A(a,t)x_f + B(a,t)FK_p(a,t)u. \quad (14)$$

Пусть

$$K_p(a,t) = I + R(a,t). \quad (15)$$

Считая, что момент компенсации отказа совпадает с моментом его обнаружения, что соответствует совпадению начальных условий  $x(t_0) = x_f(t_0)$ , равенство векторов состояния до и после отказа  $x = x_f$  достигается при выполнении тождества, записанного в виде линейного матричного уравнения [4]:

$$\underbrace{B(a,t)F}_A \underbrace{R(a,t)}_X = \underbrace{B(a,t) - B(a,t)F}_B. \quad (16)$$

В результате задача реконфигурации сводится к разрешению матричного уравнения (16) относительно неизвестной матрицы  $R(a,t)$ . Матрица  $R(a,t)$  вычисляется по формуле

$$R(a,t) = \overline{B(a,t)F} (B(a,t) - B(a,t)F) + \overline{B(a,t)F}^R \mu, \quad (17)$$

при выполнении условия разрешимости

$$\overline{B(a,t)F}^L B(a,t) = 0. \quad (18)$$

Подставляя (17) в (15), получим

$$K_p(a,t) = I + \overline{B(a,t)F} (B(a,t) - B(a,t)F) + \overline{B(a,t)F}^R \mu. \quad (19)$$

Используем соотношения (19), (18) для обеспечения отказоустойчивости в случае отказа одного (из двух) отклоняемого вектора тяги и нескольких аэродинамических поверхностей.

В качестве модели будем использовать модель маневренного ЛА, описанную в [18] с некоторыми модификациями.

Пусть вектор состояния и управления имеют вид

$$x = [\omega_x \ \omega_y \ \omega_z \ \alpha \ \vartheta \ \gamma \ \beta]^T,$$

$$u = [\varphi_{np} \ \varphi_l \ \delta_{\varphi,np} \ \delta_{\varphi,l} \ \delta_{n,np} \ \delta_{n,l} \ \delta_{п.г.о.} \ \delta_{OBT,np} \ \delta_{OBT,l}]^T,$$

где  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  – угловые скорости крена, рыскания и тангажа;  $\alpha, \vartheta, \gamma, \beta$  – углы атаки, тангажа, крена и скольжения;  $\varphi_{np}, \varphi_l, \delta_{\varphi,np}, \delta_{\varphi,l}, \delta_{n,np}, \delta_{n,l}, \delta_{п.г.о.}, \delta_{OBT,np}, \delta_{OBT,l}$  – углы отклонения от балансирующего положения правых и левых стабилизаторов, флаперонов, рулей направления и переднего горизонтального оперения (ПГО), отклоняемого вектора тяги (OBT) соответственно.

Пусть на одном из режимов полета матрица эффективности органов управления имеет следующее числовое значение

$$B = \begin{bmatrix} -0.47 & 0.472 & -0.298 & 0.298 & -0.021 & -0.021 & 0 & -0.21 & 0.21 \\ 0.013 & -0.013 & 0.012 & -0.012 & -0.046 & -0.046 & 0 & 0.004 & -0.004 \\ -0.170 & -0.170 & -0.001 & -0.001 & 0 & 0 & 0.057 & -0.09 & 0.09 \\ -0.003 & -0.003 & -0.001 & -0.001 & 0 & 0 & -0.0003 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0008 & -0.0008 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим одновременный отказ правого OBT  $\delta_{OBT,np}$ , правого стабилизатора  $\varphi_{np}$ , правого флаперона  $\delta_{\varphi,np}$  и ПГО  $\delta_{п.г.о.}$ .

Проверим условие разрешимости (18). Условие разрешимости не выполняется, следовательно, в соответствии с (10) проверим приближенное условие разрешимости

$$\overline{B(a,t)F}^L B(a,t) \neq 0, \quad \left\| \overline{B(a,t)F}^L B(a,t) \right\| \leq \varepsilon. \quad (20)$$

Определим спектральную норму (11)

$$\| \overline{B(a,t)F^L B(a,t)} \|_2 = 6 \cdot 10^{-6}.$$

Определим норму Фробениуса

$$\| \overline{B(a,t)F^L B(a,t)} \|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n | \overline{B(a,t)F^L B(a,t)}_{ij} |^2} = 6 \cdot 10^{-6}.$$

Значения норм совпадают, но вычисления нормы Фробениуса существенно проще.

Для определения допустимой точности  $\varepsilon$  рассмотрим значения максимальных сингулярных чисел матриц  $B(a,t)$  и  $B(a,t)F$ , которые соответственно равны 0,79 и 0,58. Будем считать, что допустимая точность  $\varepsilon$  должна на 2–3 порядка быть меньше этих чисел.

Следовательно, условие (10) выполняется и можно производить вычисления с использованием (19). Вычисленная матрица реконфигурации примет вид

$$K_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2.2 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & -0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6.2 & 0 & 4.9 & 1 & 0 & 0 & 1.4 & 0 & 0 \\ -0.3 & 0 & -0.3 & 0 & 1 & 0 & -0.07 & 0 & 0 \\ -0.3 & 0 & -0.3 & 0 & 0 & 1 & -0.07 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -6.1 & 0 & -3.8 & 0 & 0 & 0 & -0.5 & -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (21)$$

На рис. 1–6 приведены графики переходных процессов для модели исправного объекта (непрерывная линия) и объекта с отказом (пунктирная линия). На рис. 1, 2 рассматривается отклонение ручки управления по тангажу, на рис. 3, 4 по крену, на рис. 5, 6 – отклонение педалей.

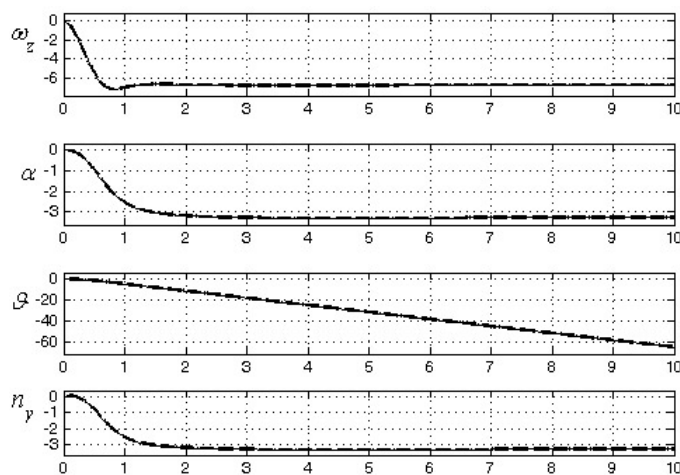


Рис. 1. Графики переходных процессов, продольный канал, отклонение ручки по тангажу

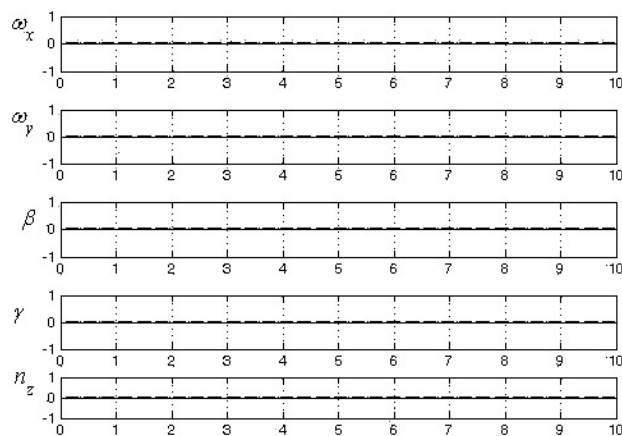


Рис. 2. Графики переходных процессов, боковой канал, отклонение ручки по тангажу

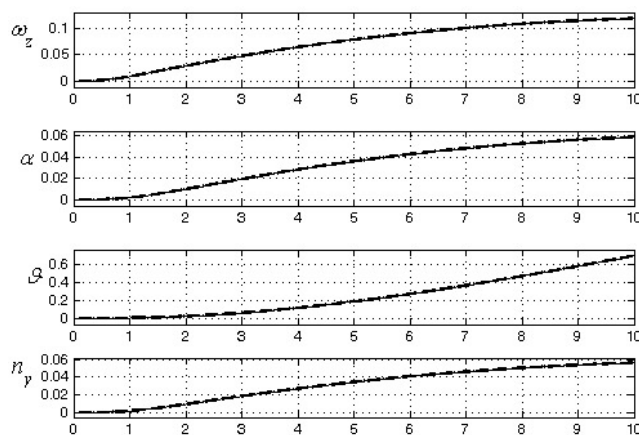


Рис. 3. Графики переходных процессов, продольный канал, отклонение ручки по крену

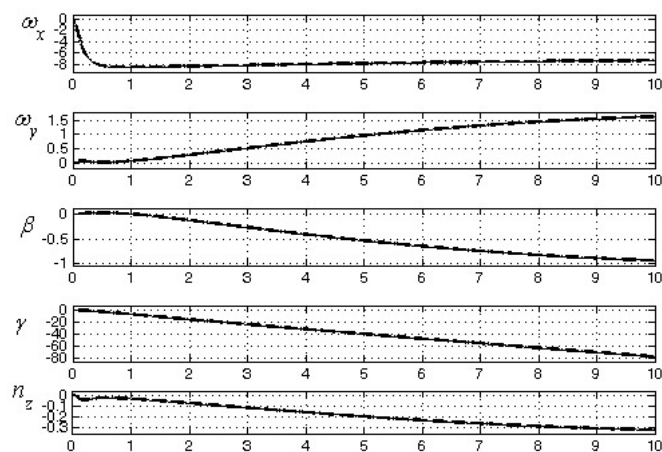


Рис. 4. Графики переходных процессов, боковой канал, отклонение ручки по крену

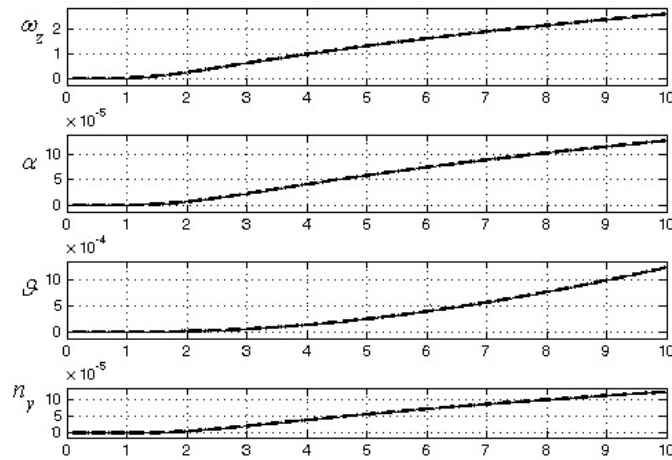


Рис. 5. Графики переходных процессов, продольный канал, отклонение педалей

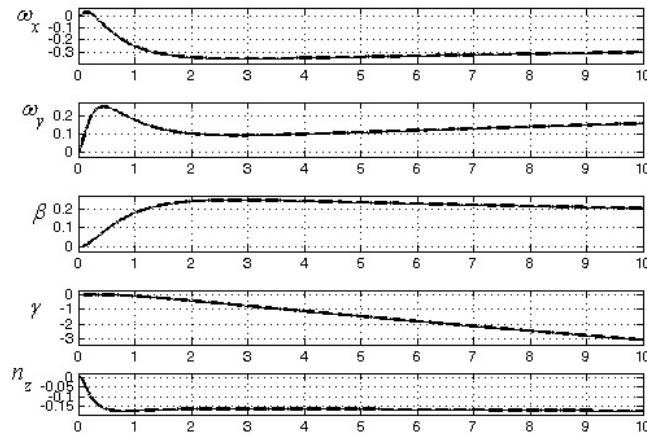


Рис. 6. Графики переходных процессов, боковой канал, отклонение педалей

Из графиков видно, что хотя условие (18) не выполняется, а выполняется только приближенное условие разрешимости (20), реконфигурация позволяет компенсировать последствия отказа с высокой точностью. Это подтверждает работоспособность и эффективность рассмотренных процедур.

**Выводы.** Алгоритм аппроксимации решения задачи синтеза многосвязных систем управления аналитическими зависимостями позволяет в случае неразрешимости задачи по критерию получения точного решения гарантировать приближение фазовых координат с точностью до некоторого  $\xi$ , при выполнении приближенного условия разрешимости. Например, в задаче реконфигурации выполнение приближенного условия разрешимости гарантирует совпадение переходных процессов штатной системы и системы с отказом и реконфигурацией с точностью до некоторого  $\xi$ , а аналитическое решение позволяет выполнить настройки коэффициентов реконфигурации в условиях нестационарности и получить простые в реализации схемы, позволяющие парировать последствия отказа.



## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Буков В.Н., Кулабухов В.С., Максименко И.М., Рябченко В.Н. Вложение систем // Автоматика и телемеханика. – 1999. – № 8. – С. 61-73.
2. Косьянчук В.В. Вложение систем. Управление с редуцированным наблюдателем // Автоматика и телемеханика. – 2002. – № 6. – С. 23-35.
3. Буков В.Н., Рябченко В.Н., Косьянчук В.В. и др. Решение линейных матричных уравнений методом канонизации // Вестник Киевского университета. Сер. “Физико-математические науки”. – 2002. – № 1. – С. 19-28.
4. Зыбин Е.Ю., Косьянчук В.В. Аналитический синтез многосвязных отказоустойчивых систем управления с упрощенной схемной реализацией // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2010. – № 1. – С. 108–117.
5. Косьянчук В.В., Гласов В.В. Синтез алгоритмов реконфигурации систем управления инвариантных к режимам полета // Авиакосмическое приборостроение. – 2010. – № 11. – С. 18-26.
6. Zybın E.Yu., Kos'yanchuk V.V. Analytical Synthesis of MIMO Fault-Tolerant
7. Control Systems with Simplified Circuit Implementation // Journal of Computer and Systems Sciences International (A Journal of Optimization and Control). – 2010. – Vol. 49. – № 1. – P. 105-114.
8. Косьянчук В.В., Константинов С.В., Редько П.Г., Кузнецов И.П. Реконфигурация систем управления перспективных маневренных самолетов и безопасность полетов // Полет. Изд-во «Машиностроение». – 2011. – № 2. – С. 36-45.
9. Косьянчук В.В. Обеспечение отказоустойчивости систем управления при отказе приводов управляющих поверхностей летательных аппаратов с механической проводкой управления // Проблемы безопасности полетов. – 2007. – Вып. 9. – С. 37-42.
10. Косьянчук В.В., Вершилова В.В. Синтез отказоустойчивых систем управления с параллельной схемой включения // Информационно-измерительные и управляющие системы. – 2008. – № 2. – Т. 6. – С. 5-8.
11. Косьянчук В.В. Контроль и диагностирование подсистем в замкнутом контуре управления // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2004. – № 1. – С. 67-76.
12. Буков В.Н., Косьянчук В.В., Рябченко В.Н. Вложение систем. Линейное управление с наблюдением // Автоматика и Телемеханика. – 2001. – № 3. – С. 15-30.
13. Зыбин Е.Ю., Косьянчук В.В. Синтез системы управления многосвязного объекта на основе технологии вложения // Автоматика и телемеханика. – 2002. – № 8. – С. 22-36.
14. Буков В.Н., Косьянчук В.В., Рябченко В.Н. Вложение систем. Управление при неполной информации // Автоматика и телемеханика. – 2001. – № 8. – С. 3-20.
15. Буков В.Н., Косьянчук В.В., Рябченко В.Н. Основы технологии вложения систем // Труды III-й международной конференции «Идентификация систем и задачи управления». Пленарные доклады, Москва, ИПУ, 28-30 января 2004 г. – М.: Изд-во ИПУ РАН. – 2004. – С. 77-99.
16. Косьянчук В.В., Буков В.Н., Горюнов С.В. и др. Основы интеграции систем авиационного оборудования / Под ред. В.В. Косьянчука. М.: ВВИА им. Н.Е. Жуковского, 2007.
17. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. – М.: Мир, 1989. – 450 с.
18. Вавилов Ю.А. Системы автоматического управления полетом. – М.: ВВИА им. Н.Е. Жуковского, 2009. – 520 с.

Статью рекомендовал к опубликованию д.т.н. С.Н. Казарин.

**Косьянчук Владислав Викторович** – Военно-воздушная академия проф. Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина; e-mail: kos.vl.v@gmail.com; 125190, г. Москва, ул. Планетная, 3; тел.: 84997590069; кафедра электронной автоматики; начальник кафедры; д.т.н.; профессор.

**Kosyanchuk Vladislav Viktorovich** – Zhukovskii and Gagarin Air Force Military Academy; e-mail: kos.vl.v@gmail.com; 3, Planetnaya street, Moscow, 125190, Russia; phone: +74997590069; the department of electronic automation; head of department; dr. of eng. sc.; professor.