

УДК 681.327

Е.М. Герасименко

**НАХОЖДЕНИЕ ПОТОКА МИНИМАЛЬНОЙ СТОИМОСТИ
В ТРАНСПОРТНОЙ СЕТИ МЕТОДОМ РАНЖИРОВАНИЯ
МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОЖИДАНИЯ НЕЧЕТКИХ ФУНКЦИЙ
СТОИМОСТЕЙ***

Описывается метод нахождения потока минимальной стоимости в транспортной сети с учетом стоимостей перевозок единицы потока, представленных нечеткими треугольными числами. Актуальность данной задачи заключается в том, что учитывается нечеткий характер стоимостей перевозок, что позволяет принимать более чувствительные к изменениям окружающей среды решения. Особенностью рассматриваемой задачи является то, что нечеткие коэффициенты стоимостей встречаются в целевой функции. Существующие методики решения данной задачи нечеткого линейного программирования такие, как применение параметрического линейного программирования, трудоемки и сложны. В данной статье будет использоваться метод ранжирования математического ожидания функции нечеткой стоимости для нахождения потока минимальной стоимости. Для иллюстрации решения задачи приведен численный пример.

Поток минимальной стоимости; нечеткая стоимость; нечеткое треугольное число; ранжирование математического ожидания.

E.M. Gerasimenko

**MINIMUM COST FLOW FINDING IN THE NETWORK BY THE METHOD
OF EXPECTATION RANKING OF FUZZY COST FUNCTIONS**

This article describes a method for minimum cost flow finding in a network with triangular fuzzy values of transmission costs of one flow unit. This problem is relevant due to the fact that fuzzy nature of transmission costs is taken into account. It allows us to make decisions more sensitive to environmental changes. The peculiarity of the problem is that fuzzy cost coefficients occur in the objective function. Current methods of solving this fuzzy linear programming task such as implementation of a parametrical linear programming are time-consuming and complicated. The method of expectation ranking of fuzzy cost functions for minimum cost flow determining will be considered in this article. To illustrate the proposed method a numerical example is presented.

Minimum cost flow; fuzzy cost; fuzzy triangular number; ranking of expectation.

Задача нахождения потока минимальной стоимости в транспортной сети является одной из фундаментальных задач, возникающих при исследовании потоков. Постановка данной задачи может быть определена следующим образом: пусть имеется транспортная сеть, представленная ориентированным графом, при этом каждой дуге поставлены в соответствие два числа: пропускная способность (q_{ij}), определяющая максимальное число единиц потока, которое может протекать по дуге, а также стоимость прохождения единицы потока по дуге (c_{ij}). Необходимо найти максимальный по объему потока, протекающий из источника в сток в транспортной сети, стоимость прохождения единицы которого по дуге минимальна. В математическом выражении задача может быть представлена, как:

* Работа поддержана РФФИ, проект № 11-01-00011а.

$$\sum_{(x_i, x_j) \in A} c_{ij} \cdot \xi_{ij} \rightarrow \min,$$

$$\sum_{x_j \in \Gamma(x_i)} \xi_{ij} - \sum_{x_k \in \Gamma^{-1}(x_i)} \xi_{ki} = \begin{cases} \nu, & x_i = s, \\ -\nu, & x_i = t, \\ 0, & x_i \neq s, t, \end{cases} \quad (1)$$

$$0 \leq \xi_{ij} \leq q_{ij}, \quad \forall (x_i, x_j) \in A,$$

где c_{ij} – стоимость прохождения единицы потока по дуге; ξ_{ij} – величина потока, протекающего по дуге; ν – заданная величина потока, не превышающая максимально допустимый поток в графе; s – начальная вершина графа (источник); t – конечная вершина графа (сток); q_{ij} – пропускная способность дуг графа.

Задача нахождения потока минимальной стоимости в транспортной сети широко освещалась в литературе. Существующие методы ее решения подразделяются на представляемые в виде графов и операций с ними, а также методы линейного программирования (ЛП). В частности, в [1–4] представлено решение задачи с помощью графовых методов. Преимуществом данного подхода являются большая наглядность, меньшая громоздкость. Например, в [5] поток минимальной стоимости предлагается отыскать с помощью алгоритмов Басакера и Гоуэна, а также Клейна. Первый заключается в отыскании кратчайших цепей (в нашем случае – цепей минимальной стоимости) и пропускании по ним потока до тех пор, пока цепь не перестанет быть кратчайшей. Алгоритм Клейна предполагает построение циклов отрицательной стоимости.

В [4] для нахождения потока минимальной стоимости рассматривается поточковый алгоритм следующего вида: пересылаем максимально возможное число единиц потока из источника в сток, каждая из которых имеет суммарную нулевую стоимость прохождения потока по сети, затем посылаем максимально возможное число единиц потока, полная стоимость прохождения по сети каждой из которых равна единице. Каждый раз выполняем аналогичную процедуру, увеличивая на единицу полную стоимость прохождения единицы потока по сети. Алгоритм заканчивает работу в двух случаях: 1) когда из источника в сток передается заданное число единиц потока ν или 2) когда ни одной дополнительной единицы потока передать нельзя.

В [3–5] исследуемая задача рассматривается как задача ЛП. Данный подход представляется более громоздким и менее наглядным, но позволяет решать задачу универсально.

В реальной жизни решать данные потоковые задачи без учета изменений в окружающей среде и человеческой деятельности невозможно, так как такие параметры транспортной сети, как стоимости прохождения единицы потока по дуге, не могут быть точно известны или измерены. На стоимость перевозок могут влиять различные факторы, например, колебания в ценах на бензин, пошлины и пр. Следовательно, данный параметр следует представлять в нечетком виде, например в виде нечеткого треугольного числа [6]. Тогда мы приходим к решению задачи нахождения потока минимальной стоимости в транспортной сети в нечетких условиях. Адекватной моделью представления такой задачи является нечеткий граф [7].

Методы решения задачи нахождения потока минимальной стоимости в транспортной сети в нечетких условиях условно можно разделить на два класса. Первый класс представляет собой использование классических потоковых алго-

ритмов для определения потоков минимальной стоимости, которые вместо четких данных оперируют центральными значениями нечетких чисел, лишь в конце «размывая» их по определенным правилам [8, 9]. Второй класс задач представляет собой использование нечеткого ЛП, которое широко освещалось в литературе [10]. Авторы [11] рассматривают задачи «абсолютного» нечеткого ЛП. Данные задачи громоздки и могут не давать оптимального решения при определении потоков минимальной стоимости. В работах [12] рассматривается решение задач нечеткого ЛП с помощью сравнения нечетких чисел на основе функций ранжирования. Для того, чтобы учесть альтернативные решения, которые могут возникнуть в подобных задачах, применяется алгоритм, описанный в [13]. Также существуют подходы, в которых происходит преобразование однокритериальной задачи в двух- или трехкритериальную и пр. в зависимости от того, заданы ли коэффициенты как интервалы или как нечеткие треугольные числа. Эти подходы применяются, когда нечеткие коэффициенты появляются в целевой функции. Одним из способов решения таких задач является получение Парето-оптимального решения n -критериальной задачи, зависящей от параметра λ [14]. Данные подходы описаны лишь для случая применения интервалов. Недостатком данных методов является трудоемкость.

В данной статье будет представлено решение задачи нахождения потока минимальной стоимости на основе методов ранжирования с учетом нечетких стоимостей и четких пропускных способностей. Тогда модель задачи примет вид

$$\begin{aligned} \sum_{(x_i, x_j) \in A} \tilde{c}_{ij} \cdot \xi_{ij} &\rightarrow \min, \\ \sum_{x_j \in \Gamma(x_i)} \xi_{ij} - \sum_{x_k \in \Gamma^{-1}(x_i)} \xi_{ki} &= \begin{cases} \nu, & x_i = s, \\ -\nu, & x_i = t, \\ 0, & x_i \neq s, t, \end{cases} \\ 0 \leq \xi_{ij} \leq q_{ij}, \quad \forall (x_i, x_j) \in A, \end{aligned}$$

где \tilde{c}_{ij} – нечеткие стоимости перевозок. Так как стоимости перевозки единицы потока по дуге, заданные в виде нечетких треугольных чисел, появились в целевой функции, а не в ограничениях, мы не можем воспользоваться методиками, описанными в [13]. Рассмотрим методику сравнения нечетких чисел с помощью функции ранжирования. При этом вводятся понятия теории вероятности: среднее и дисперсия. Каждый нечеткий коэффициент с помощью соответствующей функции ранжирования заменяется четким, решается задача в четких условиях, а затем находится решение для задачи нечеткого ЛП. При этом если при решении задачи получается несколько оптимальных решений, лучшее из них выбирают, находя дисперсию. Число с меньшей дисперсией оценивается выше и считается оптимальным [12].

Для каждого нечеткого треугольного числа вида $(c^1_{ij}, c^2_{ij}, c^3_{ij})$ находим ожидаемое значение и дисперсию согласно [12]:

$$\begin{aligned} E(\tilde{a}) &= (c^1_{ij} + c^2_{ij} + c^3_{ij})/3, \\ \text{Var}(\tilde{a}) &= ((c^1_{ij})^2 + (c^2_{ij})^2 + (c^3_{ij})^2 - c^1_{ij}c^3_{ij} - c^2_{ij}c^3_{ij} - c^1_{ij}c^2_{ij})/18. \end{aligned}$$

Рассмотрим нечеткий граф транспортной сети, изображенный на рис. 1. Пусть стоимости перевозки единицы товара по дугам задаются следующим образом:

$$\tilde{c}_{s1} = (2, 4, 9); \tilde{c}_{s2} = (5, 7, 12); \tilde{c}_{21} = (7, 9, 14); \tilde{c}_{13} = (3, 5, 8); \tilde{c}_{2t} = (8, 15, 19);$$

$$\tilde{c}_{3t} = (4, 7, 12).$$

Пропускные способности дуг представляют собой четкие числа. Необходимо найти поток минимальной стоимости с учетом нечетких стоимостей и четких пропускных способностей дуг графа.

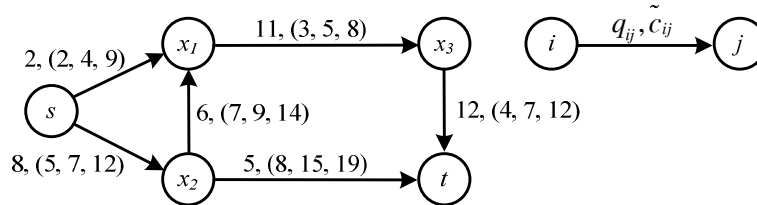


Рис. 1. Нечеткий граф транспортной сети

Прежде чем начать решение задачи, необходимо вычислить значение величины ν , так как известно, что поток минимальной стоимости в графе от источника к стоку не должен превышать максимально допустимый поток в графе. Поэтому вычислим максимальный поток в графе без учета стоимостей перевозки единицы потока по дуге по алгоритму Форда–Фалкерсона [1]. Данный поток принимает значение 10. Поскольку поток минимальной стоимости не должен превышать максимально допустимый поток в графе, произвольно выберем значение ν , не превышающее нижней границы потока (например, 7), и решим задачу с учетом $\nu = 7$. Тогда исходная задача преобразовывается к виду

$$\tilde{F} = (2, 4, 9) \cdot \xi_{s1} + (5, 7, 12) \cdot \xi_{s2} + (7, 9, 14) \cdot \xi_{21} + (3, 5, 8) \cdot \xi_{13} + (8, 15, 19) \cdot \xi_{2t} +$$

$$+ (4, 7, 12) \cdot \xi_{3t} \rightarrow \min,$$

$$\xi_{s1} + \xi_{s2} = 7; \xi_{13} - \xi_{s1} - \xi_{21} = 0; \xi_{21} + \xi_{2t} - \xi_{s2} = 0; \xi_{3t} - \xi_{13} = 0;$$

$$- \xi_{2t} - \xi_{3t} = -7; \xi_{s1} \leq 2; \xi_{s2} \leq 8; \xi_{21} \leq 6; \xi_{13} \leq 11; \xi_{2t} \leq 5;$$

$$\xi_{3t} \leq 12; \xi_{s1} \geq 0; \xi_{s2} \geq 0; \xi_{21} \geq 0; \xi_{13} \geq 0; \xi_{2t} \geq 0; \xi_{3t} \geq 0.$$

Применяя функцию ранжирования для каждого из нечетких коэффициентов, получаем следующую четкую постановку задачи:

$$F = 5 \cdot \xi_{s1} + 8 \cdot \xi_{s2} + 10 \cdot \xi_{21} + 5,33 \cdot \xi_{13} + 14 \cdot \xi_{2t} + 7,66 \cdot \xi_{3t} \rightarrow \min,$$

$$\xi_{s1} + \xi_{s2} = 7; \xi_{13} - \xi_{s1} - \xi_{21} = 0; \xi_{21} + \xi_{2t} - \xi_{s2} = 0; \xi_{3t} - \xi_{13} = 0;$$

$$- \xi_{2t} - \xi_{3t} = -7; \xi_{s1} \leq 2; \xi_{s2} \leq 8; \xi_{21} \leq 6; \xi_{13} \leq 11; \xi_{2t} \leq 5;$$

$$\xi_{3t} \leq 12; \xi_{s1} \geq 0; \xi_{s2} \geq 0; \xi_{21} \geq 0; \xi_{13} \geq 0; \xi_{2t} \geq 0; \xi_{3t} \geq 0.$$

Решаем задачу и получаем оптимальное решение: $\xi_{s1} = 2; \xi_{s2} = 5; \xi_{21} = 0;$
 $\xi_{13} = 2; \xi_{2t} = 5; \xi_{3t} = 2$. Оптимальное значение целевой функции $\tilde{F} = (83, 142, 213)$. Следовательно, можно утверждать, что стоимость перевозки семи единиц потока по дугам транспортной сети будет не меньше 83 условных единиц, но и не больше 213. Скорее всего, она будет равна 142 условным единицам.

Таким образом, можно отметить, что подход, предложенный в данной статье, позволяет находить решение задачи определения потока минимальной стоимости в транспортной сети с нечеткими стоимостями с помощью методов ранжирования. Достоинством подхода является возможность избежать применения громоздких методов решения данной задачи как трехкритериальной задачи параметрического ЛП.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Форд Л.Р., Фалкерсон Д.Р.* Потоки в сетях. – М.: Мир, 1966. – 276 с.
2. *Кристофидес Н.* Теория графов. Алгоритмический подход. – М.: Мир, 1978. – 432 с.
3. *Филипс Д., Гарсиа-Диас А.* Методы анализа сетей. – М.: Мир, 1984. – 276 с.
4. *Майника Э.* Алгоритмы оптимизации на сетях и графах. – М.: Мир, 1981. – 326 с.
5. *Ху Т.* Целочисленное программирование и потоки в сетях. – М.: Мир, 1974. – 520 с.
6. *Zimmermann H.J.* Fuzzy Set Theory and Its Applications, (2th edition). – Boston/Dordrecht/London: Kluwer Academia Publishers, 1991. – 435 p.
7. *Bershtein L.S., Bozhenuk A.V.* Fuzzy graphs and fuzzy hypergraphs. In: Dopico J., de la Calle J., Sierra A. (eds.) Encyclopedia of Artificial Intelligence, Information SCI. Hershey, New York (2008). – P. 704-709.
8. *Рогушина Е.М.* Нахождение максимального потока и потока минимальной стоимости в нечеткой транспортной сети // Сборник докладов XII научно-практической конференции преподавателей, аспирантов и молодых ученых: "Проблемы качества образования. Новые информационные технологии, методы и модели в экономике". – Таганрог: НОУ ВПО ТИУиЭ, 2011. – С. 125-130.
9. *Малышев Н.Г., Берштейн Л.С., Боженик А.В.* Нечеткие модели для экспертных систем в САПР. – М.: Энергоатомиздат, 1991.
10. *Ganesan K., Veeramani P.* Fuzzy Linear Programs with Trapezoidal Fuzzy Numbers // Ann Oper Res. – 2006. – P. 305-315.
11. *Kumar A., Kaur J., Singh P.* Fuzzy Optimal Solution of Fully Fuzzy Linear Programming Problems with Inequality Constraints // International Journal of Mathematical and Computer Sciences 6:1, 2010. – P. 37-41.
12. *Maleki H.R., Mashinchi M.* Fuzzy Number Linear Programming: a Probabilistic Approach // J. Appl. Math. and Computing. – 2004. – Vol. 15. – P. 333-341.
13. *Боженик А.В., Розенберг И.Н., Старостина Т.А.* Анализ и исследование потоков и живучести в транспортных сетях – М.: Научный мир, 2006.
14. *Chanas S., Kuchta D.* Linear programming problem with fuzzy coefficients in the objective function // In: Delgado M. et al. (eds.) Fuzzy Optimization, Physica-Verlag, Heidelberg, 1994. – P. 148-157.

Статью рекомендовал к опубликованию д.т.н., профессор В.П. Карелин.

Герасименко Евгения Михайловна – Технологический институт федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Южный федеральный университет» в г. Таганроге; e-mail: e.rogushina@gmail.com; 347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44; тел.: +79885315343; аспирантка.

Gerasimenko Eugenia Michailovna – Taganrog Institute of Technology – Federal State-Owned Autonomy Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”; e-mail: e.rogushina@gmail.com; 44, Nekrasovskiy, Taganrog, 347928, Russia; phone: + 79885315343; postgraduate student.

УДК 681.3.06

С.Л. Беляков, Я.А. Коломийцев

**ОБНОВЛЕНИЕ ИНФОРМАЦИОННОЙ ОСНОВЫ ГИС
С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ОНТОЛОГИЙ***

Проанализированы возможности совмещения картографических данных, получаемых из различных источников, при наличии в них определенных типов несовместимости. Рассматриваются случаи, когда данные различаются по терминологии и используемым понятиям. Предлагается метод преодоления несовместимости в частных случаях посредством применения онтологий. Осуществляется объединение существующих онтологий каждого

* Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ 11-01-00011-а, 10-01-00029-а.