

Раздел I. Математическое моделирование задач аэро- и гидродинамики

УДК 519.633: 532.53: 532.72

И.В. Жиляев, К.А. Надолин

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ГИДРОДИНАМИКИ МЕЛКОГО ПРОТЯЖЕННОГО РУСЛОВОГО ПОТОКА

Представлены результаты численного тестирования одной из предложенных в [1] редуцированных трехмерных математических моделей, а именно модели мелкого протяженного потока. Для верификации модели были проведены расчеты в конечно-элементном программном комплексе COMSOL. Сравнивались значения продольной скорости потока, полученные по формулам редуцированной модели после численного решения начально-краевой задачи для функции возвышения свободной поверхности, и данные прямого численного моделирования на основе полных гидродинамических моделей COMSOL для ламинарных и турбулентных течений вязкой жидкости. Полученные результаты позволяют утверждать, что предложенная редуцированная модель мелкого протяженного руслового потока адекватно описывает его гидродинамику.

Редуцированные модели; русловые потоки; мелкий поток; свободная граница; численное моделирование.

I.V. Zhilyaev, K.A. Nadolin

NUMERICAL MODELING OF THE HYDRODYNAMICS AND MASS TRANSFER IN SHALLOW AND LONG BED-STREAM FLOW

The reduced 3D model of the shallow and lengthy stream is tested numerically. This mathematical model is one of several that proposed in [1]. For its verification a number of calculations with finite-element package COMSOL was done. The values of longitudinal velocity were calculated in the framework of reduced model formulas through numerical solution of the initial-boundary value problem for the free surface displacement function. These values were compared with data of laminar and turbulent CFD COMSOL calculations. The obtained results demonstrate that the hydrodynamics of the shallow and lengthy bed-stream flow is described adequately by proposed reduced model.

Reduced models; shallow stream; free surface; numerical solution.

Введение. Для расчетов гидрологических характеристик водотоков применяются математические модели разных типов. Наиболее точными являются трехмерные модели, основанные на полных уравнениях гидродинамики турбулентных течений. Однако на практике получить высокую точность моделирования с использованием таких моделей не удастся, поскольку данные реальных гидрологических измерений не обеспечивают требуемой точности задания гидрофизических параметров, а также начальных и граничных условий для трехмерных уравнений в частных производных. Кроме того, сложность и трудоемкость вычислительных экспериментов на основе трехмерных математических моделей усугубляется геометрией расчетной области, сильно вытянутой в продольном направлении: отношение между характерной глубиной и характерной шириной речного русла колеб-

лется в пределах от 0,1 до 0,005. Все вышесказанное объясняет интерес к двумерным и редуцированным трехмерным математическим моделям русловых потоков, сложность которых адекватна точности имеющихся гидрологических данных.

В работе [1] представлен подход, позволяющий конструировать математические модели в русловых потоках пониженной размерности. Ключевым моментом предлагаемого подхода является учет того, что размеры поперечного сечения русла в вертикальном и горизонтальном направлениях существенно различаются и протяженность потока весьма велика. Данная работа посвящена тестированию одной из предложенных в [1] редуцированных математических моделей, а именно модели мелкого протяженного потока. Верификация модели проводится путем сравнения данных прямого численного моделирования на основе полных уравнений гидродинамики и массопереноса в потоке вязкой жидкости и результатов, полученных на основе редуцированной модели. Расчеты проводились с использованием конечно-элементного комплекса COMSOL Multiphysics (Femlab), а также программных пакетов Matlab и Maple. Рассмотрены как ламинарные, так и турбулентные течения.

Постановка задачи. Скорость течения жидкости в соответствии с редуцированной трехмерной математической моделью *мелкого протяженного потока* определяется в безразмерных переменных следующими формулами [1]:

$$\begin{aligned} u &= \text{Re}G(J_2 - \xi J_1) + F_x(h - z), \\ v &= \text{Re}G \frac{\partial \xi}{\partial y} (J_2 - \xi J_1) + F_y(h - z), \\ w &= \text{Re}G \left(I \frac{\partial}{\partial x} (J_4 - \xi J_3) + \frac{\partial}{\partial y} \left((J_4 - \xi J_3) \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) \right) + (h - z) \left(F_x \frac{\partial h}{\partial x} + F_y \frac{\partial h}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $u(x, y, z, t)$, $v(x, y, z, t)$, $w(x, y, z, t)$ – компоненты вектора скорости, $\xi(x, y, t)$ – неизвестная функция, определяющая свободную поверхность потока; $h(x, y)$ – известная функция, задающая форму русла; параметры F_x и F_y характеризуют внешнее (например, ветровое) воздействие. Число Рейнольдса Re , гравитационный параметр G и уклон потока I определены согласно [1]. Функционалы J_1 , J_2 , J_3 и J_4 имеют вид

$$J_1 = \int_z^h \frac{d\tau}{\eta}, \quad J_2 = \int_z^h \frac{\tau d\tau}{\eta}, \quad J_3 = \int_z^h J_1 d\tau, \quad J_4 = \int_z^h J_2 d\tau, \quad (2)$$

где η – функциональный параметр турбулентной вязкости, возникающий в уравнениях Рейнольдса согласно гипотезе Буссинеска. Этот параметр зависит от координат и нормируется таким образом, чтобы на свободной поверхности он был равен единице [1].

Для определения возвышения свободной поверхности $\xi(x, y, t)$ используется кинематическое краевое условие

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial t} &= \text{Re}G \left[I \left(\frac{\partial}{\partial x} (J_4 - \xi J_3) - (J_2 - \xi J_1) \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) + (J_4 - \xi J_3) \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} (J_4 - \xi J_3) - \right. \\ &\quad \left. - (J_2 - \xi J_1) \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 \right] + (h - \xi) \left(F_x \left(\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) + F_y \left(\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) \right), \end{aligned} \quad (3)$$

где функции J_i ($i=1, 2, 3, 4$) и их производные вычислены на свободной границе при $z = \xi$.

Для уравнения (3) требуется задать условие Коши (начальную форму свободной поверхности), а также граничные условия во входном створе $x=0$ и на берегах потока. Например, если предполагать, что в начальный момент времени свободная поверхность плоская, то условие Коши имеет вид

$$\xi(x, y, 0) = 0. \quad (4)$$

Соотношения (1), (2) определяют приближенные значения гидродинамических полей мелкого протяженного потока. В случае потока постоянной вязкости выполняется условие $\eta \equiv 1$ и функционалы (2) могут быть вычислены явно

$$J_1 = h - z, \quad J_2 = \frac{1}{2}(h^2 - z^2), \quad J_3 = \frac{1}{2}(h - z)^2, \quad J_4 = \frac{1}{6}(h - z)^2(2h + z). \quad (5)$$

С учетом представления (5), формулы (1) для компонент скорости и свободной границы принимают вид

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} G I \left((h - \xi)^2 - (z - \xi)^2 \right) + F_x (h - z); \\ v &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} G \frac{\partial \xi}{\partial y} \left((h - \xi)^2 - (z - \xi)^2 \right) + F_y (h - z); \\ w &= \operatorname{Re} G \left[I \left((h - \xi)(h - z) \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{1}{2} (h - z)^2 \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) + \frac{1}{6} (h - z)^2 (2(h - \xi) + z - \xi) \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \right. \\ &\quad \left. + \left((h - \xi)(h - z) \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{1}{2} (h - z)^2 \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) \frac{\partial \xi}{\partial y} \right] + (h - z) \left(F_x \frac{\partial h}{\partial x} + F_y \frac{\partial h}{\partial y} \right); \quad (6) \\ \frac{\partial \xi}{\partial t} &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} G (h - \xi)^2 \left[I \left(2 \frac{\partial h}{\partial x} - 3 \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) + \frac{\partial \xi}{\partial y} \left(2 \frac{\partial h}{\partial y} - 3 \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) + \frac{2}{3} (h - \xi) \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \right] + \\ &\quad + (h - \xi) \left(F_x \frac{\partial}{\partial x} (h - \xi) + F_y \frac{\partial}{\partial y} (h - \xi) \right). \end{aligned}$$

Отметим, что поток жидкости с постоянной вязкостью (6) имеет параболический профиль продольной скорости, что соответствует ламинарному течению Пуазейля в открытом канале.

Вычислительный эксперимент. Для вычисления функции $\xi(x, y, t)$ возвышения свободной поверхности уравнение (3) решалось при начальном условии (4) и граничных условиях

$$\xi(0, y, t) = 0, \quad \xi(x, \pm b, t) - h(x, \pm b) = 0, \quad (7)$$

где b – полуширина потока.

Численное решение начально-краевой задачи (3), (4), (6) осуществлялось средствами конечно-элементного программного комплекса COMSOL [2]. Использовались следующие значения параметров безразмерной задачи: $\operatorname{Re} = 125$, $G = 9800$, $I = 0,008$, $b = 0,5$, $F_x = F_y = 0$. Дно потока задавалось функцией

$$\text{вида } h(x, y) = (1 - a \sin \omega x) \left(1 - \left(\frac{y}{b} \right)^2 \right) \text{ при } a = 0,01 \text{ и } \omega = 10.$$

Выбранные значения параметров соответствуют водотоку глубиной 1 м и соотношениям глубина/ширина/длина 1/10/100, характерной скоростью течения 1 м/с и уклоном 1° при отсутствии внешних ветровых воздействий.

Скорость течения, вычисленная в соответствии с редуцированной трехмерной математической моделью мелкого протяженного потока, сравнивалась с результатами прямого численного моделирования, проведенного на основе полных трехмерных уравнений гидродинамики программного комплекса COMSOL Multiphysics [2].

Ламинарный поток. Скорость ламинарного потока для редуцированной модели определяется формулами (6). Для расчета аналогичного ламинарного течения в COMSOL Multiphysics использовались трехмерные уравнения Навье–Стокса. На рис. 1,а приведены графики изменения продольной скорости по глубине потока. Сплошной линией нанесена скорость, полученная по формулам (5), а пунктирной – рассчитанная программным комплексом COMSOL. Дно потока соответствует значению $z = 1$, а поверхность – $z = 0$ преобразованной безразмерной координаты.

Турбулентный поток. Для расчета турбулентного течения в COMSOL была выбрана $k - \varepsilon$ -модель турбулентности. Скорость турбулентного потока в редуцированной модели определялась формулами (1), (2) при выборе функционального параметра турбулентной вязкости вида $\eta(z) = c_1 - c_2 z + c_3 z^2$. Коэффициенты C_i ($i=1,2,3$) находятся из условия корреляции скорости модельного и эталонного потока и имеют значения $c_1 = 1,4$, $c_2 = 10^{-3}$, $c_3 = 0,9$.

На рис. 1,б приведены графики изменения продольной скорости по глубине потока. Сплошной линией нанесена скорость, полученная по формулам (1)–(3), а пунктирной – рассчитанная программным комплексом COMSOL.

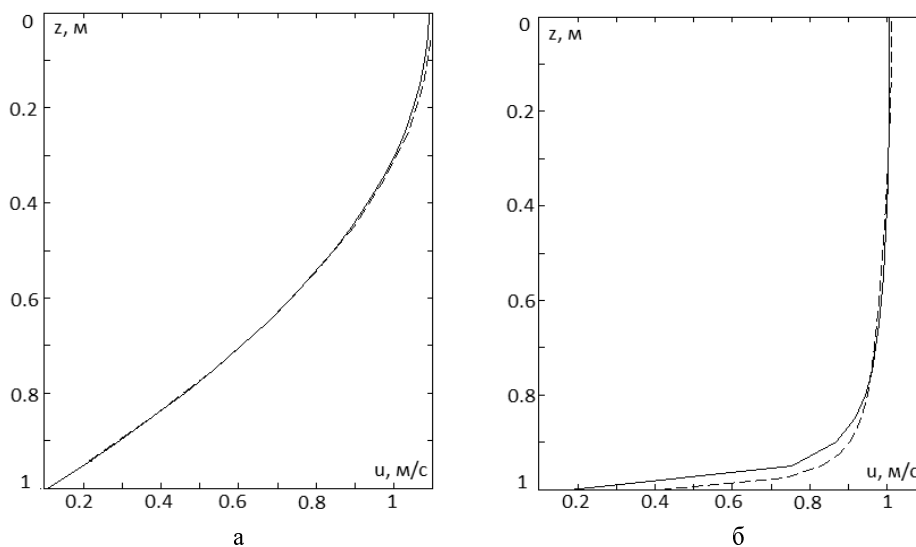


Рис. 1. Изменение продольной скорости по глубине потока:
а – ламинарное течение; б – турбулентное течение

Заключение. Представленные результаты численного моделирования позволяют утверждать, что предложенная в [1] редуцированная трехмерная модель мелкого протяженного руслового потока адекватно описывает его гидродинамику. Задача фактически расщепляется по пространственным переменным и сводится к решению двумерных уравнений для функции свободной поверхности, а зависимость скорости течения от вертикальной координаты явно выражается формулами (1).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Надолин К.А.* Об одном подходе к моделированию пассивного массопереноса в русловых потоках // Математическое моделирование. – 2009. – Т. 21, № 2. – С. 14-28.
2. *Perry R., Green D.* Chemical Engineering Handbook. – 7th ed. – 2007. – P. 270.

Статью рекомендовал к опубликованию д.ф.-м.н. А.В. Наседкин.

Жиляев Игорь Витальевич – Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Южный федеральный университет»; e-mail: Zhilyaev@mail.com; 344038, г. Ростов-на-Дону, Нансена, 107/1, кв. 2; тел.: 89515209250; факультет математики, механики и компьютерных наук; кафедра математического моделирования; аспирант.

Надолин Константин Аркадьевич – e-mail: nadolin@math.sfedu.ru; 344090, г. Ростов-на-Дону, ул. Милячакова, 8-А; тел.: 89034341617; факультет математики, механики и компьютерных наук; кафедра математического моделирования; к.ф.-м.н.; доцент.

Zhilyaev Igor Vitalievich – Federal State-Owned Autonomy Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”; e-mail: Zhilyaev@mail.com; 107/1, Nansena, ap. 2, Rostov-on-Don, 344038, Russia; phone: 89515209250; faculty of mathematics, mechanics and computer science; the department of mathematical modeling; postgraduate student.

Nadolin Konstantin Arkadieovich – e-mail: nadolin@math.sfedu.ru; 8-А, Mil'chakova street, Rostov-on-Don, 344090, Russia; phone: 89034341617; Faculty of Mathematics, mechanics and Computer science; the department of mathematical modeling; cand. of phis.-math. sc.; associate professor.

УДК 532.517.4

В.Т. Калугин, С.В. Стрижак

**ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ АППАРАТА-ЗОНДА
В ЗАКРУЧЕННОМ ПОТОКЕ ГАЗЕ***

Целью работы является обоснование выбора оптимальной компоновки для диагностического аппарата “Сканлайнер”. В статье представлены результаты численных расчетов обтекания аппарата-зонда различной компоновки в закрученном потоке газа с помощью пакета OpenFOAM. Описана постановка задачи и метод решения. Уравнения Рейнольдса замкнуты с помощью модели турбулентности $k-\omega$ SST Менгера с пристеночной функцией. Проведен расчет аэродинамических характеристик (АДХ) различных компоновок тел при изменении угла атаки и угловой скорости закрутки потока. Выполнено сравнение с результатами эксперимента. На основании полученных результатов дана рекомендация по выбору компоновки для аппарата в форме затупленного цилиндра с двумя дисками.

Математическая модель; уравнения; модель турбулентности; неструктурированная сетка; сходимость; закрученный поток; угол атаки; угловая скорость; аэродинамические коэффициенты.

V.T. Kalugin, S.V. Strijhak

**PARAMETRIC INVESTIGATION OF AERODYNAMIC FORM OF PROBE
IN SWIRLING FLOW**

The goal of this work is the substantiation of a choice of optimal configuration for probe-device “Scanliner”. In the scope of this work numerical results are presented for the simulation of flow around device-probe with different assembling in swirling flow. Problem definition and com-

* Работа выполнена при поддержке гранта ФЦП «Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2007–2013 гг.», ГК № 07.514.11.4119 от 02 ноября 2011 г.