УДК 519.4

А.И. Жорник, В.А. Жорник, П.А. Савочка

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ СПЛОШНОГО ЦИЛИНДРА

Рассматривается решение динамической задачи термоупругости для нагретого до постоянной температуры сплошного цилиндра относительно большой длины и резко охлаждаемого в среде с постоянной температурой. В механическом отношении цилиндр находится в условии плоской деформации, т.е. осевая деформация равна нулю, а цилиндрическая поверхность свободна от нагрузок (радиальное напряжение равно нулю). Показывается, что даже при очень интенсивном теплообмене между цилиндрической поверхностью и средой, когда температура цилиндрической поверхности мгновенно принимает температуру охлаждающей среды, динамическими эффектами можно пренебречь и рассматривать задачу как квазистатическую. Это значительно облегчает решение задачи.

Цилиндр; охлаждение; термоупругие напряжения.

A.I. Zhornik, V.A. Zhornik, P.A. Savochka

ON A PROBLEM OF THERMOELASTICITY FOR A SOLID CYLINDER

In this paper we consider the solution of the dynamic problem of thermoelasticity for a heated to a constant temperature solid cylinder of a relatively large length and cooled rapidly in an environment of a constant temperature. With regard to the mechanics the cylinder is in the state of plane deformation, that is there is no axial deformation and cylindrical surface is free of load (radial stress is equal to zero). It is shown that even with very intensive heat transfer between the cylindrical surface and the environment when the temperature of the cylindrical surface immediately takes the temperature of the cooling medium, the dynamic effects might be neglected and the problem might be regarded as a quasi-static one. This considerably facilitates the solution of the problem.

Cylinder; cooling; thermoelastic stresses.

Введение. В процессе изготовления и эксплуатации детали машин и элементы конструкций, изготовленные из хрупких материалов, подвергаются резким тепловым воздействиям. Возникающие при этом температурные градиенты вызывают термоупругие напряжения, которые в данном случае могут носить динамический характер. Задача заключается в выяснении, насколько существенны при этом динамические эффекты при резком тепловом воздействии на исследуемое тело.

В качестве модели для исследования выбирается сплошной цилиндр неограниченной длины (длина цилиндра значительно больше его радиуса).

Аналитическое решение задачи. Рассмотрим задачу об инерционных эффектах в сплошном цилиндре радиусом r_c в случае плоской деформации (осевая деформация равна нулю), нагретого до постоянной температуры T_0, который охлаждается в среде с постоянной температурой θ путем теплообмена с коэффициентом теплообмена α. В этом случае температурное поле будет радиальным и в изображении по Лапласу его решение имеет вид [1]

$$\overline{T}(r,s)=\frac{T_0}{s}-(T_0-\theta)\frac{hI_0\left(\sqrt{\frac{s}{a}}r\right)}{s\left[\sqrt{\frac{s}{a}}I_1\left(\sqrt{\frac{s}{a}}r_c\right)+hI_0\left(\sqrt{\frac{s}{a}}r_c\right)\right]}, \qquad (1)$$

где s – параметр преобразования Лапласа; $I_{0,1}(x)$ – функции Бесселя от мнимого аргумента, первого рода нулевого и первого порядка соответственно; $h = \alpha/\lambda_T$ –

относительный коэффициент теплообмена; λ_T – теплопроводность материала цилиндра; $a = \dfrac{\lambda_T}{\rho_V c_V}$ – его температуропроводность; ρ_V – плотность; c_V – удельная теплоемкость.

Радиальное перемещение u_r подчиняется уравнению [2]

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} - \frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} = \frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha_T \frac{\partial (T - T_0)}{\partial r}, \tag{2}$$

где $c_1 = \sqrt{\dfrac{E(1-\nu)}{\rho_V (1+\nu)(1-2\nu)}}$ – скорость продольной волны; E – модуль упругости материала цилиндра; ν – его коэффициент Пуассона; α_T – коэффициент линейного расширения.

Применяя преобразование Лапласа к (2) в изображении, получим

$$\frac{d^2 \overline{u_r}}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\overline{u_r}}{dr} - \left(\frac{s^2}{c_1^2} + \frac{1}{r^2}\right)\overline{u_r}(r,s) = \frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha_T \frac{d\overline{T}(r,s)}{dr}. \tag{3}$$

Частное решение (3) будем искать в виде

$$\overline{u}_r^{\,ч}(r,s) = A\frac{d\overline{T}(r,s)}{dr}, \tag{4}$$

где A – постоянная.

Выражение (4) подставим в (3), получим:

$$A\Delta\frac{d\overline{T}(r,s)}{dr} - A\left(\frac{s^2}{c_1^2} + \frac{1}{r^2}\right)\frac{d\overline{T}(r,s)}{dr} = \frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha_T \frac{d\overline{T}(r,s)}{dr}, \tag{5}$$

где Δ – оператор Лапласа $\dfrac{d^2}{dr^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dr}$.

Учитывая, что

$$\Delta\frac{d\overline{T}}{dr} = \frac{d}{dr}\Delta\overline{T} + \frac{1}{r^2}\frac{d\overline{T}}{dr}, \tag{6}$$

а преобразование Лапласа для уравнения теплопроводности равно

$$a\Delta\overline{T} = -T_0 + s\overline{T}, \tag{7}$$

подставив (7) в правую часть (6), имеем:

$$\Delta\frac{d\overline{T}}{dr} = \left(\frac{s}{a} + \frac{1}{r^2}\right)\frac{d\overline{T}}{dr}. \tag{8}$$

Подставив (8) в (5), находим постоянную A

$$A = \frac{1+\nu}{1-\nu}\frac{\alpha_T c_1^2}{s\left(\dfrac{c_1^2}{a} - s\right)}. \tag{9}$$

Общее решение однородного уравнения (3) – уравнение Бесселя от мнимого аргумента 1-го порядка

$$\overline{u}_r^{\,o}(r,s) = BI_1\left(\frac{s}{c_1}r\right), \tag{10}$$

где B – постоянная.

Поэтому решение уравнения (3) имеет вид

$$\overline{u_r}(r,s)=BI_1\left(\frac{s}{c}r\right)-A(T_0-\theta)\frac{h\sqrt{\frac{s}{a}}I_1\left(\sqrt{\frac{s}{a}}r\right)}{s\left[\sqrt{\frac{s}{a}}I_1\left(\sqrt{\frac{s}{a}}r_c\right)+hI_0\left(\sqrt{\frac{s}{a}}r_c\right)\right]}. \tag{11}$$

Постоянную B найдем из условия, что поверхность цилиндра свободна от нагрузок и поэтому радиальное напряжение на поверхности цилиндра ($r = r_c$) равно нулю. Учитывая зависимость радиального напряжения σ_{rr} от u_r в [2], в изображении по Лапласу получим выражение

$$(1-\nu)\frac{d\overline{u}_r(r,s)}{dr}\bigg|_{r_c}+\nu\frac{\overline{u}_r(r_c,s)}{r_c}=(1+\nu)\alpha_T\left[\overline{T}(r_c,s)-\frac{T_0}{s}\right], \tag{12}$$

которое подстановкой в него (11) приведем к уравнению относительно B

$$B\left[(1-\nu)r_c\frac{s}{c_1}I_0\left(\frac{s}{c_1}r_c\right)-(1-2\nu)I_1\left(\frac{s}{c_1}r_c\right)\right]=$$

$$=-h(T_0-\theta)\frac{(1+\nu)\left[\alpha_T\frac{sr_c}{s-\frac{c_1^2}{a}}I_0\left(\sqrt{\frac{s}{a}}r_c\right)+\frac{1-2\nu}{1-\nu}\frac{\alpha_T c_1^2}{s\left(\frac{c_1^2}{a}-s\right)}\sqrt{\frac{s}{a}}I_1\left(\sqrt{\frac{s}{a}}r_c\right)\right]}{s\left[\sqrt{\frac{s}{a}}I_1\left(\sqrt{\frac{s}{a}}r_c\right)+hI_0\left(\sqrt{\frac{s}{a}}r_c\right)\right]}. \tag{13}$$

Отсюда

$$BI_1\left(\frac{s}{c_1}r_c\right)=-h(T_0-\theta)\frac{(1+\nu)\left[\alpha_T\frac{sr_c}{s-\frac{c_1^2}{a}}I_0\left(\sqrt{\frac{s}{a}}r_c\right)+\frac{1-2\nu}{1-\nu}\frac{\alpha_T c_1^2}{s\left(\frac{c_1^2}{a}-s\right)}\sqrt{\frac{s}{a}}I_1\left(\sqrt{\frac{s}{a}}r_c\right)\right]}{\left[(1-\nu)r_c\frac{s}{c_1}\frac{I_0\left(\frac{s}{c_1}r_c\right)}{I_1\left(\frac{s}{c_1}r_c\right)}-(1-2\nu)\right]s\left[\sqrt{\frac{s}{a}}I_1\left(\sqrt{\frac{s}{a}}r_c\right)+hI_0\left(\sqrt{\frac{s}{a}}r_c\right)\right]}. \tag{14}$$

Подставляя (14) в (11) с учетом (9), получим

$$\overline{u_r}(r_c,s)=-h(T_0-\theta)\frac{(1+\nu)\left[\alpha_T\frac{sr_c}{s-\frac{c_1^2}{a}}I_0\left(\sqrt{\frac{s}{a}}r_c\right)+\frac{1-2\nu}{1-\nu}\frac{\alpha_T c_1^2}{s\left(\frac{c_1^2}{a}-s\right)}\sqrt{\frac{s}{a}}I_1\left(\sqrt{\frac{s}{a}}r_c\right)\right]}{\left[(1-\nu)r_c\frac{s}{c_1}\frac{I_0\left(\frac{s}{c_1}r_c\right)}{I_1\left(\frac{s}{c_1}r_c\right)}-(1-2\nu)\right]s\left[\sqrt{\frac{s}{a}}I_1\left(\sqrt{\frac{s}{a}}r_c\right)+hI_0\left(\sqrt{\frac{s}{a}}r_c\right)\right]}-$$

$$-h(T_0-\theta)\frac{1+\nu}{1-\nu}\frac{\alpha_T c_1^2}{s\left(\frac{c_1^2}{a}-s\right)}\frac{\sqrt{\frac{s}{a}}I_1\left(\sqrt{\frac{s}{a}}r\right)}{s\left[\sqrt{\frac{s}{a}}I_1\left(\sqrt{\frac{s}{a}}r_c\right)+hI_0\left(\sqrt{\frac{s}{a}}r_c\right)\right]}. \tag{15}$$

Рассмотрим $\overline{u_r}(r_c, s)$ для квазистатического случая ($c_1 \to \infty$) с учетом того, что при малых x $I_1(x) \to x/2$. В этом случае (15) принимает вид

$$\overline{u'_r}(r_c, s) = 2\nu \frac{1+\nu}{1-\nu} h\alpha_T (T_0 - \theta) \frac{a}{s^{3/2}\left[\sqrt{s} + h\sqrt{a}\, \dfrac{I_0\left(\sqrt{\dfrac{s}{a}} r_c\right)}{I_1\left(\sqrt{\dfrac{s}{a}} r\right)}\right]}. \tag{16}$$

Асимптотическое решение задачи. Обратное преобразование (15) оказывается громоздким и приводит к трудно обозримым выражениям. В отличие от полупространства [3], когда волны уходят в бесконечность, в данном случае волны, возникающие при охлаждении поверхности цилиндра, не уходят в бесконечность, а отражаются от оси цилиндра и приводят к возникновению колебаний, которые для практически встречающихся условий оказываются несущественными. Поэтому вычислим u_r, окружное $\sigma_{\varphi\varphi}$ и осевое σ_{zz} напряжения на поверхности $r = r_c$ при малых временах t, когда еще волны не дошли до оси цилиндра, т.е. $c_1 t << r_c$, или

$$\frac{c_1 t}{r_c} << 1. \tag{17}$$

Используя асимптотические представления, справедливые для малых времен, а значит, для больших s, $I_0(x) \approx I_1(x) \approx \sqrt{\dfrac{1}{2\pi x}} e^x$, получим, что в (13) вторыми слагаемыми можно пренебречь по сравнению с первыми и поэтому

$$B = -\frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha_T (T_0 - \theta) \frac{hc_1}{s^2 I_0\left(\dfrac{s}{c_1} r_c\right)\left(\sqrt{\dfrac{s}{a}} + h\right)}. \tag{18}$$

Подставив (9) и (18) в (11), имеем

$$\overline{u}_r(r_c, s) = -\frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha_T (T_0 - \theta) c_1 \frac{h\sqrt{a}}{\sqrt{s} + h\sqrt{a}} \left(\frac{1}{s^2} - \frac{c_1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{s^{5/2}} + \ldots\right). \tag{19}$$

Применяя таблицу обратных преобразований [4], получим оригинал перемещения:

$$u_r(r_c, t) = -\frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha_T (T_0 - \theta) c_1 \left\{\left(1 + \frac{c_1}{ha}\right) t - \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \frac{c_1}{\sqrt{a}} t^{3/2} + \right.$$
$$\left. + \left(1 + \frac{c_1}{ha}\right) \frac{1}{h^2 a}\left[1 - e^{h^2 at} \operatorname{erfc}\left(h\sqrt{at}\right) - \frac{2h\sqrt{at}}{\sqrt{\pi}}\right]\right\}. \tag{20}$$

Окружное напряжение $\sigma_{\varphi\varphi}$ определяется из [2]

$$(1-\nu)\sigma_{\varphi\varphi} - \nu\sigma_{rr} = \frac{E}{1+\nu}\left[\frac{u_r}{r} - (1+\nu)\alpha_T (T - T_0)\right] \tag{21}$$

и на поверхности цилиндра при $r = r_c$

$$\sigma_{\varphi\varphi}(r_c, t) = \frac{E}{(1+\nu)(1-\nu)} \frac{u_r(r_c, t)}{r_c} - \frac{E}{1-\nu} \alpha_T \left[T(r_c, t) - T_0\right], \tag{22}$$

где $T(r_c, t)$ находится из (1) с учетом таблиц обратных преобразований [4] и имеет вид

$$T(r_c,t)-T_0=-(T_0-\theta)\left[1-e^{h^2at}\operatorname{erfc}\left(h\sqrt{at}\right)\right]. \tag{23}$$

Подстановка (20) и (23) в (22) приводит к выражению

$$\sigma^*_{\varphi\varphi}(r_c,t)=\frac{\sigma_{\varphi\varphi}(r_c,t)(1-\nu)}{E\alpha_T(T_0-\theta)}=-\frac{c_1}{(1-\nu)r_c}\left\{\left(1+\frac{c_1}{ha}\right)t-\frac{c_1}{\sqrt{a}}\frac{4}{3\sqrt{\pi}}t^{3/2}+\right.$$

$$\left.+\left(1+\frac{c_1}{ha}\right)\frac{1}{h^2a}\left[1-e^{h^2at}\operatorname{erfc}\left(h\sqrt{at}\right)-\frac{2}{\sqrt{\pi}}h\sqrt{at}\right]\right\}+\left[1-e^{h^2at}\operatorname{erfc}\left(h\sqrt{at}\right)\right]. \tag{24}$$

Последнее слагаемое в (24) есть квазистатическое решение для напряжений. Чтобы это показать, применим к (22) преобразование Лапласа

$$\bar{\sigma}_{\varphi\varphi}(r_c,s)=\frac{E}{(1+\nu)(1-\nu)}\frac{\bar{u}_r(r_c,s)}{r_c}-\frac{E}{1-\nu}\alpha_T\left[\bar{T}(r_c,s)-\frac{T_0}{s}\right]. \tag{25}$$

Для квазистатического случая подставим (16) и (1) в (25) с учетом асимптотики функций Бесселя для малых времен, а значит, для больших s, получим

$$\bar{\sigma}'_{\varphi\varphi}(r_c,s)=\frac{E}{(1-\nu)}\alpha_T(T_0-\theta)\frac{h\sqrt{a}}{s\left(\sqrt{s}+h\sqrt{a}\right)}\left[\frac{2\nu\sqrt{a}}{(1-\nu)r_c}\frac{1}{\sqrt{s}}+1\right]. \tag{26}$$

Из (26) видно, что при малых временах (s – велико) первым слагаемым можно пренебречь по сравнению со вторым. Таким образом, при малых временах в (25), и поэтому и в (22), остаются только вторые слагаемые

$$\sigma'_{\varphi\varphi}(r_c,t)=-\frac{E}{1-\nu}\alpha_T\left[T(r_c,t)-T_0\right]. \tag{27}$$

Подстановка (23) в (27) показывает, что действительно последнее слагаемое в (24) есть квазистатическое решение.

Для определения осевого напряжения $\sigma_{zz}(r,\ t)$ на поверхности цилиндра для плоской деформации воспользуемся уравнением Дюамеля–Неймана

$$\sigma_{zz}(r_c,t)=\nu\sigma_{\varphi\varphi}(r_c,t)-E\alpha_T\left(T(r_c,t)-T_0\right) \tag{28}$$

или в безразмерном виде

$$\sigma^*_{zz}(r_c,t)=\frac{\sigma_{zz}(r_c,t)(1-\nu)}{E\alpha_T(T_0-\theta)}=\frac{\nu\sigma_{\varphi\varphi}(r_c,t)(1-\nu)}{E\alpha_T(T_0-\theta)}-\frac{T(r_c,t)-T_0}{T_0-\theta}(1-\nu). \tag{29}$$

Подставляя (24) и (23) в (29), получим зависимость осевого напряжения на поверхности цилиндра от времени

$$\sigma^*_{zz}(r_c,t)=-\nu\frac{c_1}{(1-\nu)r_c}\left\{\left(1+\frac{c_1}{ha}\right)t-\frac{c_1}{\sqrt{a}}\frac{4}{3\sqrt{\pi}}t^{3/2}+\right.$$

$$\left.+\left(1+\frac{c_1}{ha}\right)\frac{1}{h^2a}\left[1-\mathrm{e}^{h^2at}\operatorname{erfc}\left(h\sqrt{at}\right)-\frac{2}{\sqrt{\pi}}h\sqrt{at}\right]\right\}+\left[1-\mathrm{e}^{h^2at}\operatorname{erfc}\left(h\sqrt{at}\right)\right]. \tag{30}$$

Причем последнее слагаемое в (30) есть квазистатическое решение, равное окружному напряжению.

В самом деле, применив преобразование Лапласа к (28) и подставив в его правую часть (26) и (1) для малых времен (больших s), получим

$$\bar{\sigma}'_{zz}(r_c,s)=\frac{E}{1-\nu}\alpha_T(T_0-\theta)\frac{h\sqrt{a}}{s\left(\sqrt{s}+h\sqrt{a}\right)}\left[\frac{2\nu^2\sqrt{a}}{(1-\nu)r_c}\frac{1}{\sqrt{s}}+1\right]. \tag{31}$$

Из (31) видно, что при малых временах (s – велико) первым слагаемым можно пренебречь по сравнению со вторым. Переходя в (31) к оригиналу, получим

$$\sigma'_{zz}(r_c,t)=\frac{E\alpha_T(T_0-\theta)}{1-\nu}\left[1-\mathrm{e}^{h^2at}\operatorname{erfc}\left(h\sqrt{at}\right)\right], \tag{32}$$

откуда видно, что последнее слагаемое в (30) есть квазистатическое решение.

Из сравнения (24) и (30) видно, что вторые слагаемые (квазистатическое решение) одинаковые, а первое слагаемое (24) больше, так как $\nu < 0{,}5$, и поэтому более опасным будет окружное напряжение $\sigma^*_{\varphi\varphi}(r_c,t)$ по сравнению с осевым $\sigma^*_{zz}(r_c,t)$. В связи с этим в дальнейшем рассмотрим окружное напряжение $\sigma^*_{\varphi\varphi}(r_c,t)$.

При $h \to \infty$ (24) переходит в решение, полученное в [5].

Оценим влияние динамических эффектов при малых временах, которые удовлетворяют неравенству (17), рассматривая самый жесткий случай охлаждения цилиндра, полагая $h \to \infty$. В этом случае температура на поверхности цилиндра мгновенно принимает температуру окружающей среды θ, и при этом возникают самые большие температурные напряжения. Тогда

$$\sigma^*_{\varphi\varphi}(r_c,t) = -\frac{c_1}{(1-\nu)r_c}\left(t - \frac{c_1}{\sqrt{a}}\frac{3}{4\sqrt{\pi}}t^{3/2}\right) + 1\cdot \qquad (33)$$

Отбрасывая в квадратных скобках (33) второе слагаемое и тем самым увеличивая инерционный член, получим:

$$\sigma^*_{\varphi\varphi}(r_c,t) \sim -\frac{c_1 t}{r_c} + 1\cdot \qquad (34)$$

Из (34) видно, что при временах, удовлетворяющих неравенству (17), динамическими эффектами даже при интенсивном охлаждении ($h \to \infty$) можно пренебречь.

Заключение. Проведенное решение динамической задачи термоупругости для нагретого до постоянной температуры сплошного цилиндра неограниченной длины, резко охлаждаемого в среде постоянной температуры, показало, что учет инерционных эффектов незначительно влияет на решение задачи для малых времен, когда упругие волны еще не дошли до оси цилиндра. При таких условиях можно рассматривать задачу как квазистатическую, что значительно облегчает ее решение.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Жорник В.А., Карташов Э.М.* Рост осесимметричных трещин при механических и тепловых воздействиях. – Таганрог: Изд-во Таганрогского пединститута, 2003. – 143 с.
2. *Жорник А.И.* Термоупругие процессы, проходящие в твердых телах с трещиноподобными дефектами. – Таганрог: Изд-во Таганрогского пединститута, 2003. – 259 с.
3. *Боли Б., Уэйнер Дж.* Теория температурных напряжений. – М.: Мир, 1964. – 517 с.
4. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Таблицы интегральных преобразований: В 2 т. – М.: Наука, 1969–1970. Т. 1: Преобразование Фурье, Лапласа, Меллина. – 1969. – 343 с.
5. *Паркус Г.* Неустановившиеся температурные напряжения. – М.: Физматгиз, 1963. – 251 с.

Статью рекомендовал к опубликованию д.ф.-м.н. Г.В. Куповых.

Жорник Александр Иванович – Таганрогский государственный педагогический институт им. А.П. Чехова; e-mail: Zhornik@land.ru; 347900, г. Таганрог, ул. Инициативная, 48; тел.: 88634601807; д.ф.-м.н.; профессор.

Жорник Виктория Александровна – e-mail: Zhornik_Victoria@mail.ru; к.ф.-м.н.; доцент.

Савочка Петр Анатольевич – Технологический институт федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Южный федеральный университет» в г. Таганроге; e-mail: Savochka07@mail.ru; 347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44, ГСП 17А; тел.: 88634360460; ассистент.

Zhornik Aleksandr Ivanovich – Taganrog State Pedagogical Institute named A.P. Chekhov; e-mail: Zhornik@land.ru; Russia, 48, Initsiativnaya street, Taganrog, 347900, Russia; phone: +78634601807; dr. of phys.-math. sc.; professor.

Zhornik Viktoriya Aleksandrovna – e-mail: Zhornik_Victoria@mail.ru; cand. of phys.-math. sc.; associate professor.

Savochka Petr Anatolievich – Taganrog Institute of Technology – Federal State-Owned Autonomy Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”; e-mail: Savochka07@mail.ru; GSP 17A, 44, Nekrasovskiy, Taganrog, 347928, Russia; phone: +78634371603; assistant.

УДК 531.38

А.А. Илюхин, С.А. Шретер

СОПОСТАВИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ РАЗЛИЧНЫХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ ОБТЕКАНИЯ ПЛАСТИНКИ НА УПРУГОМ СТЕРЖНЕ*

Построена математическая модель эксперимента по определению параметров аэродинамических сил, действующих на абсолютно твердую пластинку, жестко прикрепленную к упругому стержню. Стержень жестко защемлен на неподвижном основании. Гибридная система помещена в поток воздуха, который воздействует только на пластинку, стержень изгибается в одной плоскости. Идея используемого в работе метода построения решения задачи состоит в сведении исходного уравнения равновесия Кирхгофа к системе уравнений более низкого порядка с соответствующей функцией гамильтонова типа. Функция Гамильтона в последующем подвергается нормализации в определенном числе членов, что приводит к интегрируемой системе.

Гамильтонов подход; преобразование Биркгофа; изгиб стержня; математическая модель; аэродинамические силы.

A.A. Ilyukhin, S.A. Shreter

THE COMPARATIVE ANALYSIS OF VARIOUS SOLUTIONS OF THE PROBLEM FLOW PLATE ON AN ELASTIC ROD

The mathematical model of experiment by determination of parameters of the aerodynamic forces operating on absolutely firm plate, rigidly attached to an elastic core is constructed. The core is rigidly jammed on the motionless basis. The hybrid system is placed in a stream of air which influences only a plate, the core is bent in one plane. The idea of a method of construction of the decision of a task used in work consists in data of the initial equation of equilibrium of Kirchhoff to system of the equations of lower order with the corresponding function of Hamilton type. Function of Hamilton in the subsequent is exposed to normalization in a certain number of members that leads to integrated system.

Hamiltonian approach; Birkhoff transformation; bending the rod; the mathematical model; the aerodynamic forces.

Постановка задачи. Рассмотрим эксперимент по определению аэродинамических параметров в зависимости от ориентации пластинки на упругом стержне. Механическую систему помещают в набегающий поток воздуха. Нижний конец стержня жестко защемлен, к его верхнему концу жестко прикреплена абсолютно твердая пластинка. Предполагается, что поток воздействует только на пластинку, изгиб стержня происходит в одной плоскости. Начальное положение стержня определяется заданием угла наклона касательной к оси стержня $\theta = \psi$ по отношению к скоро-

* Данная статья написана при финансовой поддержке государственного задания Министерства образования и науки РФ ФГБОУ ВПО «ТГПИ имени А.П. Чехова» по проекту № 1.1885.2011.