Ламажапов Хубита Доржиевич – Самарский государственный университет путей сообщения; e-mail: hubitalamazhapov@gmail.com; 443066, г. Самара, 1-й Безымянный пер., 18; тел.: 88469990656, +79272069528; кафедра физики и экологической теплофизики; к.ф.-м.н.; доцент.

Ивченко Алексей Владимирович – Институт акустики машин при Самарском государственном аэрокосмическом университете им. акад. С.П. Королева; 443086, г. Самара, Московское шоссе, 34, корп. 14; с.н.с.; к.т.н.

Rybakov Dmitry Alexandrobvich – Samara State Aerospace University named after academician S.P. Korolyov ; e-mail: dim1r@yandex.ru; 32-84, Stepana Razina street, Togliatti, 445037, Russia; phone: +79023222099; the department of electronics and system engineering of Togliatti branch of SSAY; cand. of eng. sc.

Lamazhapov Khubuta Dorzhievich – Samara State University of Transport; e-mail: hubitalamazhapov@gmail.com; 18, 1st Bezymjannyj pereulok, Samara, 443066, Russia; phone: +78469990656; the department of thermal and heat engines; cand. of phis.-math. sc.; associate professor.

Ivchenko Alexej Vladimirovich – Research Institute of Machine Acoustics at the S.P. Korolyov Samara State Aerospace University; e-mail: fgrt@yandex.ru ; 34, Moskovskoje Shosse, korpus 14; Samara, 443086, Russia; senior research; cand. of eng. sc.

УДК 621.396:517.9:518.6

В.Н. Бирюков

ОБУСЛОВЛЕННОСТЬ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Ошибка параметрической оптимизации в условиях ограниченной точности исходных данных имеет случайный характер и существенно зависит как от жесткости задачи, так и от обусловленности по аргументу. Показано, что если первая составляющая ошибки может быть снижена существенно, то появляется возможность экспериментальной оценки второй составляющей ошибки. Обнаружено, что при малой точности исходных данных ошибка, вследствие плохой обусловленности, может стать доминирующей. Вероятность плохой обусловленности растет с увеличением размерности задачи, чем, в частности, и объясняется снижение эффективности методов численной оптимизации с ростом размерности.

Оптимизация; погрешность; обусловленность

V.N. Biryukov

CONDITIONALITY OF PARAMETRIC OPTIMIZATION

If the accuracy of a source data is limited, the error of parametric optimization is random. The error depends on the stiffness of a problem, and on the conditioning of the argument. This paper provided opportunity to experimental evaluation of the error. Component of the error associated with the high stiffness of the problem; in some cases it may be negligible. In these cases, the error component associated with poor conditioning becomes dominant. The article shows that for low accuracy of initial data ill-conditioning becomes a major factor of optimization error. The most important conclusion relates for a multi-dimensional problems, since the probability of ill-conditioning increases with increasing dimension.

Index Terms-optimization; error; conditionality

Трудности решения задач нелинейного программирования обычно связывают с плохой обусловленностью матрицы Гессе, спектральное число обусловленности которой η используется для количественной характеристики жесткости задачи, и с неопределенностью критерия останова спуска. Для прикладных нелинейных задач о наименьших квадратах плохая обусловленность гессиана является скорее правилом, чем исключением. Это относится, прежде всего, к задачам, возникающим из потребностей оценивания параметров математических моделей, и связано с тем, что такие модели часто бывают некорректно определенными [1]. В отличие от методов численного решения, например, дифференциальных уравнений, методы, используемые в нелинейном программировании, не основаны на анализе погрешности решения, а разрабатываются исключительно с целью повысить скорость спуска. К сожалению, такой подход продуцирует неинтерпретируемые результаты [2]. Далее рассматривается возможность оценки погрешности задачи численного спуска, и в результате этой оценки делается попытка оценить обусловленность задачи спуска.

Рассмотрим решение поставленной задачи на конкретном примере, предполагая, что полученные результаты могут быть использованы и в других случаях. Формулировка «практические задачи оптимизации» связана, прежде всего, с конечной точностью исходных данных. Поскольку исходные данные задаются не более чем с тремя – шестью точными знаками, функционал, вычисляемый с 16-ю 32-мя знаками, вблизи своего дна всегда оказывается недифференцируемой функцией параметров, что и является основным препятствием для высокой точности быстрых методов спуска. Рассмотрим основные свойства практической задачи оптимизации на примере тестовой задачи, – найти коэффициенты a и b операторной характеристики $K(p) = b/(p + a)$, $a > 0$, $b > 0$, если амплитудно-частотная характеристика $A(\omega)$ задана в виде таблицы $\{ A_i, \omega_i \}$, $i = \overrightarrow{1, n}$ с постоянным шагом по частоте [1].

Будем определять a и b методом наименьших квадратов из условия минимума критерия

$$S(a,b) = \sum_{i=1}^{n} \left(A_i - b \Big/ \sqrt{a^2 + \omega_i^2} \right)^2 .$$

На рис. 1 приведена зависимость абсолютных погрешностей оптимизации от начальной частоты ω_1 таблицы $\{A_i, \omega_i\}$ при постоянном диапазоне частот $\omega_n - \omega_1 = 0{,}1$ и трех точных знаках A_i. На том же рисунке приведена зависимость от ω_1 жесткости задачи η. При увеличении диапазона $\omega_n - \omega_1$ и (или) размерности выборки n значения Δ_a, Δ_b, η уменьшаются, но зависимости $\Delta(\omega_1)$ и $\eta(\omega_1)$ качественно остаются прежними. Для того, чтобы исключить неопределенность решения, вызываемую эвристическим критерием остановки спуска, численная задача была сведена к одномерной $S(a,b(a))$ путем определения параметра b на каждом шаге спуска из линейного уравнения $dS(a,b)/db = 0$.

В рассмотренном примере в рамках одной задачи жесткость менялась в пределах от 10^3 до 10^8, причем, если минимальная ошибка решения (при фиксированной точности исходных данных) соответствовала минимальной полученной жесткости (падающей с ростом диапазона ω), то максимальная может наблюдаться и при жесткости менее 10^6. Анализ погрешности тестовой задачи обобщает методику, используемую в [2]. Из полученных результатов следует, что точность решения выбранной задачи нелинейной оптимизации зависит не столько от обусловленности гессиана (жесткости), сколько от обусловленности $S(a, b, \omega)$ по аргументу. Анализ погрешности решения позволяет определить не только точность результатов, но и необходимую точность исходных данных для заданной точности результатов [3, 4]. Отметим, что при малой точности исходных данных и/или плохой обусловленности задачи ошибка оптимизации может оказаться катастрофической (на рис. 1 видно, что найденное значение a может оказаться отрицательным). Исследование точности численной оптимизации, таким образом, позволяет тестировать программы решения не только задач классификации, но и обнаружения.

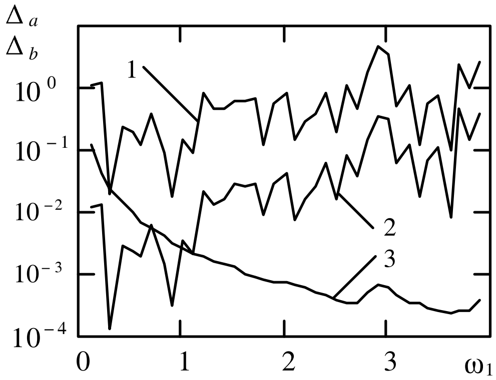

Рис. 1. Зависимость погрешности Δ_b (кривая 1), Δ_a (2) и жесткости η (3) от частоты ω_1; $n = 11$; точные значения параметров: $a^* = 1$; $b^* = 100$

Эффективность современных квазиньютоновских методов численной оптимизации падает с увеличением размерности задачи [5]. Поскольку обусловленность задачи в общем случае падает с увеличением ее размерности, то можно предположить, что одним из основных препятствий для решения многомерных задач служит именно плохая обусловленность.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Ракитский Ю.В., Устинов С.М., Черноруцкий И Г.* Численные методы решения жестких систем. – М.: Наука, 1979. – 211 с.
2. *Press W.L. et al.* Numerical recipes: the art of scientific computing. Cambridge university press, 1988. - 620 c.
3. *Бирюков В.Н.* Жесткие задачи радиоэлектроники // Деп. ВИНИТИ, № 196 – В 2007 от 05.03.07 - 120 с.
4. *Бирюков В.Н.* Оценка точности определения параметров моделей полевого транзистора // Известия вузов – Электроника. – 2010. – Т. 15. – № 4. – С. 22-27.
5. *Федоренко Р. П.* Введение в вычислительную физику. – М.: Изд-во Моск. физ.-техн. ин-та, 1994. – 528 с.

Статью рекомендовал к опубликованию д.т.н. В.В. Денисенко.

Бирюков Вадим Николаевич – Технологический институт федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Южный федеральный университет» в г. Таганроге; e-mail: biryukov@users.tsure.ru; 347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44, ГСП 17А; тел.: 88634371632; кафедра теоретических основ радиотехники; к.т.н.; доцент.

Biryukov Vadim Nikolaevich – Taganrog Institute of Technology – Federal State-Owned Autonomy Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”; e-mail: biryukov@users.tsure.ru; GSP 17A, 44, Nekrasovskiy, Taganrog, 347928, Russia phone: +78634371632; the department of fundamentals of radio engineering; cand. of eng. sc.; associate professor.