УДК 519.6

С.А. Виноградова

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КОМБИНАЦИИ МЕТОДОВ CG+ILU ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ КОНВЕКТИВНО-ДИФФУЗИОННЫХ ПРОЦЕССОВ В АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ

Рассматривалась трехмерная стационарная задача конвекции-диффузии со смешанными производными, описывающая конвективно-диффузионные процессы в анизотропной среде. На тринадцатиточечном шаблоне проведена конечно-разностная противопотоковая аппроксимация данной задачи. Для численного решения полученной СЛАУ предложен двухэтапный итерационный метод CG+ILU. Приводятся результаты вычислительных экспериментов, показавшие эффективную работу данного метода в анизотропной среде для различных наборов коэффициентов при смешанных производных в случае преобладания одного из процессов. Недостатком указанного метода является нестабильная работа в случае, когда число кососимметрии находится в интервале $0{,}1 < \kappa < 1$.

Уравнение конвекции-диффузии; анизотропная среда; метод CG; метод ILU.

S.A. Vinogradova

USING A COMBINATION OF CG+ILU METHODS FOR CONVECTION-DIFFUSION PROCESSES MODELING IN ANISOTROPIC MEDIA

Three-dimensional stationary convection-diffusion problem with mixed derivatives, describing convective-diffusion processes in anisotropic media, is considered. The upwind finite-difference approximation of this problem is held at thirteen point pattern. The two-step iterative CG+ILU method is proposed for the numerical solution of SLAE. Results of numerical experiments are given, which showed the effectiveness of the method in anisotropic medium for different sets of coefficients for the mixed derivatives in the case of the predominance of one of the processes. The disadvantage of the used method is unstable operation when the number of skew-symmetry is in the range of $0{,}1 < \kappa < 1$.

Convection-diffusion equation; anisotropic media; CG method; ILU-decomposition.

Введение. Анизотропные среды широко распространены в природе и имеют большое значение для человеческой деятельности, поскольку присутствуют в таких ее областях, как водоснабжение, добыча энергетического сырья (нефти и газа), борьба с засолением грунтовыми водами сельскохозяйственных площадей и т.д. Также анизотропные вещества, и в первую очередь наиболее яркие их представители – жидкие кристаллы, широко используются в технике при создании разнообразных электронных оптических систем и приборов, термоэлементов и пр. [5], [7].

Краевая задача конвекции-диффузии часто решается в процессе описания аэро- и гидродинамических процессов и является хорошо изученной для того случая, когда физические процессы происходят в изотропной среде. С точки зрения математики, в стационарном уравнении конвекции-диффузии анизотропия обуславливает появление смешанных производных в составе обобщенного эллиптического оператора.

В статье [2] на тринадцатиточечном шаблоне была проведена конечно-разностная противопотоковая аппроксимация трехмерной стационарной задачи конвекции-диффузии. При решении полученной СЛАУ применялся итерационный метод ILU-разложения, для сходимости которого была доказана необходимость выполнения следующих условий:

$$|k_{11}| > |k_{12} + k_{13}|, \; |k_{22}| > |k_{12} + k_{23}|, \; |k_{33}| > |k_{23} + k_{13}|, \; k_{\alpha\beta} \le 0, \; \alpha \ne \beta \quad (1)$$

Здесь $k_{\alpha\beta}$, $\alpha, \beta = 1,2,3$ – коэффициенты при производных второго порядка в составе обобщенного эллиптического оператора. Данные ограничения были получены в результате теоретических исследований и не обладают физическим смыслом. Основной целью исследования является преодоление ограничений (1) на разностную схему, полученных в [2].

Постановка задачи. Рассмотрим область D, которая является параллелепипедом с размерами $[0,L_1]\times[0,L_2]\times[0,L_3]$. Будем решать трехмерную стационарную задачу конвекции-диффузии в анизотропной среде, для чего рассмотримуравнение с обобщенным эллиптическим оператором, определенное на области D, дополненное на границе краевыми условиями первого рода.

$$\begin{cases} -Lu + a(x,y,z)\dfrac{\partial u}{\partial x} + b(x,y,z)\dfrac{\partial u}{\partial y} + c(x,y,z)\dfrac{\partial u}{\partial z} + d(x,y,z)u = f(x,y,z) \\ u\big|_{гр} = \mu \end{cases} \tag{2}$$

Построим в области D равномерную сетку. Проведем аппроксимацию смешанных производных в операторе диффузионного переноса стандартным образом [3]. Конвективную часть обобщенного эллиптического уравнения будем аппроксимировать с помощью хорошо исследованной и эффективной в случае изотропной среды конечно-разностной схемы «против потока» [6].

Полученная в результате такой аппроксимации конечно-разностная схема, построенная на тринадцатиточечном шаблоне, подробно описана в работе [2].

Метод решения. В результате, после перебора узлов сеточной области в натуральном порядке, разностный оператор преобразуется в СЛАУ вида $S\mathbf{x} = \mathbf{f}$.

Рассмотрим матрицу S как сумму матриц $S = A + C$, где A и C характеризуют диффузионную и конвективную часть исходной задачи соответственно. При выполнении условий $k_{\alpha\beta} = k_{\beta\alpha}$, $\alpha \neq \beta$ матрица A является симметричной и положительно определенной [3]. При выполнении условия $d(x,y,z) \geq 0$. матрица C является М-матрицей [2]. Для того, чтобы избежать необходимости следить за выполнением условий (1), разобьем решение СЛАУ на два этапа, чередующиеся в рамках внешнего итерационного процесса таким образом, что решение на одном из этапов служит для формирования правой части СЛАУ и в качестве начального приближения для задачи, решаемой на следующем этапе:

I. СЛАУ $Ax^{n+1/2} = b - Cx^n$ будем решать итерационным методом CG (методом сопряженных градиентов), сходящимся в случае симметричной и положительно определенной матрицы A [4].

II. СЛАУ $Cx^{n+1} = b - Ax^{n+1/2}$ будем решать итерационным методом ILU (методом неполного LU-разложения), сходящимся в случае М-матричности матрицы C [1].

Порядок следования этапов и точность расчета на каждом из них зависит от числа кососимметрии $\kappa = Pe \cdot h/2$, где Pe – число Пекле, h – шаг равномерной сетки на области D.

Вариант 1: $\kappa \leq 0{,}1$. В задаче преобладает диффузионный процесс, основной вклад в решение вносит результат работы метода CG. В этом случае во внешнем итерационном процессе сначала решается СЛАУ I методом CG, а после решение корректируется одним шагом метода ILU при решении СЛАУ II.

Вариант 2: $\kappa \geq 1$. В задаче преобладает конвективный процесс, основной вклад в решение вносит результат работы метода ILU. В этом случае сначала решается СЛАУ II методом ILU, а после решение корректируется одним шагом метода CG при решении СЛАУ I. Для достижения относительной погрешности минимального порядка достаточно провести одну итерацию внешнего процесса.

Вариант 3: $0{,}1 < \kappa < 1$. В задаче диффузионный и конвективный процессы оказывают примерно равное влияние. В этом случае применимы оба вышеописанных варианта метода, но первый из них не гарантирует сходимости, а второй может давать достаточно большую относительную погрешность.

Вычислительный эксперимент. Производится численное решение рассмотренного выше разностного аналога задачи (2), описанным выше методом CG+ILU. Взята единичная трехмерная область $D = [0,1]\times[0,1]\times[0,1]$ с равномерной сеткой по пространству в направлениях осей Ox, Oy, Oz с количеством точек разбиения по каждому из направлений, равным *n=10, n=30, n=50*. Коэффициенты в диффузионной части уравнения брались константами: $k_{11} = k_{22} = k_{33} = 1$. В конвективной части использовался наиболее сложный для расчетов набор конвективных коэффициентов из [2]:

$$A(x,y,z) = 2\sin\pi x,\ \ B(x,y,z) = -\pi y\cos\pi x,\ \ C(x,y,z) = -\pi z\cos\pi x.$$

Вычислительный эксперимент проводился для точного решения уравнения $u = x(x-1)y(y-1)z(z-1)$. Задача дополнялась однородными краевыми условиями первого рода. Использовались следующие наборы коэффициентов при смешанных производных в уравнении конвекции-диффузии:

Набор 1. $k_{12} = k_{21} = -0,2,\ \ k_{13} = k_{31} = -0,4, k_{23} = k_{32} = -0,1,$

Набор 2. $k_{12} = k_{21} = 0,2,\ \ k_{13} = k_{31} = 0,4, k_{23} = k_{32} = 0,6.$

Проведенные расчеты показали, что точность представленного метода зависит в первую очередь от числа кососимметрии κ. В случае преобладания диффузии (Вариант 1) относительная погрешность численного решения менее $O(h)$ и уменьшается с увеличением количества узлов разбиения. В случае преобладания конвекции (Вариант 2) относительная погрешность увеличивается, что связано с более высокой погрешностью работы метода ILU при преобладании конвективного процесса [2]. В отличие от точности решения, количество итераций на разных этапах работы метода от числа кососимметрии напрямую не зависит, а увеличивается с ростом числа узлов разбиения.

Наиболее сложным случаем является Вариант 3, когда диффузионный и конвективный процессы примерно равноценны. При $0,1 < \kappa < 1$ метод демонстрирует нестабильную работу на матрицах больших размерностей.

Зависимость относительной погрешности найденного численного решения от κ для различных *n* отражена на (рис. 1). Зависимость количества числа итераций от *n* и *Pe* представлена в (табл. 1).

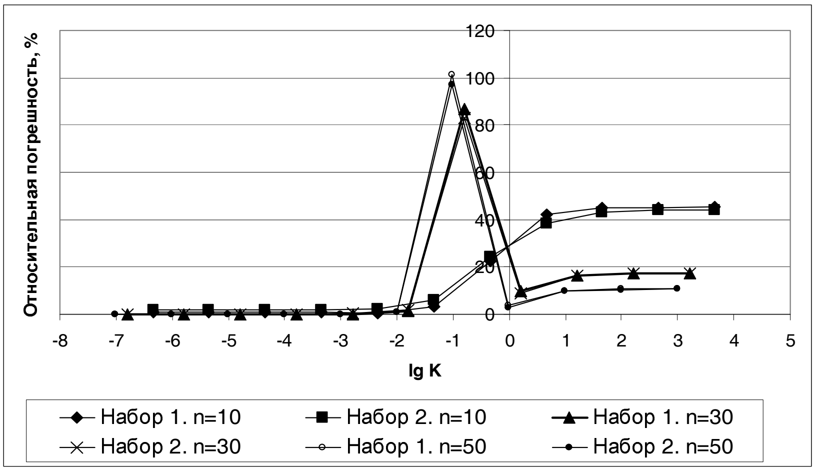

Рис. 1. Зависимость относительной погрешности решения от числа кососимметрии и количества узлов разбиения сетки

Таблица 1

Зависимость количества числа итераций этапов CG и ILU от числа Пекле и количества узлов разбиения сетки

n	lg Pe	CG		ILU	
		Набор 1	Набор 2	Набор 1	Набор 2
10	–5	1108	1912	32	32
	–3	815	1421	31	31
	–1	461	2140	29	31
	0	225	457	27	29
	1	1002	520	77	21
	3	1	1	28	28
	5	1	1	28	28
30	–5	6521	8060	71	46
	–3	4372	6021	66	46
	–1	2216	3506	62	46
	0	1078	1774	85	45
	1	1	1	43	44
	3	1	1	43	43
	5	1	1	43	43
50	–5	8757	16177	56	57
	–3	6501	11682	56	56
	–1	2845	6506	50	56
	0	1199	3233	53	56
	1	1	1	56	57
	3	1	1	56	56
	5	1	1	56	56

Заключение. Используемая аппроксимация трехмерной стационарной задачи конвекции-диффузии со смешанными производными разностями «против потока» позволяет сформулировать условия симметричности и положительной определенности для диффузионного, а также условия М-матричности для конвективного конечно-разностных операторов. Это дает возможность сконструировать двухэтапный итерационный метод, в рамках которого СЛАУ с диффузионным оператором в левой части решается сходящимся для нее методом CG, а СЛАУ с конвективным оператором в левой части решается сходящимся для нее методом ILU. Конструкция данного метода существенно зависит от числа кососимметрии.

Проведенные вычислительные эксперименты показали эффективную работу данного метода в случаях $\kappa \le 0{,}1$ и $\kappa \ge 1$ в анизотропной среде. Существенным недостатком описанного метода CG+ILU является его нестабильная работа в случае, когда число кососимметрии находится в интервале $0{,}1 < \kappa < 1$ при больших размерностях матрицы.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Meurant G.* Computer solution of large linear systems. ELSEVIER, Amsterdam, 1999. – 753 p.
2. *Виноградова С.А., Крукиер Л.А.* Решение трехмерной стационарной задачи конвекции-диффузии в анизотропной среде методом неполного LU-разложения // Труды XIV Молодежной конференции-школы с международным участием «Современные проблемы математического моделирования», пос. Дюрсо, 12-17 сентября 2011 г. – С. 74-90.
3. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. – М.: Наука, 1977. – 656 с.
4. *Самарский А.А., Николаев Е.С.* Методы решения сеточных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 592 с.
5. *Снарский А.А., Пальти А.М., Ащеулов А.А.* Анизотропные термоэлементы // Физика и техника полупроводников. – 1997. – Т. 31, № 11. – С. 1291-1298.
6. *Роуч П.* Вычислительная гидродинамика. – М.: Мир, 1980. – 618 с.
7. *Шибаев В.П.* Необычные кристаллы или загадочные жидкости // Соросовский образовательный журнал. – 1996. – № 11. – С. 37-46.

Статью рекомендовал к опубликованию д.ф.-м.н. А.Л. Чикин.

Виноградова Светлана Александровна – Южно-Российский региональный центр информатизации (ЮГИНФО) Южного федерального университета; email: svetlavi@sfedu.ru; 344090, г. Ростов-на-Дону, пр. Стачки, 200/1, корп. 2; тел.: +78632199734; лаборатория вычислительного эксперимента на супер-ЭВМ; младший научный сотрудник.

Vinogradova Svetlana Alexandrovna – Computer Center SFU; email: svetlavi@sfedu.ru; 200/1, Stachki av., build. 2, Rostov-on-Don, 344090, Russia; phone: +78632199734; laboratory of computational experiments on super-computers; junior research fellow.

УДК 519.254.1

Д.В. Иванов, О.В. Усков

РЕКУРРЕНТНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ БИЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ПОМЕХАМИ НАБЛЮДЕНИЯ ВО ВХОДНОМ И ВЫХОДНОМ СИГНАЛАХ

Хорошо известно, что метод наименьших квадратов дает смещенные оценки параметров для динамических систем с помехами во входных и выходных сигналах. В работе предложен рекуррентный алгоритм на основе стохастической аппроксимации для оценивания параметров билинейных динамических систем с помехами наблюдения во входном и выходном. Доказана сильная состоятельность, получаемых оценок параметров, при ограничениях, не требующих знания закона распределения помех. Предложенный алгоритм был реализован в среде Matlab и проведено сравнение с рекуррентным методом наименьших квадратов и рекуррентным методом расширенных инструментальных переменных. Результаты моделирования подтвердили высокую эффективность предложенного алгоритма.

Рекуррентное оценивание; стохастическая аппроксимация; модель с ошибками в переменных; билинейные системы; метод наименьших квадратов.

D.V. Ivanov, O.V. Uskov

RECURSIVE ESTIMATION BILINEAR DYNAMICAL SYSTEMS WITH ERRORS-IN-VARIABLES

It is well known that the method of least squares gives biased estimates of parameters for dynamic systems when the observed input-output data are corrupted with noise. Recursive algorithm based on stochastic approximation is proposed for identification single-input-single-output (SISO) bilinear dynamic systems with errors-in-variables. The estimates are proved to be convergent to the true values with probability one, the resulting estimates of parameters under con-