

УДК 531/534:57

В.А. Батищев, Д.С. Петровская

МОДЕЛИРОВАНИЕ СПИРАЛЬНЫХ ТЕЧЕНИЙ ЖИДКОСТИ В АОРТЕ

Исследованы спиральные волны в стационарном потоке вязкой жидкости внутри аорты, которая моделируется цилиндром конечной длины, ограниченным тонкой упругой изотропной оболочкой. Рассчитаны два семейства спиральных волн (длинные и короткие) и семейство квазистационарных спиральных режимов течений жидкости. Показано, что длинные спиральные волны локализованы в тонком пограничном слое вблизи оболочки. Свойства этих волн полностью определяются упругими свойствами оболочки и вязкостью жидкости. Короткие волны заполняют все поперечное сечение аорты. Свойства этих волн слабо зависят от упругих свойств оболочки. Механизмом переноса коротких волн является стационарный поток. Винтовые течения локализуются вблизи входа в аорту. Квазистационарные моды в первом приближении не зависят от времени, переносятся средним стационарным потоком жидкости и, в отличие от спиральных волн, не изменяют направления вращения жидкости в сосуде.

Спиральные волны; стационарный поток; квазистационарный режим; пограничный слой.

V.A. Batischev, D.C. Petrovskaya

SIMULATION OF SPIRAL FLUID FLOWS IN THE AORTA

Researched spiral waves in steady flow of viscous fluid inside the aorta, which is modeled by a cylinder of finite length, a thin isotropic elastic shell. There are investigated two families of spiral waves (long and short) and family of quasi-stationary spiral fluid currents. Shows that the long spiral waves are localized in a thin boundary layer near the casing. These properties are determined by the elastic properties of the waves full shell and viscosity of the liquid. Short wave fill all aortic cross section. The properties of these waves is dependent on elastic properties of shell. The transport mechanism short-wave is stationary stream. Quasi in first approximation does not depend on time, are moved by liquids and, unlike spiral waves, do not change the direction of rotation of the liquid in the bottle.

Spiral wave; stationary flow; kvazistacionarnyj mode; boundary layer.

Во второй половине прошлого века появились сообщения об обнаружении винтовых течений крови в артериях человека и животных [1,2]. В этих работах на основе анализа экспериментальных данных показано, что одной из причин спиральных течений крови может быть закрученная структура стенок левого желудочка сердца, что порождает вихревые течения крови на входе в аорту и перенос вихрей потоком жидкости. Среди причин возникновения спиральных течений крови могут быть и механические свойства стенок сосудов, и неустойчивость течения крови в левом желудочке сердца при истечении в аорту с последующей бифуркацией вращения и др. В работе [3] показано, что анизотропия стенок кровеносных сосудов приводит к появлению длинных спиральных волн. Однако эти волны локализуются в пограничном слое вблизи стенок сосудов. В настоящей работе рассчитаны короткие спиральные волны, которые заполняют все поперечное сечение сосуда и слабо зависят от упругих свойств оболочки. Показано, что механизмом переноса этих волн является стационарный поток, который наблюдается в кровеносном сосуде. Рассчитаны и спиральные течения, которые не изменяют направление вращения жидкости и в первом приближении не зависят от времени.

Рассматривается задача о движении спиральных волн малой амплитуды в вязкой несжимаемой жидкости, заполняющей цилиндр конечной длины, который ограничен тонкой упругой изотропной оболочкой. Спиральные волны распростра-

няются на фоне стационарного потока и длинных продольных волн, которые наблюдаются в крупных кровеносных сосудах. Движение жидкости описывается системой уравнений Навье–Стокса совместно с динамическими уравнениями тонкой упругой оболочки в рамках безмоментной теории в цилиндрических координатах r, θ, z . Длинные продольные пульсовые волны изучались во многих работах [1]. В [3] поле скоростей длинных волн представлено в виде ряда Фурье с нулевой гармоникой, которая представляет собой течение Пуазейля. В связи с этим предполагается, что стационарный поток определяется полем скоростей, у которого осевая компонента скорости квадратична по радиальной координате, а остальные компоненты отсутствуют. Отметим, что в аорте собаки средняя скорость стационарного потока крови изменяется в пределах от 0,1 до 0,4 м/с [1].

В безразмерных переменных изучается осесимметричная задача, у которой поле скоростей, давление и смещения точек срединной поверхности оболочки не зависят от окружной цилиндрической координаты. Течение жидкости предполагается периодическим по времени, период которого равен периоду сердечного цикла [1]. Приведем уравнение для окружной компоненты скорости:

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + R \left(v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{v_r v_\theta}{r} \right) = \varepsilon_v^2 \left(\nabla^2 v_\theta - \frac{v_\theta^2}{r^2} \right).$$

Здесь v_r, v_θ, v_z – компоненты вектора скорости, $\varepsilon_v = \sqrt{\nu / (\omega a^2)}$ – малый параметр, пропорциональный толщине пограничного слоя вблизи поверхности цилиндра, ν – кинематический коэффициент вязкости жидкости, a – радиус срединной поверхности оболочки, ω – частота сердечного цикла. $R = U / (a \omega)$, где U – характерная скорость стационарного потока.

Решение задачи представим в виде суммы двух вектор-функций $V = V_1 + V_2$. Вектор V_1 описывает стационарный поток и короткие волны. Вектор V_2 описывает длинные волны, решение для которых известно [1]. Эти волны движутся с фазовой скоростью, близкой к значению $c_0 = \sqrt{hE / (2a\rho)}$, где h, ρ, E – соответственно толщина оболочки, плотность жидкости и модуль Юнга материала оболочки. Введем малый параметр по формуле $\varepsilon_k = \omega a / c_0$. Для аорты собаки $\varepsilon_k \sim 10^{-2}$. Задача решается асимптотическим методом, путем разложения решений в ряды по степеням параметра ε_k . Отметим, что осевая компонента скорости длинных волн имеет порядок $O(1)$. Предположим, что окружная компонента скорости жидкости мала и имеет порядок $O(\varepsilon_k)$. Приведем асимптотические разложения компонент вектора V_1 , которые следуют из оценок слагаемых в уравнениях Навье–Стокса и динамических уравнений оболочки

$$w_\theta = \varepsilon_k w_{\theta 1} + \dots, \quad w_z = V(r) + \varepsilon_k^2 w_{z 1} + \dots \quad (\varepsilon_k \rightarrow 0)$$

Здесь w_θ, w_z – соответственно окружная и осевая компоненты скорости жидкости, $V(r)$ – скорость среднего стационарного потока. Аналогичные разложения записываем и для других компонент. Подставляем асимптотические ряды в уравнения движения, краевые условия и приравниваем нулю сумму коэффициентов при одинаковых степенях параметра ε_k . Для окружной компоненты скорости получаем краевую задачу, учитывающую конвективный перенос средним течением и продольной длинной волной

$$\frac{\partial w_{\theta 1}}{\partial t} + R(v_{z0}(r, z_1, t) + V(r)) \frac{\partial w_{\theta 1}}{\partial z} = \varepsilon_v^2 \left(\nabla^2 w_{\theta 1} - \frac{w_{\theta 1}}{r^2} \right), \quad (1)$$

$$w_{\theta 1} = 0 \quad (r = 1), \quad w_{\theta 1} = 0 \quad (r = 0), \quad w_{\theta 1} \rightarrow 0 \quad (z \rightarrow \infty).$$

Здесь v_{z0} – осевая компонента скорости длинной пульсовой волны, $z_1 = \varepsilon_k z$ – медленная осевая координата. Функция $V(r)$ представляет собой квадратичный профиль скорости среднего течения $V(r) = 1 - r^2$. На стенках цилиндра функция $w_{\theta 1}$ обращается в ноль (условие прилипания). Показано, что для коротких волн вязкоупругие свойства оболочки учитываются только в высших приближениях.

Короткие спиральные волны находятся путем решения задачи на собственные значения (1) асимптотическим и численным методами. Функция v_{z0} представлена в виде суммы, описывающей волны в идеальной жидкости и колеблющийся периодический по времени пограничный слой на стенке цилиндра. Главный вклад в выражение для коротких спиральных мод определяется формулой

$$w_{\theta 1} = Q_{nm}(t, z_1) \left(F_{n,m}(r) \exp(i(k_{n,m} - nt)) + H_{n,m} \exp(ik_{n,m} z) \right).$$

Здесь $n, m = 1, 2, 3, \dots$. Значению $n = 0$ соответствуют «квазистационарные» моды. Функция $Q_{n,m}$ учитывает влияние длинных пульсовых волн вне пограничного слоя. Амплитуды $F_{n,m}$ найдены численно и асимптотически. Функция $H_{n,m}$ – невязка, которая мала по сравнению с $F_{n,m}$. Показано, что фазовые скорости спиральных волн в главном приближении совпадают с максимальным значением скорости среднего стационарного потока. Декременты затухания этих волн имеют порядок $O(\varepsilon_v)$. Для $m = 1$ возникает вязкий критический слой вблизи оси цилиндра. На рис. 1 изображены вещественная и мнимая части амплитуды $F_{5,1}$ при $n = 5, m = 1$. Собственные функции локализуются в критическом слое, причем эффект локализации усиливается с ростом номера моды n , с ростом частоты и с уменьшением вязкости жидкости.

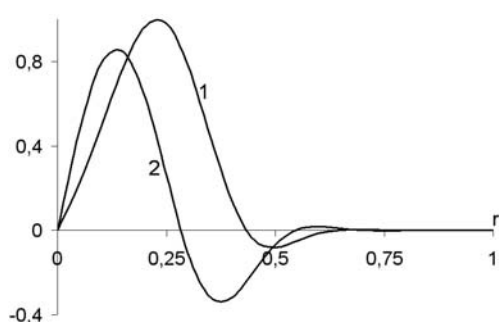


Рис. 1. Спиральная мода

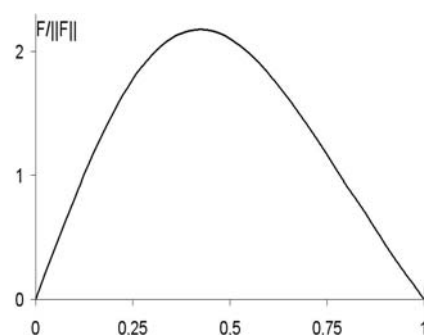


Рис. 2. Квазистационарная мода

Рассмотренные спиральные волны изменяют направление вращения жидкости на обратное либо со временем, либо по сечению. Для функции $w_{\theta 1}$ построена асимптотика «квазистационарного» режима, главный член которого для первой

моды не изменяет направления вращения. На рис. 2 изображена амплитуда этой моды в зависимости от радиальной координаты. Отметим, что эта функция слабо изменяется при изменении скорости среднего потока и имеет конечный предел при $\varepsilon_\nu \rightarrow 0$.

При отсутствии стационарного потока $V=0$ показано, что декремент затухания спиральных волн имеет большое значение порядка $O(1/\varepsilon_\nu)$. В случае $V \neq 0$ этот декремент мал и имеет порядок $O(\varepsilon_\nu)$. Следовательно, механизмом переноса коротких спиральных волн является стационарный поток, так как при его отсутствии перенос спиральных мод полем длинных волн незначителен. При длине нисходящей аорты собаки, по данным [1], приблизительно 20 см спиральные волны переносятся средним потоком на расстояние от одного до 4 см в течение сердечного цикла, т.е. винтовые течения крови локализируются вблизи входа нисходящей аорты.

Заключение. В работе построены асимптотические разложения спиральных волн в упругом цилиндре, моделирующем аорту. Получены три типа решений – короткие, длинные волны и квазистационарные течения жидкости. Короткие волны заполняют все поперечное сечение цилиндра и слабо зависят от упругих свойств оболочки цилиндра. Механизмом переноса этих волн является стационарный поток. Винтовые течения крови локализируются вблизи входа в аорту. Длинные волны локализованы в пограничном слое вблизи оболочки сосуда. Квазистационарные моды, в отличие спиральных волн, не изменяют направления вращения жидкости.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Педли Т. Гидродинамика крупных кровеносных сосудов. – М.: Мир, 1983. – 400 с.
2. Кикнадзе Г.И., Олейников В.Г., Гечелидзе И.А., Городков и А.Ю. др. О структуре потока в левом желудочке сердца и аорте с применением точных решений нестационарных уравнений гидродинамики и морфометрических исследований // ДАН. – 1996. – Т. 351, № 1. – С. 119-122.
3. Богаченко С.Е., Устинов Ю.А. Модель движения крови в артериальном сосуде во время систолы и анализ напряженного состояния стенки с учетом винтовой анизотропии // Российский журнал биомеханики. – 2009. – Т. 13, № 1. – С. 29-42.

Статью рекомендовал к опубликованию профессор М.Ю. Жуков.

Батищев Владимир Андреевич – Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Южный федеральный университет»; e-mail: batish@math.rsu.ru; 344033, г. Ростов-на-Дону, Жлобинский пер., 17, кв. 57; тел.: 89054786756; факультет математики, механики и компьютерных наук; кафедра ТКГАМ; д.ф.-м.н.; профессор.

Петровская Дарья Сергеевна – e-mail: d_manchenko@mail.ru; 344090, г. Ростов-на-Дону, ул. Милячакова, 8,а; тел.: 89081890264; факультет математики, механики и компьютерных наук; кафедра ТКГАМ; магистр.

Batishchev Vladimir Andreevich – Federal State-Owned Autonomy Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”; e-mail: batish@math.rsu.ru; 17, Zhlobin lane, kv. 57, Rostov-on-Don, 344033, Russia; phone: +79054786756; faculty of mathematics, mechanics and computer science; the department of theoretical and computational fluid dynamics; dr. of phis.-math. sc.; professor.

Petrovskaya Daria Sergeevna – e-mail: d_manchenko@mail.ru; 8,A, Milchakova street, Rostov-on-Don, 344090, Russia; phone: +79081890264; faculty of mathematics, mechanics and computer science; the department of theoretical and computational fluid dynamics; undergraduate.