БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Хемраджани А.* Гибкая разработка приложений на Java с помощью Spring, Hibernate и Eclipse. – М: Вильямс, 2008 – 320 с.
2. *Fink J.* A review and analysis of commercial user modeling servers for personalization on the world wide web [текст] / Kobsa, A. // User Modeling and User-Adapted Interaction. – 2000. – № 10 (2-3). – P. 209-249.
3. *Kobsa A.* User Modeling and User-Adapted Interaction [текст] Ten Year Anniversary Issue, volume 11, Netherlands. Kluwer Academic Publishers, 2001.
4. *Malaka R.* Context and user adapted mobile interaction. [текст] // Nexus Workshop on Context-Aware Systems, Stuttgart, Germany, 2003.
5. *Sandoval J.* RESRful Java Web Services. [текст] / J. Sandoval – Birmingham: Packt Publishing, 2009. – 257 с.
6. Sencha Touch: сайт [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://www.sencha.com.

Статью рекомендовал к опубликованию к.т.н. И.Г. Воеводин.

Жолобов Денис Алексеевич – Астраханский государственный университет; e-mail: denis.jolobov@aspu.ru; 414056, г. Астрахань, Татищева, 20 а; тел.: 88512610860; кафедра иинформационных систем; к.т.н.

Карагуйшиева Майя Ануарьевна – e-mail: k-maya-a@mail.ru; кафедра информационных систем; аспирант.

Zholobov Denis Alexeevich – Astrakhan State University; e-mail: denis.jolobov@aspu.ru; 20 a, Tatishcheva, Astrakhan, 414056, Russia; phone: +78512610860; the department of information systems; cand. of eng. sc.

Karaguyshieva Mayya Anuar'evna – Astrakhan State University; Tatishcheva 20 a, Astrakhan, 414056, Russia; e-mail: k-maya-a@mail.ru; Information Systems Department; graduate student.

УДК 330.4:51-77

В.Г. Медницкий, В.Ю. Леонов

ЭКОНОМИЧЕСКОЕ РАВНОВЕСИЕ РЫНКА ТОВАРНОЙ ПРОДУКЦИИ*

Во всех известных к настоящему времени математических моделях экономического равновесия игнорируется различие между валовой и товарной продукцией производства, которое наиболее просто может быть представлено с помощью леонтьевской модели. В работе показано, что при объединении ее с системой моделей, описывающих равновесие типа Эрроу-Дебре, возникает рынок товарной продукции, экономическое равновесие которого формируется при условиях продуктивности леонтьевской матрицы и полуположительности цен равновесия. При этом формируются полуположительные векторы объемов выпуска товарной продукции и той ее части, на которую предъявляется потребительский спрос. Стоимость же в ценах равновесия всей произведенной товарной продукции совпадает с объемом ее реализации в потреблении и всегда положительна.

Экономическое равновесие; полуположительные цены.

V.G. Mednitsky, V.Yu. Leonov

ECONOMY EQULIBRIUM OF COMMODITY PRODUCT MARKET

In all presently known mathematical models of economic equilibrium ignored the difference between gross and commodity output production, which is most simply be represented by a Leontief model. It is shown that by combining it with a system of models describing the equilibrium of the Arrow-Debreu type, there is a market for commodities, the economic balance of which is

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 12-01-00893-а).

formed under the conditions of productivity and the Leontief matrix polupolozhitelnosti equilibrium prices. In this case the vectors are formed polupolozhitelnye volume of commodity production and the part which is presented to the consumer demand. The cost of the entire balance of the price of commodity products produced coincides with the volume of its realization in consumption, and is always positive.

Equilibrium of economy; semi-positive prices.

В [1, 2] было показано, что при включении *леонтьевской модели* [3, 4] в задачу формирования *экономического равновесия* у нее, кроме известного решения Эрроу–Дебре [4], возникают оптимальные решения (в многокритериальном случае – равновесия) еще двух типов. В одном из них цены и доходы нулевые, а управление производством продукции осуществляется по тем критериям, которыми руководствуются лица, принимающие такие решения. Во втором случае при сколь угодно высоких ценах не создается добавленная стоимость, что приводит к прекращению производства всех видов продукции. Таким образом, только первое из этих решений можно рассматривать как такое состояние производственной системы, в котором она функционирует нормально, и цель настоящей работы заключается в выявлении и исследовании тех свойств, которые возникают в связи с привлечением к его формированию леонтьевской модели.

В [2] было показано, что предприятие в случае продуктивности [5] входящей в систему его матричных моделей [6] леонтьевской матрицы на уровне их объединения $l \in L$ может быть представлено вектором своей *товарной продукции* x^l, с которым формируются соотношения

$$z_i^l = \sum_j a_{ij}^l x_j^l, i \in I_l^1, \tag{1}$$

$$\sum_j f_{ij}^l x_j^l \le f_i^l, i \in I_l^2; x_j^l \ge 0, j \in I_l. \tag{2}$$

В (1) устанавливаются объемы потребностей предприятия в ресурсах внешнего происхождения, а в (2) – ограничения на использование его внутренних ресурсов. Поэтому $a_{ij}^l, f_{ij}^l \ge 0$, а множества I_l, I_l^1, I_l^2 попарно не пересекаются. Условия (2) удобно представить в форме

$$x^l \in X_l, l \in L, \tag{3}$$

где X_l – ограниченное, замкнутое и выпуклое множество векторов с неотрицательными компонентами. Так как обычно [6] все векторы-столбцы матрицы F_l полуположительны, а вектор $f^l > 0$, то в (2) выполняются дополнительные условия, которые применительно к (3) принимают вид

$$\begin{aligned} &0 \in X_l; \exists \tilde{x}^l > 0 : \tilde{x}^l \in X_l; \\ &\forall \left(x^l \ge \bar{x}^l \ge 0\right) : x^l \in X_l \Rightarrow \bar{x}^l \in X_l. \end{aligned} \tag{4}$$

Поскольку $\forall l \in L : I_l \bigcap I_l^1 = \varnothing$, то для каждого $i \in I = \bigcup_{l \in L} I_l$ из множества L можно выделить подмножества предприятий $L_i^+ \ne \varnothing$ – производящих и L_i^- – потребляющих указанный продукт, определяя вектор товарной продукции объединения равенствами

$$y_i = \sum_{l \in L_i^+} x_i^l - \sum_{l \in L_i^-} \sum_{j \in I_l} a_{ij}^l x_j^l, i \in I. \tag{5}$$

Условиями (3), (5) задано выпуклое, ограниченное и замкнутое множество $\tilde{Y}$, а множеством $Y = Y^{+} \bigcap \tilde{Y}$ – допустимые значения y, где Y^{+} – конус неотрицательных векторов в аффинной оболочке [7] множества $\tilde{Y}$.

В соответствии с экономическими представлениями [4, 8] векторы *совокупного предложения* $\eta(p)$ и *совокупного спроса* $\xi(p)$ при *любых* текущих значениях цен p формируются оптимальными решениями задач

$$p\eta(p) = \max_{y \in Y}\{py\} \tag{6}$$

$$\begin{gathered}\xi(p) = \sum_{k \in K} \xi^{k}(p), \\ \varphi_{k}\left(\xi^{k}(p)\right) - p\xi^{k}(p) = \max_{y \in Y^{+}}\{\varphi_{k}(y) - py\}, k \in K,\end{gathered} \tag{7}$$

а в состоянии экономического равновесия при некоторых ценах p^{0} для указанных решений выполняются условия Вальраса [4]

$$p^{0} \geq 0, \eta(p^{0}) \geq \xi(p^{0}), \ p^{0}\eta(p^{0}) = p^{0}\xi(p^{0}). \tag{8}$$

Теорема 1. Если для векторов $\eta(p^{0}), \xi(p^{0})$, *построенных в (6),(7) при ценах* p^{0}, *выполняются условия (8), то на множестве* Y *набором векторов* $\xi^{k}(p^{0}), k \in K$, *полученных в (7), будет определено оптимальное по Парето распределение объемов совокупного спроса, заданных вектором* $\xi(p^{0})$.

Действительно, если для некоторого вектора $\bar{y} = \sum_{k \in K} \bar{y}^{k}, \bar{y}^{k} \geq 0, k \in K$ выполняются условия $\varphi_{k}(\bar{y}^{k}) \geq \varphi_{k}\left(\xi^{k}(p^{0})\right), k \in K; \max_{k \in K}\left\{\varphi_{k}(\bar{y}^{k}) - \varphi_{k}\left(\xi^{k}(p^{0})\right)\right\} > 0$, то из (7), (8) следует, что $p^{0}\bar{y} > p^{0}\xi(p^{0}) = p^{0}\eta(p^{0})$ и в соответствии с (6) вектор $\bar{y} \notin Y$, ибо все множество Y находятся в полупространстве $p^{0}y \leq p^{0}\eta(p^{0})$.

Оптимальность по Парето не обязательно означает, что состояние равновесия окажется хорошим. Например, условия (8) будут выполнены, если $p^{0} = 0, \eta(0) > 0$, а $\xi(0) = 0$. Однако с экономической точки зрения это решение выглядит бессмысленным. Тем не менее, оно может быть реализовано, если в (7) $\forall k \in K : \max\{\varphi_{k}(y) | y \in Y^{+}\}$ достигается в единственной точке $y^{k} = 0$. Таким образом, для получения полноценных с экономической точки зрения решений необходимы дополнительные условия, которые и формулируются в следующих ниже утверждениях.

Лемма 1. У системы (5) *имеется положительное решение*

$$\bar{y}_{i}, \bar{x}_{j}^{l} > 0, i \in I, j \in I_{l}, l \in L, \tag{9}$$

или для полуположительного вектора цен p' *выполняются неравенства*

$$p_{j} - \sum_{i \in I} p_{i}' a_{ij}^{l} \leq 0, j \in I_{l}, l \in L, . \tag{10}$$

После исключения из (5) и (9) переменных $\bar{y}_{i}, i \in I$ для векторов $\bar{x}^{l}, l \in L$ остаются неравенства, которыми нуль отсекается от выпуклой оболочки строк некоторой матрицы. Если же он содержится в этой выпуклой оболочке, то для некоторого полуположительного вектора $p_{j}', \mu_{j}^{l}, j \in I_{l}, l \in L$ будут выполнены равенства

$$p'_j - \sum_{i\in I} p'_i a^l_{ij} + \mu^l_j = 0,\, j\in I_l, l\in L. \tag{11}$$

Полуположительным в (11), однако, должен быть именно вектор p', так как $p' = 0 \Rightarrow \forall j,l : \mu^l_j = 0$. Но для полуположительного вектора p' неравенства (10) следуют из (11), ибо $\mu^l_j \geq 0,\, j\in I_l, l\in L$.

Условия (9) для *простой* леонтьевской модели, где каждый продукт производится только в одном *технологическом процессе* [5], означают, что формирующая ее матрица $A \geq 0$ и продуктивна. Поэтому и в *общей* леонтьевской модели, где каждый продукт может производиться несколькими способами, удобно говорить о неравенствах (9) как об условиях продуктивности матрицы, формирующей отображение (5).

Следствие 1. Матрица общей леонтьевской модели продуктивна (в указанном выше смысле) тогда и только тогда, когда из нее можно выделить простую леонтьевскую модель с продуктивной матрицей $A \geq 0$.

Действительно, если для полуположительного вектора p' выполняются неравенства (10), то в (5) непродуктивны все простые леонтьевские модели. Если же в (5) существует простая модель с продуктивной матрицей $A \geq 0$, то по лемме 1 не существует вектора p', удовлетворяющего неравенствам (10), а значит, в (5) имеется решение вида (9).

В силу следующего из (5) тождества

$$\sum_{i\in I} p_i y_i = \sum_{l\in L}\sum_{j\in I_l}\left(p_j - \sum_{i\in I} p_i a^l_{ij}\right)x^l_j = \sum_{l\in L}\sum_{j\in I_l} w^l_j(p)x^l_j\,, \tag{12}$$

где

$$w^l_j(p) = p_j - \sum_{i\in I} p_i a^l_{ij},\, j\in I_l, l\in L, \tag{13}$$

оптимальное решение задачи (6) строится при использовании в (5) любого набора векторов $\chi^l\left(w^l(p)\right), l\in L$, оптимальных в производственных задачах

$$\max_{x^l\in X_l}\left\{w^l(p)x^l\right\}, l\in L. \tag{14}$$

Теорема 2. Если из (5) можно выделить простую леонтьевскую модель с продуктивной матрицей $A \geq 0$, *а условия (4) выполнены для множеств* $X_l, l\in L$, *то при полуположительных ценах* p *будут выполнены и условия*

$$w^l_j(p) < 0 \Rightarrow \chi^l_j\left(w^l(p)\right) = 0,\, j\in I_l, l\in L, \tag{15}$$

$$p\eta(p) > 0. \tag{16}$$

Из (12), (13) следует равенство

$$p\eta(p) = \sum_{l\in L} w^l(p)\chi^l\left(w^l(p)\right), \tag{17}$$

а по лемме 1 для величин $w^l_j(p), j\in I_l, l\in L$, определенных в (13) при любом полуположительном p, должно выполняться условие

$$\max_{l\in L}\max_{j\in I_l}\left\{w^l_j(p)\right\} > 0. \tag{18}$$

Полагая $\tilde{x}_j^l(p)=\begin{cases}\tilde{x}_j^l, если\, w_j^l(p)>0,\\ 0, если\, w_j^l(p)\le 0,\, j\in I_l, l\in L,\end{cases}$ из (18) и (4) получаем неравенство $\sum_{l\in L} w^l(p)\chi^l(w^l(p))\ge \sum_{l\in L} w^l(p)\tilde{x}^l(p)>0$, в силу которого (16) следует из (17). Если же для каких-то пар l, j не выполняются условия (15), то полагая $\tilde{\chi}_j^l(p)=\begin{cases}\chi_j^l(w^l(p)), если\, w_j^l(p)\ge 0,\\ 0, если\, w_j^l(p)<0,\, j\in I_l, l\in L,\end{cases}$ получаем для допустимого в (14) набора векторов $\tilde{\chi}^l(p), l\in L$ неравенство $\sum_{l\in L} w^l(p)\tilde{\chi}^l(p)>\sum_{l\in L} w^l(p)\chi^l(w^l(p))$.

При агрегировании равенств (13) в ценах $p, \overline{p}$ возникают соотношения

$$\omega_j(p)=\sum_{l\in L_j^+} w_j^l(p)\chi_j^l(w^l(\overline{p}))=p_j\sum_{l\in L_j^+}\chi_j^l(w^l(\overline{p}))-\sum_{i\in I}p_i\sum_{l\in L_j^+}a_{ij}^l\chi_j^l(w^l(\overline{p})), j\in I$$

позволяющие определить валовые объемы $\hat{x}_j(\overline{p}), j\in I$ выпуска продукции, построить матрицу соответствующих им коэффициентов прямых затрат $\hat{A}(\overline{p})=\|\hat{a}_{ij}(\overline{p})\|, i, j\in I$ и нормативы $\hat{w}_j(p,\overline{p}), j\in I$ для формирования добавленной стоимости по видам продукции, полагая

$$\hat{x}_j(\overline{p})=\sum_{l\in L_j^+}\chi_j^l(w^l(\overline{p})), \hat{a}_{ij}(\overline{p})=\frac{\sum_{l\in L_j^+}a_{ij}^l\chi_j^l(w^l(\overline{p}))}{\hat{x}_j(\overline{p})},$$
$$\hat{w}_j(p,\overline{p})=\frac{\omega_j(p)}{\hat{x}_j(\overline{p})}, i, j\in I. \tag{19}$$

Лемма 2. Если векторы цен $p, \overline{p}$ отличаются только нормировкой, т.е.

$$\overline{p}=\lambda p, \lambda\in(0,+\infty), \tag{20}$$

то все определенные в (19) величины окажутся в зависимости только от цен p, а равенство (13) принимает стандартную форму

$$p_j-\sum_{i\in I}p_i\hat{a}_{ij}(p)=\hat{w}_j(p), j\in I \tag{21}$$

с полуположительным вектором $\hat{w}(p)$ в его правой части.

Из (13) $w_j^l(\overline{p})=\lambda w_j^l(p)$, а из (14) $\chi^l(\lambda w^l(p))=\chi^l(w^l(p))$ и, таким образом, в силу (15)-(17), вектор $\hat{w}(p)$ должен быть полуположительным.

Следствие 2. Если условия теоремы 2 выполнены при ценах равновесия p^0, то векторы $\eta(p^0), \xi(p^0)$ полуположительны и выполняется неравенство

$$p^0\xi(p^0)>0. \tag{22}$$

Кроме того, если матрица $\hat{A}(p^0)$ неприводима, то вектор $p^0>0$.

Если $p=p^0$, то векторы $\eta(p^0), \xi(p^0)$ полуположительны в силу (7),(8), а неравенство (22) следует из (8) и (16). Пусть $p^0=\lfloor p^{01}, p^{02}\rfloor$ и $p^{01}>0$, а $p^{02}=0$. Тогда из (21) получим $p^{01}(E_1-\hat{A}_{11}(p^0))=\hat{w}^{01}(p^0); \hat{w}^{02}(p^0)+p^{01}\hat{A}_{12}(p^0)=0$, откуда $\hat{w}^{02}(p^0), \hat{A}_{12}(p^0)=0$ и, таким образом, матрица $\hat{A}(p^0)$ приводима.

Полученные выше результаты означают, что для устойчивого роста экономики необходимо, чтобы сводная матрица народно-хозяйственного баланса $\hat{A}\left(p^{0}\right)$ была не только полуположительной, но и продуктивной, и неприводимой. Нарушение этих условий в начале 90-х гг. привело к гиперинфляции цен и повсеместной замене экономических отношений между предприятиями бартерными сделками.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Медницкий В.Г., Медницкий Ю.В., Леонов В.Ю.* Использование методов декомпозиции для оптимизации // Известия РАН. ТиСУ. – 2009. – № 5.
2. *Гейл Д.* Теория линейных экономических моделей. – М.: Изд-во Иностр. лит., 1963.
3. *Волошин Н.И.* Система матричных моделей внутризаводского планирования // Применение математики в экономических исследованиях. – Т. 3. – М.: Мысль, 1965.
4. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. – М.: Мир, 1973.
5. *Самуэльсон П.* Экономика. – М.: Прогресс. 1964.
6. *Карлин С.* Математические методы в теории игр, программировании и экономике. – М.: Мир, 1963.

Статью рекомендовал к опубликованию д.ф.-м.н. В.И. Цурков.

Леонов Владислав Юрьевич – Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Вычислительный центр им. А.А. Дородницына Российской академии наук; e-mail: tsur@ccas.ru; 119333, г. Москва, ул. Вавилова, д. 40; тел.: +74959303416; отдел сложных систем; н.с.; к.ф.-м.н.

Медницкий Владимир Георгиевич – Центральный экономико-математический институт (ЦЭМИ) РАН; e-mail: vgm@ranger.ru; 117418, г. Москва, Нахимовский проспект, д. 47; phone: +74953313943; г.н.с.; д.э.н.; профессор.

Leonov Vladislav Yur'evich – Federal State budgetary institution Science Computing Center A.A. Dorodnitsyn Russian Academy of Sciences; e-mail: tsur@ccas.ru; 40, Vavilova street, Moscow, 119333, Russia; phone: +74959303416; department of complex systems; cand. of phis.-math. sc.; researcher.

Mednitskii Vladimir Georgievich – Federal State budgetary institution Science Central Economics and Mathematics Institute (CEMI RAS); e-mail: vgm@ranger.ru; 47, Nakhimovsky prospect, Moscow, 117418, Russia; phone: +74953313943; dr. of ec. sc.; professor; chief researcher.

УДК 316.31.4

Г.А. Угольницкий, В.К. Дьяченко, А.А. Сивогривов

ДИНАМИКА СОЦИАЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ

Представлена модель борьбы с экстремизмом в республике Дагестан. Выделено четыре группы экстремисткой системы: протестное население, пособники, боевики и лидеры. Были учтены различные факторы протестности и факторы борьбы с экстремизмом, которые влияют на переход из одной группы в другую и на уход за пределы экстремисткой системы соответственно. В результате рассматривается задача оптимального управления, которая имеет смысл минимизации численности экстремисткой системы с учетом относительной важности составляющих ее частей при ограничениях, обусловленных «волей» государства к борьбе с экстремизмом и объективной динамикой численности групп экстремистов, определяемой факторами протестным потенциалом общества. Начальные данные были заданы с помощью оценки эксперта. Проведено имитационное моделирование. Получены предварительные результаты исследования.

Экстремизм; социальная динамика.