УДК 681.5

Го Пэн

СИНТЕЗ РЕГУЛЯТОРОВ ПО ВЫХОДУ И ВОЗДЕЙСТВИЯМ ПО ЗАДАННОМУ ПОРЯДКУ АСТАТИЗМА

Предлагается метод аналитического синтеза регуляторов с управлением по выходу и воздействиям, которые обеспечивают порядки астатизма системы управления по отношению к задающему воздействию и внешним возмущениям не хуже заданных. При этом также обеспечиваются заданные показатели качества: время регулирования и перерегулирование по задающему воздействию, а также физическая реализуемость регулятора с заранее заданным относительным порядком. Предложенный метод исключает известную противоречивость свойств астатизма и устойчивости замкнутых систем управления.

Объект; регулятор; управление по выходу; управление по воздействием; порядок астатизма.

Guo Peng

DESIGN OF REGULATORS WITH OUTPUT AND DISTURBANSIS ON GIVEN ORDER OF ASTATISM

In this paper we propose a method of analytical design of controllers with output and disturbances control, which provide astatic order system with respect to the set point and external perturbations are not worse given. It also provided the specified quality performance: control time, the overshoot, and the physical realizability of the controller with relative to order. The proposed method eliminates the inconsistency of certain properties and stability of the closed astatic control systems.

Pplant; controller; control on output; control on disturbances; astatic order.

Введение. Качество автоматических систем обычно оценивается следующими показателями: порядки астатизма по задающему и возмущающим воздействиям, перерегулированием и длительностью переходного процесса. Требуется также малая колебательность. Как обычно, порядок астатизма определяется числом "интеграторов" в контуре управления. Для того чтобы система имела нулевую установившуюся ошибку, вызванную некоторым воздействием, необходимо, чтобы порядок астатизма системы по этому воздействию превышал степень входного воздействия, по крайней мере на единицу [1, 4].

Системы с заданным порядком астатизма широко применяются на практике. Это делает задачу, рассматриваемую в данной статье, актуальной. Как известно, основная трудность обеспечения высоких порядков астатизма при использовании регуляторов по отклонению связана с обеспечением устойчивости [4].

В данной работе для обеспечения высоких порядков астатизма предлагается применять регуляторы по выходу и воздействиям [3]. Это позволяет исключить противоречие методу точностью и устойчивостью астатических систем управления.

Постановка задачи. Предположим, в процессе синтеза регулятора по выходу и воздействием (РВВ) получено уравнение заданного объекта управления

$$A(p)y(p) = B(p)u(p) + B_2(p)f_{\text{ни}}(p). \tag{1}$$

Для обеспечения с помощью РВВ заданных порядков астатизма к возмущениям они могут не измеряться. Поэтому будем считать, что к объекту приложено только неизмеряемое возмущение $f_{\text{ни}}(t)$. По уравнению (1) легко определяются порядок и полнота объекта управления, а также степени, коэффициенты и корни всех его многочленов [1, 3].

Задача синтеза в данном случае заключается в определении степеней и коэффициентов всех многочленов уравнения РВВ:

$$R(p)u(p) = Q_0(p)g(p) - L(p)y(p) \tag{2}$$

так, чтобы замкнутая система (1), (2) имела порядки астатизма υ_g к задающему воздействию $g(t)$ и υ_f к возмущению $f_{\text{ни}}(t)$ не меньше заданных υ_g^* и υ_f^* соответственно. Кроме того, должна обеспечиваться устойчивость, а длительность переходного процесса $t_{\text{пп}}$ и перерегулирование $\sigma\,\%$ должны быть не больше заданных, т.е. должны выполняться условия,

$$\upsilon_g \ge \upsilon_g^*,\ \ \upsilon_f \ge \upsilon_f^*,\ t_{\text{пп}} \le t_{\text{пп}}^*,\ \ \sigma \le \sigma^*\%,$$

где υ_g^*, υ_f^*, $t_{\text{пп}}^*$, $\sigma^*\,\%$ – заданные значения показателей качества.

Решение. Переходя к изложению предлагаемого метода синтеза РВВ, предположим, что многочлен $B(p)$ из уравнения (1) удовлетворяет условию

$$B(p) = \beta_m B_\Omega(p), \tag{3}$$

т.е. все корни многочлена $B(p)$ лежат в области Ω – области допустимого расположения полюсов неполной части замкнутой системы. При этом объект управления является полным, и выполняется условие разрешимости задачи синтеза, т.е. $\text{НОД}\{A(p), B(p)\} = const$, $\text{НОД}\{p, B(p)\} = const$.

Как известно [1, 4], для обеспечения заданных порядков астатизма υ_g^* и υ_f^* по отношению к задающему $g(t)$ и возмущающему воздействиям $f_{\text{ни}}(t)$ необходимо, чтобы многочлены $D(p)$, $D_0(p)$ и $D_2(p)$ из уравнения «вход-выход» замкнутой системы

$$D(p)y(p) = D_0(p)g(p) - D_2(p)f(p), \tag{4}$$

удовлетворяли следующим условиям:

$$D(p) - D_0(p) = p^{\upsilon_g}\tilde{D}_0(p), \tag{5}$$

$$D_2(p) = p^{\upsilon_f}\tilde{D}_2(p), \tag{6}$$

где $\tilde{D}_0(p)$, $\tilde{D}_2(p)$ – произвольные многочлены.

Из выражений (1), (2), (4) и (5) следует, что многочлен $R(p)$ из уравнения РВВ (2) и многочлен $\bar{L}(p) = L(p) - Q_0(p)$ должны иметь вид

$$R(p) = p^{\upsilon}B_\Omega(p)\hat{R},\ \ \bar{L}(p) = p^{\upsilon_g}A_\Omega(p)\tilde{L}(p), \tag{7}$$

где число υ – определяется выражением

$$\upsilon = \max\{0, \upsilon_g^* - n_A, \upsilon_f^* - n_{B2}\}. \tag{8}$$

Здесь n_A – число нулевых корней многочлена $A(p)$, а n_{B2} – число нулевых корней многочлена $B_2(p)$ из уравнения заданного объекта (1).

Фактически выражение (7) определяет число интеграторов, которые необходимо ввести в РВВ, для обеспечения заданных порядков астатизма υ_g^* и υ_f^* по отношению к задающему $g(t)$ и возмущающему воздействиям $f_{\text{ни}}(t)$. При этом многочлен $D(p) = D_\Omega(p)\hat{D}(p)$, где многочлен $D_\Omega = M(p)A_\Omega(p)B_\Omega(p)$.

Для определения многочлена $\hat{D}(p)$ из таблиц стандартных нормированных передаточных функций по степени $n_{\text{т}} = \hat{d}$ с учетом заданных значений порядка астатизма υ_g^* и перерегулирования $\sigma^*\%$, выписываются коэффициенты Δ_i, а также значение $t_{\text{пп,таб}}$. Затем по формуле $\omega_0 = t_{\text{пп,таб}} / t_{\text{пп}}^*$ находятся значение ω_0 и коэффициенты δ_i^* полинома $\hat{D}(p)$:

$$\delta_i^* = \Delta_i \omega_0^{\hat{d}-i}, \quad i = \hat{d},\ \hat{d}-1,\ \ldots,\ 2,\ 1,\ 0. \tag{9}$$

Согласно (7) многочлен $L(p)$ из уравнения РВВ (2) имеет вид $L(p) = A_\Omega(p)\hat{L}(p)$. При этом многочлены $\hat{R}(p)$ и $\hat{L}(p)$ определяются решением системы алгебраических уравнений типа

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \beta_0 & 0 & & 0 \\ \beta_1 & \beta_0 & & 0 \\ \vdots & \beta_1 & \ddots & \beta_0 \\ \beta_m & \vdots & \ddots & \beta_1 \\ \vdots & \beta_m & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \beta_m \end{bmatrix}}_{n\ \text{столбцов}} \!\!\left|\!\! \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_0 & 0 & & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_0 & & 0 \\ \vdots & \alpha_1 & \ddots & \alpha_0 \\ \alpha_n & \vdots & \ddots & \alpha_1 \\ \vdots & \alpha_n & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \alpha_n \end{bmatrix}}_{r+1\ \text{столбец}} \right. \begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \vdots \\ \lambda_{n-1} \\ \rho_0 \\ \vdots \\ \rho_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_0 \\ \delta_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \delta_{r+n} \end{bmatrix}. \tag{10}$$

При этом, если

$$\hat{L}(p) = p^{\upsilon_g^*} L_1(p) + L_2(p), \tag{11}$$

то, полагая во втором выражении (7) многочлен $\tilde{L}(p) = L_1(p)$, найдем, что многочлен $Q_0(p)$ определяется выражением

$$Q_0(p) = A_\Omega(p) L_2(p). \tag{12}$$

Подставляя в уравнение (2) полученные выражения (7), (11) и (12), придем к уравнению РВВ либо вида

$$p^\upsilon B_\Omega(p)\hat{R}(p)u(p) = A_\Omega(p)L_2(p)\varepsilon(p) - p^{\upsilon_g^*} A_\Omega(p)L_1(p)y(p), \tag{13}$$

либо вида

$$p^\upsilon B_\Omega(p)\hat{R}(p)u(p) = L(p)\varepsilon(p) - p^{\upsilon_g^*} A_\Omega(p)L_1(p)g(p). \tag{14}$$

При этом уравнение (13) используется в том случае, когда измеряются отклонение $\varepsilon(t) = g(t) - y(t)$ и управляющая переменная $y(t)$, а уравнение (14) – в том случае, когда измеряются отклонение $\varepsilon(t)$ и задающее воздействие $g(t)$.

Покажем эффективность предлагаемого метода синтеза РВВ на численном примере.

Пример. Для объекта, который описывается уравнением

$$(p^3 + 1{,}1p^2 + 0{,}1p)y(p) = 3{,}5u(p) - (0{,}2p + 0{,}1)f_{\text{ни}}(p), \tag{15}$$

синтезировать РВВ с $\mu_{\text{РВВ}} = 0$, обеспечивающий третий порядок астатизма к задающему воздействию и второй порядок астатизма к возмущению. Длительность переходного процесса не более 5 с, а перерегулирование не более 22 %. Измеряются отклонение $\varepsilon(t)$ и управляемая переменная $y(t)$.

В данном случае

$$W_{yu}(p)=\frac{3,5}{p^3+1,1p^2+0,1p},\ W_{yf}(p)=\frac{-0,2p-0,1}{p^3+1,1p^2+0,1p},$$

т.е.

$$A(p)=p^3+1,1p^2+0,1p,\ A_\Omega(p)=p+1,\ A_{\bar\Omega}(p)=p^2+0,1p, \tag{16}$$

$$B(p)=\beta_m^{-1}=3,5,\ B_\Omega(p)=B_{\bar\Omega}(p)=1,\ H(p)=-0,2p-0,1. \tag{17}$$

Степени этих многочленов $n=\deg A(p)=3$, $m=\deg B(p)=0$.

Согласно (7) $\upsilon=\max\{0,3-1,2-0\}=2$, т.е. $\Phi(p)=p^2$, а $\beta_\Omega(p)=\beta_{\bar\Omega}(p)=1$, поэтому $D(p)=B_\Omega(p)\tilde D(p)=\tilde D(p)$, а $R(p)=p^2\hat R(p)$. Храктеристический многочлен системы определяется уравнением

$$D(p)=p^\nu A_{\bar\Omega}(p)\hat R(p)+\beta\hat L(p), \tag{18}$$

где $\hat R(p)$ и $\hat L(p)$ – неизвестные многочлены. Подставляя (16), (17) в (18), получим

$$D(p)=(p^2+0,1p)p^2\hat R(p)+3,5\hat L(p). \tag{19}$$

Если $\deg R(p)=r$, то $\deg\hat L(p)=r-1$, $\deg\hat R(p)=r-2$. В системе (10), эквивалентной уравнению (19), содержится $N_k=r+r=2r-1$ неизвестных коэффициентов и $N_y=3+r-1+1=3+r$ уравнений. Для разрешимости указанной системы необходимо $N_k=N_y$, т.е. $2r-1=r+3$. Отсюда $r=4$ и по приведённым выше формулам находим:

$\deg\hat R(p)=r-2=2$, $\deg\hat L(p)=r-1=4-1=3$, $\deg D(p)=3+4-1=6$.

При этом многочлены равны

$$\tilde D(p)=\delta_6p^6+\delta_5p^5+\delta_4p^4+\delta_3p^3+\delta_2p^2+\delta_1p+\delta_0,\ \hat R(p)=\rho_2p^2+\rho_1p+\rho_0,$$

$$\hat L(p)=\lambda_3p^3+\lambda_2p^2+\lambda_1p+\lambda_0.$$

В данном случае необходимы коэффициенты передаточной функции, соответствующей системе шестого порядка (так как $\deg D(p)=6$) с астатизмом третьего порядка и с перерегулированием не более 22 %. Этим данным удовлетворяет передаточная функция со стандартными коэффициентами: $\Delta_0=1$, $\Delta_1=36$, $\Delta_2=251$, $\Delta_3=485$, $\Delta_4=251$, $\Delta_5=26$, $\Delta_6=1$ и $t_{\text{пп,таб}}=19$.

Для обеспечения требуемого времени регулирования вычисляется значение временного масштабного коэффициента $\omega_0=t_{\text{пп,таб}}/t_p^*=19/5\approx4$. Желаемые коэффициенты многочлена $D(p)$ определяются по формуле $\delta_i=\Delta_i\omega_0^{n-i}$ при $n=6$. Подстановка численных значений даёт: $\delta_0=4096$, $\delta_1=36864$, $\delta_2=64256$, $\delta_3=31040$, $\delta_4=4016$, $\delta_5=104$, $\delta_6=1$.

Теперь можно записать систему, соответствующую уравнению (19). Она имеет вид

$$\begin{bmatrix} 3{,}5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3{,}5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3{,}5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3{,}5 & 0{,}1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0{,}1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0{,}1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \rho_0 \\ \rho_1 \\ \rho_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4096 \\ 36864 \\ 64256 \\ 31040 \\ 4016 \\ 104 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Решение этой системы позволяет записать многочлены:

$\hat{R}(p) = p^2 + 104p + 4006$, $\hat{L}(p) = 8754p^3 + 18359p^2 + 10533p + 1170$.

Представляя многочлен $\hat{L}(p)$ в соответствии с выражением (11), найдем, что многочлен $L_1 = 8754$, а многочлен $L_2 = 18359p^2 + 10533p + 1170$. Поэтому согласно (12) в данном случае многочлен $Q_0(p)$ определяется выражением

$$Q_0(p) = (p+1)(18359p^2 + 10533p + 1170).$$

Таким образом, все многочлены уравнения РВВ (2) определены, что позволяет записать уравнение РВВ. В результате получим

$$p^2(p^2 + 104p + 4006)u = (p+1)[(18359p^2 + 10533p + 1170)\varepsilon - 8754p^3 y]. \quad (20)$$

Для записи уравнений РВВ в переменных состояния, которые необходимы для реальзации регулятора, в уравнение (20) введем передаточные функции и выделим целую часть в $W_{uy}(p)$. Это дает уравнение

$$u(p) = \frac{(p+1)(18359p^2 + 10533p + 1170)}{p^4 + 104p^3 + 4006p^2}\varepsilon(p) -$$
$$-\left[8754 - \frac{8754*103p^3 + 8754*4006p^2}{p^4 + 104p^3 + 4006p^2}\right]y(p).$$

Этому уравнению «вход-выход» соответствует следующая система уравнений в переменных состояния:

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4006 \\ 0 & 0 & 1 & -104 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 1170 \\ 11703 \\ 28892 \\ 18359 \end{bmatrix} \varepsilon - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 8754*4006 \\ 8754*103 \end{bmatrix} y. \quad (21)$$

Для проверки качества синтезированного РВВ (21) найдем передаточные функции замкнутой системы управления (1), (21):

$$W_{yg}(p) = \frac{34454p^2 + 34192p + 4095}{p^6 + 103{,}1p^5 + 3913{,}3p^4 + 93970{,}3p^3 + 34454p^2 + 34192p + 4095}, \quad (22)$$

$$W_{yf}(p) = \frac{-0{,}2p^5 - 20{,}9p^4 - 811{,}6p^3 - 400{,}6p^2}{(p^6 + 103{,}1p^5 + 3913{,}3p^4 + 93970{,}3p^3 + 34454p^2 + 34192p + 4095)(p+1)}. \quad (23)$$

По передаточной функции $W_{yg}(p)$ построена переходная функция системы (14), (21) по задающему воздействию, которая свидетельствует ее устойчивости.

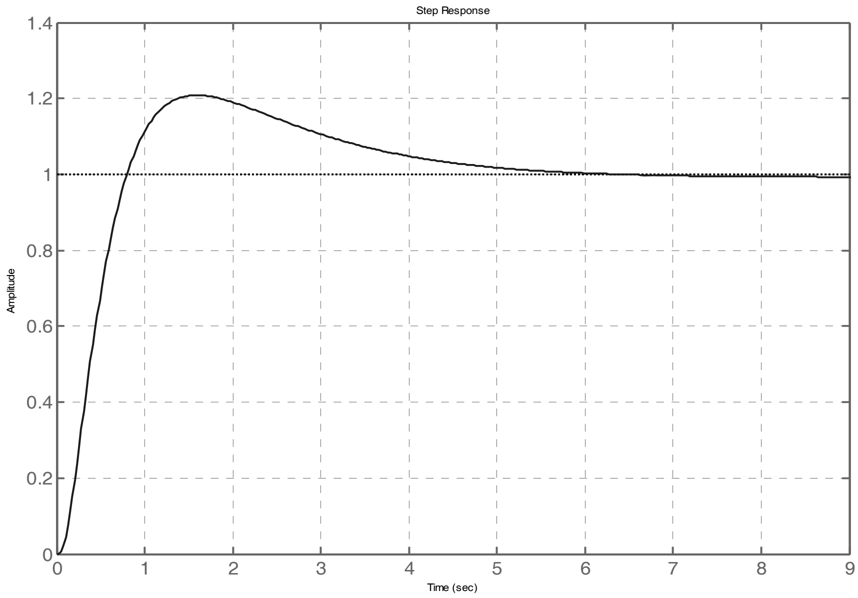

Рис. 1. Переходная функция

Как видно, время регулирования и перерегулирование соответствуют требуемым значениям, а в соответствии с передаточными функциями (20) и (21) найденный регулятор обеспечивает заданные порядки астатизма.

Заключение. Предложенный в работе метод позволяет обеспечить порядки астатизма к задающему и возмущающим воздействиям, а также показатели качества системы управления в переходном режим не хуже заданных. При этом обеспечивается физическая реализуемость регулятора с заранее заданным относительным порядком.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Гайдук А.Р.* Теория автоматического управления: Учебник. – М.: Высшая школа, 2010.
2. *Гайдук А.Р. Плаксиенко Е.А.* Синтез динамических систем по требуемым показателям качества // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2008. – № 4. – С. 7-12.
3. *Го Пэн.* Метод синтеза систем с регулятором по выходу и воздействиям // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2012. – № 2 (127). – С. 13-18.
4. *Ким Д.П.* Теория автоматического управления. Т. 1. Линейные системы. – М: Физматлит, 2007.
5. *Нейдорф Р.А.*, *Соловей Н.С.* Инженерные методы синтеза автоматических систем управления: Учебное пособие. УГТУ. – Ростов-на-Дону: Изд-во РГАСХМ, 2004.

Статью рекомендовал к опубликованию д.т.н., профессор В.И. Лачин.

Го Пэн – Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Южный федеральный университет»; e-mail: peng_guo@mail.ru; 347904, г. Таганрог, ул. Петровская, 17, кв. 308-3; тел.: 89514969807; кафедра систем автоматического управления; стажер.

Guo Peng – Federal State-Owned Autonomy Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”; e-mail: peng_guo@mail.ru; 17, Petrovskaya street, app. 308-3, Taganrog, 347904, Russia; phone: +79514969807; the department of automatic control systems; probationer.