

УДК 519.86

Ф.Б. Тебуева, В.А. Перепелица, М.Ю. Кабиняков

**ДЕКОМПОЗИЦИЯ И ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ
С ДОЛГОВРЕМЕННЫМИ КОРРЕЛЯЦИЯМИ**

Предлагается методика декомпозиции временных рядов с долговременными корреляциями. Особенностью временных рядов этого класса является неподчинение нормальному закону, отсутствие видимого тренда и невыполнение условия независимости значений ряда. Для получения трендовой компоненты используется модифицированный алгоритм Херста, позволяющий выделять во временном ряде трендовые отрезки. Прогнозирование осуществляется на базе клеточно-автоматной модели, в которой конфигурация с памятью для прогноза определяется глубиной памяти ряда.

Декомпозиция временных рядов; регулярная компонента; трендоустойчивость; долговременные корреляции; прогнозирование.

F.B. Tebueva, V.A. Perepelitsa, M.Yu. Kabinyakov

**DECOMPOSITION AND FORECASTING OF TIMES SERIES WITH
LONG-TERM CORRELATIONS**

In article the technique of decomposition of time series with long-term correlations is offered. Feature of time series of this class is non-obedience to the normal law, lack of a visible trend and non-performance of a condition of independence of values of a row. For receiving trend components Hurst's modified algorithm, allowing to allocate trend pieces in a temporary row is used. Forecasting is carried out on the basis of cellular and automatic model in which the configuration for the forecast decides on memory by depth of memory of series.

Decomposition of temporary ranks; regular component; stability of a trend; long-term correlations; forecasting.

Предметом исследования в настоящей статье является регулярная компонента [1] временных рядов эволюционных дискретных процессов с долговременными корреляциями [2]. Современное прогнозирование предполагает научно обоснованное суждение о возможных состояниях некоторой системы в будущем, об альтернативных путях и сроках его осуществления, оно предпочитает получение количественных оценок этих состояний при помощи математических и инструментальных средств реализации.

Все известные методы прогнозирования временных рядов можно разбить на 5 групп [3]:

1. Методы, основанные на построении многофакторных корреляционно-регрессионных моделей.
2. Методы авторегрессии, учитывающие взаимосвязь членов временного ряда.
3. Методы, основанные на разложении временного ряда на компоненты: тренд, сезонные колебания, циклическая компонента и случайная составляющая.
4. Методы, позволяющие учесть неравнозначность исходных данных.
5. Методы прямой интерполяции, использующие разные трендовые модели.

К настоящему времени наибольшее распространение и применение в реальных расчетах получили методы третьей группы из вышеперечисленных. Чаще всего в реальном моделировании временных рядов основное внимание уделяется анализу трендов и сезонности. При этом построение прогнозной модели рассматри-

ваемого временного ряда реализуется через преобразование его в базовую модель временного ряда. Точно так же каждый элемент, т.е. каждое число в этой базовой модели временного ряда получается путем сложения или перемножения четырех компонент:

«Данные = тренд×сезонность×циклическость×регулярность».

Эти четыре базовые компоненты временного ряда (тренд, сезонность, циклическая и случайная компоненты) можно оценивать различными способами.

В общем случае при декомпозиции каждый член временного ряда $Y = \langle y_i \rangle$, $i = \overline{1, n}$ может быть представлен в аддитивной форме

$$y_i = u_i + v_i + e_i + z_i, \quad (1)$$

или мультипликативной форме

$$y_i = u_i \cdot v_i \cdot e_i \cdot z_i. \quad (2)$$

В настоящей работе предлагается новый метод декомпозиции, предназначенный для персистентных [2] временных рядов. Известно, что персистентным рядом называется временной ряд, который склонен следовать трендам или является трендоустойчивым. Трендоустойчивость [2] представляет собой характеристику, обратную Марковским зависимостям, которые быстро распадаются, обращаясь в шум. Если временной ряд обладает памятью, то он обладает трендами и циклами, вообще говоря, различной длины.

Каждый отдельный цикл (квазицикл) состоит из двух частей, из которых одна обладает убывающим трендом, а вторая – возрастающим трендом. Таким образом, на отдельных своих отрезках временного ряда имеет соответствующий тренд, т.е. его поведение подчиняется этому тренду. Эта тенденция сохраняется тем дольше, чем большую длину имеет указанный отрезок. В этом случае принято говорить соответственно о меньшей или большей трендоустойчивости.

Чем меньшую длину имеет большинство квазициклов рассматриваемого временного ряда, тем в меньшей степени присуща трендоустойчивость этому временному ряду. В предельном случае, когда квазициклы имеют длину 3, можно говорить об отсутствии трендоустойчивости. Персистентный временной ряд имеет долговременную память, поэтому в нем имеют место долговременные корреляции между текущими событиями.

Долговременные корреляции или долговременная память означает, что значение какого-либо его уровня зависит от значений предшествующих уровней. Это свойство означает, что для уровней временного ряда не выполняется условие их независимости. Особого внимания заслуживает тот факт, что классические методы прогнозирования временных рядов существенным образом базируются на предположении, что выполняется условие независимости уровней рассматриваемого временного ряда. Методика декомпозиции состоит из 5 этапов.

Этап 1. Выделение трендовой компоненты путем разбиения временного ряда на трендовые участки, построения на каждом из них линейного тренда и объединения полученных трендов.

Этап 2. Вычленение из временного ряда трендовой компоненты, получение циклической и случайной компонент.

Этап 3. Получение циклической компоненты путем сглаживания временного ряда, полученного на этапе 2, скользящей средней с периодом, равным средней длине трендовых участков.

Этап 4. Вычленение из временного ряда этапа 2 временного ряда этапа 3, получение нерегулярной компоненты.

Этап 5. Получение регулярной компоненты путем сложения трендовой и циклической компонент.

На этапе 1 для разбиения временного ряда на трендовые участки предлагается использовать инструментарий фрактального анализа. Фрактальный анализ временного ряда осуществляется в основном на базе алгоритма последовательного *R/S*-анализа [4]. С помощью этого алгоритма находятся количественные или качественные оценки таких фрактальных характеристик, как наличие или отсутствие памяти в рассматриваемом временном ряде, персистентность или антиперсистентность (реверсирование или частый возврат к среднему), трендоустойчивость или ее отсутствие, глубина памяти, значение показателя Херста, характеристики циклической компоненты (если таковая имеется и др.). Алгоритм последовательного *R/S*-анализа применяется к последовательности таких отрезков исходного временного ряда, каждый из которых получается путем удаления начального уровня предшествующего отрезка временного ряда. Далее для каждого отрезка строятся так называемые *H*-траектория и *R/S*-траектория, которые представляют собой информацию в виде числовых оценок вышеперечисленных фрактальных характеристик, относящихся к началу (т.е. к определенной начальной последовательности уровней) очередного анализируемого отрезка временного ряда.

На этапе 2 происходит вычленение из временного ряда трендовой компоненты путем векторного вычитания для аддитивной модели

$$V + E = X - U = \langle y_i - u_i \rangle, i = \overline{1, n} \quad (3)$$

и векторного деления для мультипликативной модели

$$V \cdot E = X / U = \langle y_i / u_i \rangle, i = \overline{1, n}. \quad (4)$$

Выражения (3) и (4) представляют собой обобщение циклической и случайной компонент для аддитивной и мультипликативной моделей соответственно.

На этапе 3 из (2) или (3) вычленяется циклическая компонента $V = \langle v_i \rangle$ путем сглаживания временного ряда скользящего среднего. Метод скользящего среднего является наиболее распространенным инструментом математической статистики. Этот метод применяется для характеристики тенденции развития исследуемой статистической совокупности и основан на расчете средних уровней ряда за определенный период.

На этапе 4 для выделения случайной (нерегулярной) компоненты $E = \langle e_i \rangle$, как и ранее, необходимо: для аддитивной модели из (3) вычесть полученную на этапе 3 циклическую компоненту $V = \langle v_i \rangle$, для мультипликативной модели (4) разделить на компоненту $V = \langle v_i \rangle$.

На этапе 5 происходит формирование регулярной компоненты, включающей в себя трендовую и циклическую. Для этого следует выполнить векторное сложение $R = U + V = \langle u_i + v_i \rangle$ для аддитивной модели и векторное умножение $R = U \cdot V = \langle u_i \cdot v_i \rangle$. Таким образом, из временного ряда Y выделены регулярная компонента R и нерегулярная компонента E .

Алгоритм прогнозирования на базе линейных клеточных автоматов [5] состоит из следующих четырех этапов.

Этап 1. Преобразование числового временного ряда в лингвистический временной ряд с целью обеспечить возможность применить квазигенетический алгоритм, работающий с комбинаторными конфигурациями, представляющими собой структуру лингвистического временного ряда и его терм-множество W .

Этап 2. Построение определяемой данным лингвистическим временным рядом генетической памяти клеточного автомата состоит из подэтапов:

- ◆ формирование множества M всех l -конфигураций, содержащих в полученном лингвистическом временном ряде, $l = 1, 2, \dots, L$, где L – глубина памяти;
- ◆ вычисление частот и частотей переходов l -конфигураций из M в состояния-термы из W .

Этап 3. Формирование прогноза для рассматриваемых числового и лингвистического временных рядов путем реализации «мягких вычислений» на базе построенной памяти клеточного автомата:

- ◆ получение прогноза в виде лингвистического нечеткого множества;
- ◆ преобразование лингвистического нечеткого множества в числовое, которое при необходимости с помощью процедуры дефазификации можно перевести в четкий числовой прогноз.

Этап 4. Валидация, т.е. получение оценок погрешности для полученного прогноза для данных числового и лингвистического временных рядов.

Применим этапы предлагаемой прогнозной модели к временному ряду некоторого ежегодного экономического показателя в период с 1955 г. по 2011 г. Обозначим этот временной ряд через

$$Z = \langle z_i \rangle, i = 1, 2, \dots, n. \quad (5)$$

Иллюстрация временного ряда Z приведена на рис. 1. Преобразование числового временного ряда в лингвистический временной ряд означает замену числовых элементов $z_i, i = 1, 2, \dots, t$ лингвистическими переменными, называемыми термами. Совокупность этих термов принято называть терм-множеством, которое обозначаем $\bar{U} = \{u\}$. Возьмем, к примеру, терм-множество \bar{U} , состоящее из трех элементов: $u = H$ – низкий уровень, $u = C$ – средний уровень, $u = B$ – высокий уровень. Заменяя элементы z временного ряда Z соответствующими термами из \bar{U} , получаем лингвистический временной ряд

$$U = \langle u_i \rangle, i = 1, 2, \dots, n. \quad (6)$$

Рассмотрим подробнее этап преобразования числового временного ряда в лингвистический временной ряд, который начинается с визуализации столбчатой диаграммы временного ряда Z (см. рис. 1). На этой диаграмме выделяем жирными точками столбики, представляющие явно большой (малый) уровень инвестирования. Далее, соединяя соседние жирные точки пунктирными отрезками, получаем верхнюю огибающую ломанную (ВОЛ) и нижнюю огибающую ломанную (НОЛ).

Далее последовательно для каждого столбика диаграммы рассматриваем отрезок, соединяющий точку его пересечения с НОЛ точкой его пересечения с ВОЛ. Этот отрезок делим на три равновеликих интервала: нижний, средний и верхний. Отмечаем на каждом из таких отрезков концы среднего интервала, после чего каждую пару соседних верхних (нижних) концов средних интервалов соединяем пунктирным отрезком, в результате чего получаем границы срединной области гистограммы (СОГ).

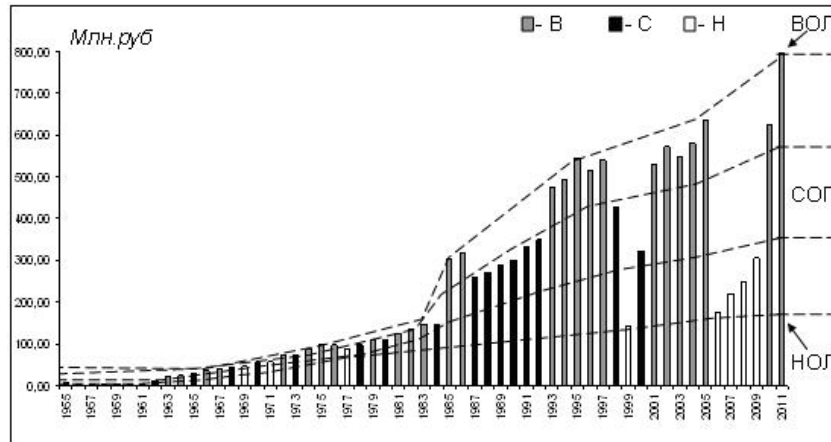


Рис. 1. Столбчатая диаграмма временного ряда Z

Числовой временной ряд преобразуем в лингвистический вида (6), осуществляя окрашивание каждого столбика гистограммы, как показано на рис. 1. Рассматривая i -й столбик этой диаграммы, элемент z_i заменяем термом H , если верх столбика находится ниже СОГ, иначе заменяем z_i термом C , если его верх принадлежит СОГ и, наконец, заменяем термом B , если верх этого столбика находится выше СОГ. Преобразование временного ряда заканчивается тогда, когда последний элемент z_i заменяется соответствующим термом.

Временные ряды Z и U обладают долговременной памятью. Последнее означает, что такие ряды аккумулируют предыдущую информацию об объемах инвестирования и степень его влияния на последующий объем инвестирования. Наличие долговременной памяти у временного ряда Z подтверждается результатами фрактального анализа. Основная числовая характеристика этого результата заключается в том, что полученные значения показателя Херста H колеблются для временного ряда Z в пределах от 0,6 до 0,9, т.е. в зоне черного шума.

Теория клеточных автоматов утверждает, что «если клетки располагаются линейно вдоль прямой и каждая клетка находится в определенном состоянии, то состояние соседей слева от рассматриваемой клетки влияет на состояние этой клетки на следующем временном шаге». В терминах клеточного автомата значение лингвистической переменной u_{i+k+1} в лингвистическом временном ряде U определяется l -конфигурациями

$$u_{i+k-l}, u_{i+k-l+1}, \dots, u_{i+k}, l = \overline{1, k}, \quad (7)$$

т.е. конфигурациями длины $l = 1, 2, \dots, k$ в отрезке этого ряда

$$u_{i+1}, u_{i+2}, \dots, u_{i+k}, i = \overline{1, n - k + 1}, \quad (8)$$

где через k обозначена глубина памяти рассматриваемого ряда. Для всякого $i = 1, 2, \dots, n - k + 1$ значение лингвистической переменной u_{i+k} в (7) определяется лишь такими l -конфигурациями вида (8). Алгоритм нахождения глубины памяти основывается на частотной статистике переходов в состояния H , C и B всех l -конфигураций, имеющих место в лингвистическом временном ряде U .

Обозначим через $M(U)$ множество всех l -конфигураций $l \leq k$, которые можно обнаружить в лингвистическом временном ряде U ; $M(U) = \bigcup_{l=1}^k M_l$, где M_l – это подмножество всех l -конфигураций в лингвистическом временном ряде U при фиксированном l . Рассмотрим какую-либо фиксированную l -конфигурацию, которую обозначим в виде отрезка

$$u_1^0, u_2^0, \dots, u_j^0, \dots, u_l^0. \quad (9)$$

Если в лингвистическом временном ряде U выделен отрезок $u_{i+1}, u_{i+2}, \dots, u_{i+j}, \dots, u_{i+l}$, совпадающий с (7), т.е. $u_{i+j} = \overline{u_j^0}$, $j = \overline{1, l}$, то по отношению к следующему элементу $u_{i+l+1} = u^0$, $u^0 \in U = \{H, C, B\}$ условимся говорить, что l -конфигурация (9) переходит в состояние u^0 , т.е. в лингвистическую переменную u_{i+l+1} , совпадающую с термом u^0 .

Пусть терм-множество \overline{U} имеет мощность $|\overline{U}| \geq 3$. Тогда, если имеют место перемежающиеся переходы в два фиксированные состояния, то говорим, что l -конфигурация (7) обладает частичной памятью. Если же фиксированная конфигурация демонстрирует переходы в каждое из трех состояний H, C, B , то говорим, что данная конфигурация не обладает памятью. Переходы всех конфигураций с частотами и частостями представляют собой память клеточного автомата, являющуюся основной частью математической модели, предназначенной для прогнозирования лингвистического временного ряда U .

На основании подсчета всех возможных переходов в лингвистическом временном ряде U можно сформировать следующую статистику переходов и оценку памяти отдельных l -конфигураций, составляющих множество M . Для всякого отрезка длины 1 (H, C или B) и всякого отрезка длины 2 ($HH, HC, HB, CH, CC, CB, BH, BC, BB$) в ряде u_i , $i = \overline{1, n}$ всякий раз находились случаи переходов в H, C и B . Первые признаки наличия памяти (частичной), когда переходы происходят в два состояния, обнаружили при $l = 3$: 22,2 % 2-конфигураций демонстрируют частичную память; для $l = 3$: 54,5 % 3-конфигураций демонстрируют наличие памяти, т.е. с равной 1 частотой переходы в какое-либо из трех состояний $u \in \{H, C, B\}$ и 14,6 % 3-конфигураций демонстрируют наличие частичной памяти.

Для $l = 4$ 42,5 % 4-конфигураций демонстрирует наличие памяти и 19 % демонстрирует наличие частичной памяти. Для $l = 5$ наличие памяти демонстрирует 69,2 % 5-конфигураций и 23,1 % демонстрирует частичную память. Для $l = 6$ наличие памяти демонстрируют 85,7 % и 14,2 % частичной памяти. Для $l = 7$ все 100 % конфигураций демонстрируют наличие памяти.

Частотная статистика переходов l -конфигураций в определенное состояние $u^0 \in U = \{H, C, B\}$ формируется следующим образом. Сначала, для каждой 1-конфигурации $u_1^0 \in \{H, C, B\}$ подсчитываем количество ее переходов в каждое из трех состояний H, C, B . Частота перехода – это числа, означают количество на-

блюдаемых 1-конфигураций $u_1^0, u_1^0 \in U$ в каждое из трех состояний H, C, B . На основании этих данных можно вычислить эмпирические значения частоты переходов из 1-конфигураций в состояния H, C, B :

$$\begin{aligned} w_1(H \rightarrow H) &= 8/14, & w_1(C \rightarrow H) &= 4/17, & w_1(B \rightarrow H) &= 3/24, \\ w_1(H \rightarrow C) &= 4/14, & w_1(C \rightarrow C) &= 5/17, & w_1(B \rightarrow C) &= 7/24, \\ w_1(H \rightarrow B) &= 2/14, & w_1(C \rightarrow B) &= 8/17, & w_1(B \rightarrow B) &= 14/24. \end{aligned} \quad (10)$$

Далее, для каждой 2-конфигурации $u_1^0 u_2^0 \in M$ подсчитываем количество переходов в каждое из трех состояний H, C, B . Таких конфигураций в конкретном лингвистическом временном ряде U оказалось девять. Имеем 6 переходов из HH в H , 1 переход из HH в C и 1 переход из HH в B ; 1 переход из HC в H , 3 перехода из HC в B и т.д. На основании этих данных можно вычислить эмпирические значения частоты переходов из 2-конфигураций HH, HC, HB в состояния H, C, B :

$$\begin{aligned} w_2(HH \rightarrow H) &= 6/8, & w_2(HC \rightarrow H) &= 1/4, & w_2(HB \rightarrow H) &= 0/2, \\ w_2(HH \rightarrow C) &= 1/8, & w_2(HC \rightarrow C) &= 0/4, & w_2(HB \rightarrow C) &= 1/2, \\ w_2(HH \rightarrow B) &= 1/8, & w_2(HC \rightarrow B) &= 3/4, & w_2(HB \rightarrow B) &= 1/2. \end{aligned} \quad (11)$$

Аналогично вычисляются эмпирические значения частоты переходов из 2-конфигураций CH, CC, CB, BH, BC, BB в H, C, B . Далее, для каждого значения $l \geq 3$ рассматриваем подмножество $M_l^{(2)} \subset M$ всех l -конфигураций, встречающихся в лингвистическом временном ряде U , мощность $|M_l^{(2)}| = N_l^{(2)}$. По аналогии с (10), (11) вычисляем эмпирические значения частоты переходов из каждой конкретной l -конфигурации $u_1^0 u_2^0 \dots u_l^0 \in M_l^{(2)}$ в состояния H, C, B :

$$w_l(u_1^0 u_2^0 \dots u_l^0 \rightarrow H), w_l(u_1^0 u_2^0 \dots u_l^0 \rightarrow C), w_l(u_1^0 u_2^0 \dots u_l^0 \rightarrow B). \quad (12)$$

Прогноз термина u_{n+1} представляется в виде нечеткого лингвистического множества $U_{n+1} = \{(H; \mu_H), (C; \mu_C), (B; \mu_B)\}$, где значение функции принадлежности μ удовлетворяет равенству $\mu_H + \mu_C + \mu_B = 1$. Значения μ_H, μ_C, μ_B вычисляются через значения частоты вида (10)–(12), получаемых для различных l -конфигураций в следующем отрезке лингвистического временного ряда

$$u_{n-l+1}, u_{n-k}, \dots, u_n. \quad (13)$$

Сначала согласно (10) вычисляются частоты переходов из 1-конфигурации u_n в состояния H, C, B : $w_1(u_n \rightarrow H), w_1(u_n \rightarrow C), w_1(u_n \rightarrow B)$. Далее, согласно (11), вычисляются эмпирические значения частоты переходов из 2-конфигурации $u_{n-1} u_n$ в состояния H, C, B : $w_2(u_{n-1} u_n \rightarrow H), w_2(u_{n-1} u_n \rightarrow C)$ и $w_2(u_{n-1} u_n \rightarrow B)$, после чего вычисляем значение частоты переходов из 3-конфигурации в $u_{n-2} u_{n-1} u_n$ в состояния H, C, B . Если 3-конфигурация $u_{n-2} u_{n-1} u_n$ демонстрирует наличие памяти, например, $w_3(u_{n-2} u_{n-1} u_n \rightarrow C) = 1$, то переходим к вычислению искомым значений μ_H, μ_C, μ_B . Для этого сначала вычисляем ненормированные значения

$$\begin{aligned}\mu'_H &= w_1(u_n \rightarrow H) + w_2(u_{n-1}u_n \rightarrow H) + 0, \\ \mu'_C &= w_1(u_n \rightarrow C) + w_2(u_{n-1}u_n \rightarrow C) + 1, \\ \mu'_B &= w_1(u_n \rightarrow B) + w_2(u_{n-1}u_n \rightarrow B) + 0\end{aligned}$$

и их сумму $\sigma_3 = \mu'_H + \mu'_C + \mu'_B$, после нормировки, которых получаем

$$\mu_H = \frac{\mu'_H}{\sigma_3}, \mu_C = \frac{\mu'_C}{\sigma_3}, \mu_B = \frac{\mu'_B}{\sigma_3}.$$

Если 3-конфигурация $u_{n-2}u_{n-1}u_n$ не демонстрирует наличие памяти, то рассматриваем 4-конфигурацию $u_{n-3}u_{n-2}u_{n-1}u_n$, для которой вычисляем частоты ее переходов в состояния H , C и B . Всякий раз к вычислению искомым значений μ_H, μ_C, μ_B переходим тогда, когда встретится такая l -конфигурация

$$u_{n-k+1}, u_{n-k+2}, \dots, u_n, \quad (14)$$

которая демонстрирует наличие памяти. Например, получаем единичное значение частоты перехода l -конфигурации (14) при $k=l$ для перехода в терм B : $w_1(u_{n-l+1}u_{n-l+2}\dots u_n \rightarrow B) = 1$. В таком случае, как было сказано выше, сначала вычисляем ненормированные значения функции принадлежности:

$$\begin{aligned}\mu'_H &= w_1(u_n \rightarrow H) + w_2(u_{n-1}u_n \rightarrow H) + \dots + w_{l-1}(u_{n-l+2}u_{n-l+3}\dots u_n \rightarrow H) + 0, \\ \mu'_C &= w_1(u_n \rightarrow C) + w_2(u_{n-1}u_n \rightarrow C) + \dots + w_{l-1}(u_{n-l+2}u_{n-l+3}\dots u_n \rightarrow C) + 0, \\ \mu'_B &= w_1(u_n \rightarrow B) + w_2(u_{n-1}u_n \rightarrow B) + \dots + w_{l-1}(u_{n-l+2}u_{n-l+3}\dots u_n \rightarrow B) + 1\end{aligned} \quad (15)$$

и значения их суммы $\sigma_l = \mu'_H + \mu'_C + \mu'_B$. После чего вычисляем искомое значение функции принадлежности для лингвистического нечеткого множества U_{n+1} :

$$\mu_H = \frac{\mu'_H}{\sigma_l}, \mu_C = \frac{\mu'_C}{\sigma_l}, \mu_B = \frac{\mu'_B}{\sigma_l}. \quad (16)$$

Применительно к понятию «модель», термин «верификация» означает проверку структуры и логики модели, а термин «валидация» означает проверку соответствия данных, полученных на основе модели, реальному процессу. Для реализации этих видов проверки построенной прогнозной модели последовательно рассматриваем лингвистические временные ряды

$$u_i, i = 1, 2, \dots, m, \quad m = n - r, \quad r = \overline{1, n - k}, \quad (17)$$

т.е. ряды вида (17) получаются путем удаления из лингвистического временного ряда U последних r его членов. Для каждого фиксированного индекса m строим прогноз термина u_{m+1} , представляемого в виде лингвистического нечеткого множества $U_{m+1} = \{(H; \mu_H), (C; \mu_C), (B; \mu_B)\}$.

Осуществим трансформацию прогнозного лингвистического нечеткого множества в числовой прогноз с помощью известной процедуры дефазификации нечеткого множества [6].

Пусть получено лингвистическое прогнозное значение

$$U_{n+1}^0 = \{(H; 0,18), (C; 0,30), (B; 0,52)\}. \quad (18)$$

Приведем описание процесса преобразования лингвистического нечеткого множества (18) в числовое (классическое) нечеткое множество

$$Y_{n+1}^0 = \{(y_H^0; \mu_H), (y_C^0; \mu_C), (y_B^0; \mu_B)\}. \quad (19)$$

В качестве подходящих числовых значений элементов y_u^0 , $u \in \{H, C, B\}$ выбираются ближайшие к элементам u_i низкие, средние и высокие уровни, которые затем усредняются:

$$u_H^0 = u_{55} = 305,43; u_C^0 = u_{56} = 624,15; u_B^0 = u_{57} = 796,37.$$

Отсюда, с учетом представленных в лингвистическом нечетком множестве (19) значений функции принадлежности μ_H, μ_C, μ_B , получаем искомый прогноз в виде числового нечеткого множества

$$U_{n+1}^0 = \{(305,43; 0,18), (624,15; 0,30), (796,37; 0,52)\}.$$

Применяя к нечеткому множеству U_{n+1}^0 операцию дефазификации, получаем прогноз в обычном числовом виде, т.е.

$$\hat{U}_{n+1}^0 = \sum_{t=1}^3 \mu_t \cdot y_t^0 = 0,18 \cdot 305,43 + 0,30 \cdot 624,15 + 0,52 \cdot 796,37 \approx 657,43,$$

где индексом $t = 1, 2, 3$ перенумерованы соответственно термы H, C, B : $\mu_1 = \mu_H = 0,18$, $\mu_2 = \mu_C = 0,30$, $\mu_3 = \mu_B = 0,52$.

Согласно определению прогнозной модели на ее выходе можно получить временной ряд U^0 прогнозных значений u_i^0 , $i = L, L+1, \dots, n$, занумерованных тем же индексом, которым были занумерованы уровни в исследуемом временном ряде Z . Тогда относительная погрешность прогнозирования для каждого наблюдения $i \in \{L, L+1, \dots, n\}$ вычисляется по формуле $\varepsilon_i = \frac{|u_i - u_i^0|}{u_i^0}$. В качестве оценки

точности прогнозирования принимаем среднее значение $\varepsilon_i = \frac{1}{n - L + 1} \sum_{i=L}^n \varepsilon_i$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Кобелев Н.Б.* Практика применения экономико-математических методов и моделей. – М.: ЗАО «Финстатформ», 2000. – 246 с.
2. *Петерс Э.* Фрактальный анализ финансовых рынков: Применение теории Хаоса в инвестициях и экономике. – М.: Интернет-Трейдинг, 2004. – 304 с.
3. *Лопатников Л.И.* Экономико-математический словарь. – М.: Наука, 1987. – 510 с.
4. *Перепелица В.А., Тебуева Ф.Б., Темирова Л.Г.* Структурирование данных методами нелинейной динамики для двухуровневого моделирования. – Ставрополь: Ставропольское книжное издательство, 2006. – 282 с.
5. *Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г., Потанов А.Б.* Нестационарные структуры, динамический хаос, клеточные автоматы. В кн. «Новое в синергетике. Загадки мира неравновесных структур». – М.: Наука, 1996. (Серия «Кибернетика: неограниченные возможности и возможные ограничения»). – С. 95-164.
6. *Ярушкіна Н.Г.* Основы теории нечетких и гибридных систем: Учеб. пособие. – М.: Финансы и статистика, 2004. – 320 с.

Статью рекомендовал к опубликованию д.т.н., профессор В.Д. Ковалев.

Тебуева Фариза Биляловна – Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Северо-Кавказский федеральный университет»; e-mail: tebueva@stavsu.ru; 355004, г. Ставрополь, ул. Мира, 145, кв. 40; тел.: 89283080307; кафедра организации и технологии защиты информации; к.ф.-м.н.; доцент.

Перепелица Виталий Афанасьевич – e-mail: perepel2@yandex.ru; 369000, г. Черкесск, ул. Октябрьская, д. 309, кв. 18; кафедра компьютерной безопасности; д.ф.-м.н.; профессор-консультант.

Кабиняков Михаил Юрьевич – e-mail: micssys@gmail.com; 352909, г. Армавир, ул. Розы Люксембург, 183, кв. 8; тел.: 89282482374; кафедра организации и технологии защиты информации; соискатель.

Tebueva Fariza Bilyalovna – Federal public independent educational institution of higher education «North-Caucasian Federal University»; e-mail: tebueva@stavsu.ru; 145, Mira street., q. 40, Stavropol, 355004, Russia; phone: 89283080307; the department of the organization and technology of protection of information; cand. of phis.-math. sc.; associate professor.

Perepelitsa Vitaly Afanasievich – e-mail: perepel2@yandex.ru; Russia; the department of the of computer safety; dr. of phis.-math. sc.; professor.

Kabinyakov Mihail Yurievich – e-mail: micssys@gmail.com; 183, Rosa Luxemburg street, q. 8, Armavir, 352909, Russia; phone: 89282482374; the department of the organization and technology of protection of information; graduate student.

УДК 681.51

А.Р. Гайдук, Е.А. Плаксиенко

ИНВАРИАНТЫ МНОГОМЕРНЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ*

Получены уравнения виртуальных моделей полных многомерных управляемых систем, содержащие их марковские параметры. В эти уравнения марковские параметры могут входить как в скалярной, так и в матричной форме. Эти уравнения и при скалярной, и при матричной форме марковских параметров аналогичны обычным уравнениям многомерных систем в переменных состояния. Показано, что марковские параметры являются структурными инвариантами многомерных управляемых систем, определяют их структуру, порядок и степень влияния кусочно-постоянных управлений на выходные переменные управляемой системы и их производные по времени.

Многомерная система; виртуальная модель; управление; марковский параметр; инвариант; структура.

A.R. Gaiduk, E.A. Plaksienko

INVARIANTS OF MULTIVARIABLE CONTROLLED SYSTEMS

The virtual models equations of the full multivariable controlled systems, including them markov parameters are received. The markov parameters can enter into these equations both in scalar, and in the matrix form. These equations both at scalar and at the matrix form of markov parameters are similar to the usual equations of multivariable systems in the state variables. It is shown, that markov parameters are structural invariants of an multivariable controlled systems, determine their structure, the order and a degree of influence controls as a series of steps on output variables of controlled system and their derivatives on time.

Multivariable system; virtual model; control; markov parameter; invariant; structure.

* Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты № 11-08-01196-а; 12-08-90050-Бел_а).