Тебуева Фариза Биляловна – Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Северо-Кавказский федеральный университет»; e-mail: tebueva@stavsu.ru; 355004, г. Ставрополь, ул. Мира, 145, кв. 40; тел.: 89283080307; кафедра организации и технологии защиты информации; к.ф.-м.н.; доцент.

Перепелица Виталий Афанасьевич – e-mail: perepel2@yandex.ru; 369000, г. Черкесск, ул. Октябрьская, д. 309, кв. 18; кафедра компьютерной безопасности; д.ф.-м.н.; профессор-консультант.

Кабиняков Михаил Юрьевич – e-mail: micssys@gmail.com; 352909, г. Армавир, ул. Розы Люксембург, 183, кв. 8; тел.: 89282482374; кафедра организации и технологии защиты информации; соискатель.

Tebueva Fariza Bilyalovna – Federal public independent educational institution of higher education «North-Caucasian Federal University»; e-mail: tebueva@stavsu.ru; 145, Mira street., q. 40, Stavropol, 355004, Russia; phone: 89283080307; the department of the organization and technology of protection of information; cand. of phis.-math. sc.; associate professor.

Perepelitsa Vitaly Afanasievich – e-mail: perepel2@yandex.ru; Russia; the department of the of computer safety; dr. of phis.-math. sc.; professor.

Kabinyakov Mihail Yurievich – e-mail: micssys@gmail.com; 183, Rosa Luxemburg street, q. 8, Armavir, 352909, Russia; phone: 89282482374; the department of the organization and technology of protection of information; graduate student.

УДК 681.51

А.Р. Гайдук, Е.А. Плаксиенко

ИНВАРИАНТЫ МНОГОМЕРНЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ*

Получены уравнения виртуальных моделей полных многомерных управляемых систем, содержащие их марковские параметры. В эти уравнения марковские параметры могут входить как в скалярной, так и в матричной форме. Эти уравнения и при скалярной, и при матричной форме марковских параметров аналогичны обычным уравнениям многомерных систем в переменных состояния. Показано, что марковские параметры являются структурными инвариантами многомерных управляемых систем, определяют их структуру, порядок и степень влияния кусочно-постоянных управлений на выходные переменные управляемой системы и их производные по времени.

Многомерная система; виртуальная модель; управление; марковский параметр; инвариант; структура.

A.R. Gaiduk, E.A. Plaksienko

INVARIANTS OF MULTIVARIABLE CONTROLLED SYSTEMS

The virtual models equations of the full multivariable controlled systems, including them markov parameters are received. The markov parameters can enter into these equations both in scalar, and in the matrix form. These equations both at scalar and at the matrix form of markov parameters are similar to the usual equations of multivariable systems in the state variables. It is shown, that markov parameters are structural invariants of an multivariable controlled systems, determine their structure, the order and a degree of influence controls as a series of steps on output variables of controlled system and their derivatives on time.

Multivariable system; virtual model; control; markov parameter; invariant; structure.

* Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты № 11-08-01196-а; 12-08-90050-Бел_а).

Введение. В настоящее время преобладает тенденция разработки адаптивных систем управления, при которых требуется минимальная априорная информация об управляемой системе [1]. Наиболее эффективными при управлении сложными, многомерными объектами, как, например, коллективами роботов, представляются системы, управляющая часть которых построена на основе принципов самоорганизации [2, 3, 4]. Одной из основных особенностей систем с самоорганизацией является наличие мощного вычислительного комплекса [5]. Этот факт обусловлен тем, что в процессе функционирования в такой системе обрабатывается очень большой объем информации, по идентификации управляемой системы и формированию собственно управляющих воздействий.

Большинство известных алгоритмов адаптивного управления строятся исходя из предположения, что порядок управляемой системы известен и не меняется [1]. На практике часто меняются не только параметры, но и порядок, что должно учитываться в алгоритмах управления [2, 3]. В этом случае важную роль играют различные инварианты динамических систем, которые позволяют оценивать адекватность моделей управляемых систем, получаемых в процессе оперативной идентификации.

В данной работе рассматриваются марковские параметры многомерных управляемых систем и показано, что они непосредственно связаны с порядком и параметрами системы. Марковские параметры, как инварианты некоторых полиномов, использовались известными русскими учеными П.Л. Чебышевым и А.А. Марковым в связи с исследованием разложений рациональных дробей в ряды по отрицательным степеням аргумента [6]. Марковские параметры одномерных управляемых систем рассматривались в работах [7, 8].

Марковские параметры. Пусть неопределенная, линейная, непрерывная управляемая многомерная система описывается уравнениями:

$$\dot{x} = \mathrm{A}x + Bu , \qquad y = Cx + Du , \tag{1}$$

где $x \in R^n$ – вектор состояния размерности n; $u \in R^q$ – вектор управлений; $y \in R^l$ – вектор выходных переменных системы; A, B, C, D – числовые матрицы соответствующих размерностей.

В соответствии с определением [6, 7] марковские параметры системы (1) определяются выражениями:

$$\mu_{ij}^{0} = d_{ij} , \quad \mu_{ij}^{\upsilon} = C_i A^{\upsilon-1} B^j , \ \upsilon = 1, 2, 3, \dots . \tag{2}$$

Здесь d_{ij} – элементы матрицы D; C_i и B^j – строки и столбцы матриц C и B соответственно. Их этих выражений следует, что число марковских параметров не ограничено при любом порядке системы. Имея в виду многомерные системы (1), введем матрицы марковских параметров $M^{\upsilon} = [\mu_{ij}^{\upsilon}] \in R^{l \times q}$ по формулам, аналогичным (2), т.е.

$$M^0 = D , \quad M^{\upsilon} = CA^{\upsilon-1}B , \quad \upsilon = 1, 2, 3, \dots . \tag{3}$$

Поставим задачу определения связи марковских параметров многомерной системы (1) с ее параметрами, порядком и структурой.

Решение задачи. С этой целью рассмотрим реакцию системы (1) на векторные кусочно-постоянные управляющие воздействия $u_k = u(kT)$, где T – период квантования по времени вектора управлений $u(t)$, а $k = 0, 1, 2, \dots$. При этом положим, что непрерывная система (1) является полной [9] и введем обозначения:

векторы $y(t)=y(k|\tau)$, $x(t)=x(k|\tau)$ при $t=kT+\tau$, $\tau\in(0,T)$, $x(k|0)=\lim x(t)$ при $t\to kT$ справа и $x(k|T)=\lim x(t)$ при $t\to(k+1)T$ слева.

Переменные состояния динамических систем всегда являются непрерывными величинами [1, 9], поэтому справедливо равенство:

$$x(k|0)=x(k-1|T),\quad k=0,1,2,\dots. \tag{4}$$

Выходные переменные $y_i(t)$ системы (1) и их производные по времени $d^\rho y_i(t)/dt^\rho$, $\rho=1,2,\dots$, $i\in[1,l]$ при кусочно-постоянном управлении могут иметь разрывы, если, например, $u_{jk}\neq u_{jk-1}$.

Действительно, дифференцируя вектор-функцию $y(t)=Cx(t)+Du(t)$ по t при $t\neq kT$, получим: $\dot y(t)=C\dot x(t)+D\dot u(t)=CAx(t)+CBu(t)$, так как $\dot u(t)=0$, при $t\neq kT$. Вводя обозначения: $y(t)=y^{(0)}(k|\tau)$; $\dot y(t)=y^{(1)}(k|\tau)$, а также $\dot y^{(\rho-1)}(t)=y^{(\rho)}(k|\tau)$, где $\tau\in(0,T)$, $\rho=1,2,\dots$, найдем, что l-вектор производных ρ-го порядка от управляемых переменных определяется выражением

$$y^{(\rho)}(k|\tau)=CA^\rho x(k|\tau)+CA^{\rho-1}Bu(k|\tau)$$

или с учетом обозначения (2)

$$y^{(\rho)}(k|\tau)=CA^\rho x(k|\tau)+M^\rho u_k,\quad \rho=0,1,2,\dots,\quad k=0,1,2,\dots. \tag{5}$$

Примем в качестве переменных состояния моделей неопределенных систем типа (1) непрерывные переменные $z_i^\rho=C_iA^{\rho-1}x$, $i=\overline{1,l}$, $\rho=1,2,\dots$, число которых также не ограничено при любом n [7]. Составленные из них векторы будем обозначать $z^\rho=CA^{\rho-1}x$. Тогда, согласно (5) l-векторы z^ρ можно также определить следующим равенством:

$$z^\rho(k|\tau)=y^{(\rho-1)}(k|\tau)-M^{\rho-1}u_k. \tag{6}$$

Дифференцируя обе части равенства (6) по времени при $0<\tau<T$ и учитывая, что при этом $\dot u_k=0$, получим

$$\dot z^\rho[k|\tau]=\dot y^{(\rho-1)}[k|\tau]=y^{(\rho)}[k|\tau],\quad \tau\in(0,T).$$

Отсюда снова с учетом (4) и определения l-векторов z^ρ выводим:

$$\dot z^\rho(k|\tau)=CA^\rho x(k|\tau)+M^\rho u_k=z^{\rho+1}(k|\tau)+M^\rho u_k\quad \rho=1,2,\dots. \tag{7}$$

Если $z^\rho(k|\tau)$ – это векторные переменные состояния системы ν-го порядка, то в соответствии с теоремой Кели-Гамильтона [6, 10], лишь ν векторных переменных $z^\rho(k|\tau)$ являются независимыми. Поэтому уравнения (7) можно представить следующим образом:

$$y=z^1(k|\tau)+M^0u_k, \tag{8}$$

$$\dot z^\rho(k|\tau)=z^{\rho+1}(k|\tau)+M^\rho u_k,\quad \rho=\overline{1,\nu-1},$$

$$\dot z^\nu(k|\tau)=-\sum_{i=0}^{\nu-1}\alpha_{\nu i}z^{i+1}(k|\tau)+M^\nu u_k, \tag{9}$$

где $\alpha_{\nu i}$ – коэффициенты характеристического полинома этой системы. Важным моментом в этой системе является то, что при всех порядках $\nu=1,2,3,\dots$ уравнение выхода (8) является единственным, поэтому оно записано первым.

Система (8), (9) в векторно-матричной форме и векторных переменных состояния $z^{\rho} = CA^{\rho-1}x$ имеет следующий вид:

$$y = [\begin{matrix} E & O & O & \dots & O \end{matrix}] z_{\nu}(k\,|\,\tau) + M^{0}u_{k}, \tag{10}$$

где $(\nu \times l)$-вектор $z_{\nu}(k|\tau) = [z^{1T}(k|\tau) \quad z^{2T}(k|\tau) \quad \dots \quad z^{\nu T}(k|\tau)]^{T}$ является решением системы уравнений

$$\dot{z}_{\nu}(k|\tau) = \begin{bmatrix} O & E & O & \dots & O \\ O & O & E & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & O & \dots & E \\ -\alpha_{\nu 0}E & -\alpha_{\nu 1}E & -\alpha_{\nu 2}E & \dots & -\alpha_{\nu,\nu-1}E \end{bmatrix} z_{\nu}(k|\tau) + \begin{bmatrix} M^{1} \\ M^{2} \\ \vdots \\ M^{\nu-1} \\ M^{\nu} \end{bmatrix} u_{k}. \tag{11}$$

Здесь O – нулевая ($l \times l$)-матрица, $k = 0, 1, 2, \dots,$ $\nu = 1, 2, 3, \dots.$

По форме система (10), (11) совпадает с обычными уравнениями динамических систем в переменных состояния типа (1), однако эти уравнения одновременно описывают l систем с q управлениями и одной выходной переменной $y_i = y_i(t)$, которая определяется следующим выражением:

$$y_i = y_i(k|\tau) = [\begin{matrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{matrix}] z_i(k|\tau) + M_i^{0}u_k, \qquad i = \overline{1, l}, \tag{12}$$

где M_i^0 – i-я строка матрицы M^0 марковских параметров μ_{ij}^{0}, а $z_{\nu i}(k|\tau) = \left[z_i^1(k|\tau)\; z_i^2(k|\tau) \dots\; z_i^{\nu}(k|\tau) \right]^{T}$ – обычный вектор состояния, который является решением следующей системы уравнений в форме Коши:

$$\dot{z}_{\nu i}(k|\tau) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\alpha_{\nu 0} & -\alpha_{\nu 1} & -\alpha_{\nu 2} & \dots & -\alpha_{\nu,\nu-1} \end{bmatrix} z_{\nu i}(k|\tau) + \begin{bmatrix} M_i^{1} \\ M_i^{2} \\ \vdots \\ M_i^{\nu-1} \\ M_i^{\nu} \end{bmatrix} u_k, \; i = \overline{1, l}. \tag{13}$$

Здесь M_i^{υ} – i-я строка матрицы M^{υ} марковских параметров μ_{ij}^{υ}, $\upsilon = \overline{1, \nu}$.

Иногда многомерная система, например при идентификации, подвергается воздействию одного скалярного управления. В этом случае только одна j-я компонента вектора u_k не равна нулю, т.е. $u_k = [0 \dots u_{jk} \dots 0]^{T}$, а компоненты выходного вектора $y(k|\tau)$ представляют собой реакции всех l каналов системы на управляющее воздействие u_{jk}. При этих условиях система уравнений (10), (11) принимает вид

$$y(k\,|\,\tau) = [\begin{matrix} E & O & O & \dots & O \end{matrix}] z_{\nu}(k\,|\,\tau) + M_j^{0}u_{jk}, \quad j \in [1, q], \tag{14}$$

$$\dot{z}_{\nu}(k|\tau) = \begin{bmatrix} O & E & O & \dots & O \\ O & O & E & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & O & \dots & E \\ -\alpha_{\nu 0}E & -\alpha_{\nu 1}E & -\alpha_{\nu 2}E & \dots & -\alpha_{\nu,\nu-1}E \end{bmatrix} z_{\nu}(k|\tau) + \begin{bmatrix} M_j^{1} \\ M_j^{2} \\ \vdots \\ M_j^{\nu-1} \\ M_j^{\nu} \end{bmatrix} u_{jk}, \; j \in [1, q], \tag{15}$$

Здесь M_j^{υ} – *j*-й столбец матрицы M^{υ} марковских параметров μ_{ij}^{υ}, $\upsilon = \overline{1, \nu}$.

Полученные уравнения (8)–(14) описывают некоторые как многомерные, так и одномерные системы различных порядков. Отличительной особенностью этих систем является то, что все они находятся под влиянием одних и тех же кусочно-постоянных управлений $u_k = u(k \mid \tau) = Const$, $\tau \in (0, T)$ и в них содержатся одни и те же марковские параметры. Например, при $l = q = 1$, т.е. при одной переменной $y(t)$ и одном управлении $u(t)$ и при $\nu = 3,\ 4$ они имеют вид:

$$\nu = 3 \qquad \begin{aligned} y &= z^1 + \mu^0 u_k, \\ \dot{z}^1 &= z^2 + \mu^1 u_k, \\ \dot{z}^2 &= z^3 + \mu^2 u_k, \\ \dot{z}^3 &= -\alpha_{30} z^1 - \alpha_{31} z^2 - \alpha_{32} z^3 + \mu^3 u_k, \end{aligned} \tag{16}$$

где

$$\nu = 4 \qquad \begin{aligned} y &= z^1 + \mu^0 u_k, \\ \dot{z}^1 &= z^2 + \mu^1 u_k, \\ \dot{z}^2 &= z^3 + \mu^2 u_k, \\ \dot{z}^3 &= z^4 + \mu^3 u_k, \\ \dot{z}^4 &= -\alpha_{40} z^1 - \alpha_{41} z^2 - \alpha_{42} z^3 - \alpha_{43} z^4 + \mu^4 u_k \end{aligned} \tag{17}$$

где

Как видно, в обеих системах уравнений (16) и (17) фигурируют одни и те же марковские параметры.

Нетрудно видеть, что если $\nu = n$, то каждая из систем уравнений (8), (9); (10), (11); (12), (13); (14), (15) может быть эквивалентной системе (1). Из определения переменных $z_i^{\upsilon} = C_i A^{\upsilon-1} x$, $i = \overline{1, \nu}$ следует, что векторы x и z связаны некоторым преобразованием подобия $z_{\nu} = z_n = N_n x$, где матрица N_n составляется из строк матрицы наблюдаемости системы (1) [9]. Если преобразование $z_n = N_n x$ является невырожденным, то модели в переменных состояния (8)–(16), $\nu = n$ эквивалентны системе (1) [6].

Как видно из уравнений (8), (9) и (10), (11), марковские параметры μ_{ij}^{υ} однозначно определяют внутреннюю структуру системы. Например, если известно, что некоторая система (1) с одним входом и одним выходом ($l = q = 1$) имеет порядок $n = 4$ и значения марковских параметров: $\mu^0 = \mu^1 = 0$, а $\mu^2 \neq 0$, $\mu^3 \neq 0$, $\mu^4 \neq 0$, то согласно (17) можно утверждать, что структурная схема этой системы имеет вид, приведенный на рис. 2.

На рис. 2 штриховыми линиями показаны связи, которые имела бы данная система, если бы $\mu^0 \neq 0$ и $\mu^1 \neq 0$. По рис. 2 легко заключить, что при кусочно-постоянном управлении $u = u_k$ переменная $y(t)$ и ее производная по времени $y^{(1)}(t) = \dot{y}(t)$ являются непрерывными функциями, а производные $y^{(2)}(t) = \ddot{y}(t)$, $y^{(3)}(t) = \dddot{y}(t)$ и $y^{(4)}(t) = \ddddot{y}(t)$ имеют разрывы при $t = kT$, если $u_k \neq u_{k-1}$. Другими словами, марковские параметры вполне определяют влияние кусочно-постоянного управления u_k на производные выходной переменной системы.

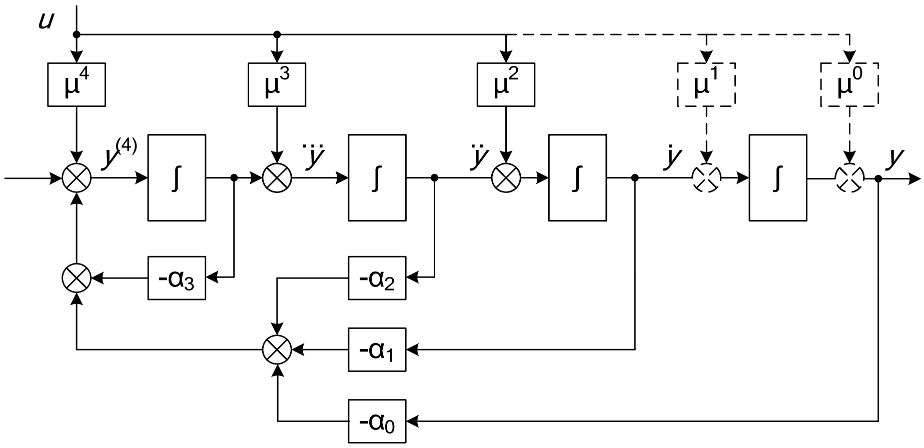

Рис. 2. Структура системы при $\mu^0 = \mu^1 = 0$, *а* $\mu^2 \neq 0$, $\mu^3 \neq 0$, $\mu^4 \neq 0$

Марковские параметры – инварианты управляемых систем. Поскольку марковские параметры однозначно связаны с внутренней структурой систем, то они являются структурными инвариантами относительно невырожденных преобразований переменных. Покажем, что это так. С этой целью подвергнем вектор состояния системы (1) невырожденному преобразованию, т.е. положим $\tilde{x} = Px$, причем $\det P \neq 0$ [6, 9]. В этом случае новые уравнения системы (1) имеют вид

$$\tilde{x} = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}u, \qquad y = \tilde{C}x + \tilde{D}u, \tag{18}$$

где

$$\tilde{A} = P^{-1}AP, \quad \tilde{B} = P^{-1}B, \quad \tilde{C} = CP, \quad \tilde{D} = D. \tag{19}$$

Обозначим матрицы марковских параметров системы (18) как $\tilde{M}^{\rho}$. Тогда из последнего равенства (18) и определения (2) следует, что $\tilde{M}^0 = M^0$, а $\tilde{M}^{\upsilon} = \tilde{C}\tilde{A}^{\upsilon-1}\tilde{B}$. Подставляя в это выражение равенства (19), будем иметь

$$\tilde{M}^1 = \tilde{C}\tilde{B} = CPP^{-1}B = M^1, \quad \tilde{M}^2 = \tilde{C}\tilde{A}\tilde{B} = CP(P^{-1}AP)P^{-1}B = CAB = M^2.$$

Аналогично

$$\tilde{M}^{\upsilon} = \tilde{C}\tilde{A}^{\upsilon-1}\tilde{B} = CP(P^{-1}AP)\ldots(P^{-1}AP)P^{-1}B = CA^{\upsilon-1}B = M^{\upsilon}. \quad \upsilon = 3, 4, \ldots$$

Отсюда и следует утверждение, что марковские параметры являются инвариантами динамических систем.

Отметим, что все системы (8)–(15), формально, описывают систему (1), и следовательно, являются её моделями. Так как система (1) имеет порядок n, а системы (8)–(15) имеют различные порядки, то они называются виртуальными моделями неопределенной системы (1) [7].

Заключение. В соответствии с приведенными выше соотношениями для каждой динамической системы можно найти не ограниченное число марковских параметров по каждому её каналу «вход-выход». Эти параметры являются структурными инвариантами системы, они определяют её структуру и степень влияния каждого входного кусочно-постоянного управления на каждую выходную переменную и её производные по времени.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Александров А.Г.* Оптимальные и адаптивные системы. – М.: Высшая школа, 1976.
2. *Красовский А.А.* Развитие концепции, аналитическая теория, алгоритмическое обеспечение двухконтурного самоорганизующегося регулятора // Известия РАН. Теория и системы управления. – 1999. – № 4. – С. 52-64.
3. 3. *Гайдук А.Р., Капустян С.Г.* Самоорганизующийся алгоритм действий интеллектуальных автономных роботов. Наука и образование на рубеже тысячелетий: Сборник НИР. Вып. 1. – М.: Учлитвуз, 2011. – С. 5-15.
4. *Гайдук А.Р., Плаксиенко Е.А.* Синтез автономных и связных многомерных систем управления // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2012. – № 1. – С. 13-20.
5. *Саридис Дж.* Самоорганизующиеся стохастические системы управления: Пер. с англ. / Под ред. Я.З. Цыпкина. – М.: Наука, 1980.
6. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. – М.: Наука, 1988.
7. *Гайдук А.Р.* Алгоритмическое обеспечение самоорганизующихся регуляторов с экстраполяцией // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2002. – № 3. – С. 56-63.
8. *Гайдук А.Р., Медведев М.В.* Построение самоорганизующихся систем управления в условиях неопределенности // Аналитические методы анализа и синтеза регуляторов. – 2000. – С. 30-43.
9. *Гайдук А.Р.* Теория автоматического управления. – М.: Высшая школа, 2010.
10. *Понтрягин Л.С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1970.

Статью рекомендовал к опубликованию д.т.н., профессор Р.А. Нейдорф.

Гайдук Анатолий Романович – Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Южный федеральный университет»; e-mail: gaiduk_2003@mail.ru; 347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44; тел.: 88634361789; кафедра систем автоматического управления; д.т.н.; профессор.

Плаксиенко Елена Анатольевна – Таганрогский институт управления и экономики; e-mail: pumka@mail.ru; 347900, г. Таганрог, ул. Петровская, 45; тел: 88634362583; кафедра математики и информатики; к.т.н.; доцент.

Gaiduk Anatoly Romanovich – Federal State-Owned Autonomy Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”; e-mail: gaiduk_2003@mail.ru; 44; Nekrasovskiy, Taganrog, 347928, Russia; phone: +78634361789; the department of automatic control systems; dr. of eng. sc.; professor.

Plaksienko Elena Anatolievna – Educational Establishment of Higher Vocational Education «Taganrog Management and Economy Institute»; e-mail: pumka@mail.ru; 45, Petrovskaya street, Taganrog, 347900, Russia; phone: +78634362583; the department of mathematic and informatics; cand. of eng. sc.; assistant professor.