3. *Pietraszkiewicz W., Eremeyev V.A., Konopinska V.* Extended non-linear relations of elastic shells undergoing phase transitions // Z.Angew. Math. Mech. (ZAMM). – 2007. – Vol. 87, №. 2. – P. 150-159.
4. *Bhattacharya, K., & Schlömerkemper, A.* Stress-induced phase transformations in shape-memory polycrystals // Archive for rational mechanics and analysis. – 2010. – Vol. 196, № 3. – P. 715-751.
5. *Knüpfer H., & Kohn R. V.* Minimal energy for elastic inclusions // Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Science. – 2011. – Vol. 467, № 2127. – P. 695-717.
6. *Miehe C.* Mixed variational principles for the evolution problem of gradient–extended dissipative solids // GAMM-Mitteilungen. – 2012. – Vol. 35. – P. 8-25.
7. *Гиббс Дж.* Термодинамика. Статистическая механика. – М.: Наука, 1982. – 584 с.
8. *Гринфельд М.А.* Об условиях термодинамического равновесия фаз нелинейно-упругого материала // Докл. АН СССР. – 1980. – Т. 251, № 4. – С. 824-827.
9. *James R.D.* Finite deformation by mechanical twinning // Arch. Rat. Mech. Anal. – 1981. – Vol. 77. – P. 143-177.
10. *Гринфельд М.А.* Методы механики сплошных сред в теории фазовых превращений. – М.: Наука, 1990. – 312 с.
11. *Морозов Н.Ф., Назыров И.Р., Фрейдин А.Б.* Одномерная задача о фазовом превращении упругого шара // Докл. РАН. – 1996. – Т. 346, № 2. – С. 188-191.
12. *Осмоловский В.Г.* Вариационная задача о фазовых переходах в механике сплошной среды. – СПб.: Изд-во СПб ун-та, 2000. – 262 с.
13. *Бахвалов Н.С.* Численные методы (анализ, алгебра, обыкновенные дифференциальные уравнения). – М.: Наука, 1975. – С. 535-592.
14. *Ануфриев И.Е., Смирнов А.Б., Смирнова Е.Н.* MATLAB7. – СПб.: Изд-во “БХВ-Петербург”, 2005. – С. 330-342.

Статью рекомендовал к опубликованию д.ф.-м.н., профессор В.А. Еремеев.

Онишкова Анастасия Михайловна – ООО «ИТСК»; e-mail: aonishkova@gmail.com; 344079, г. Ростов-на-Дону, ул. Ленина, 63, кв. 4; тел.: 89264959227; главный специалист.

Onishkova Anastasia Mikhajlovna – Ltd. "ITSC"; e-mail: aonishkova@gmail.com; 63-4, Lenina street, Rostov-on-Don, 344079, Russia; phone: +79264959227; chief specialist.

УДК 532.5.031

А.Е. Чистяков, Ю.В. Першина

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ ПОПУЛЯЦИЙ НА ОСНОВЕ МОДЕЛИ ХИЩНИК-ЖЕРТВА

При описании биологической системы предполагалось, что хищники обладают пространственным перемещением, конвективная составляющая скорости которого направлена в сторону градиента жертв. Для построения разностных схем был использован интегроинтерполяционный метод, при этом учитывалась степень заполненности ячеек. На основе разработанных алгоритмов был построен комплекс программ, отличительной особенностью которого является высокая размерность задачи, возможность привязки к реальной физической экологической системе, учет заполненности контрольных объемов в дискретных алгоритмах, что позволяет получать достаточно высокую точность даже на грубых сетках за счет более точной аппроксимации границы.

Хищник; жертва; диффузионное перемещение; конвективное перемещение.

A.E. Chistyakov, Y.V. Pershina

SOLUTION OF THE DYNAMICS OF POPULATION, BASED ON OFPREDATOR-PREY MODEL

Describing the biological system it was assumed that predators have a spatial displacement, its convective component of the velocity is directed toward the gradient of the victims. Integro-interpolation method was used to construct the difference schemes. The degree of cells filling was taken into consideration, it improves the accuracy of the calculations. On the basis of the proposed algorithms, program complex was built. Its distinctive feature is the high dimensionality of the problem, the ability to bind to the real physical environmental system, filling accounting of control volumes in discrete algorithms. It allows to get a sufficiently high accuracy, even on coarse meshes through more accurate border approximation.

A predator; a prey; a diffusion movement; a convective movement.

Введение. Система «хищник-жертва» – сложная экосистема, для которой реализованы долговременные отношения между видами хищника и жертвы, типичный пример коэволюции. Отношения между хищниками и их жертвами развиваются циклически, являясь иллюстрацией нейтрального равновесия [4].

Модель «хищник-жертва» все чаще используется не только для моделирования поведения сообществ в экологии, но и применяется к социальным и экономическим моделям, что указывает на актуальность рассматриваемой задачи.

Цель данной работы состоит в рассмотрении системы дифференциальных уравнений в форме Лотки-Вольтерра [4], построении дискретной схемы повышенной степени точности, разработке комплекса программ для численной реализации поставленной задачи и визуализации полученных результатов.

Для аппроксимации уравнений системы используем метод конечных объемов, учтем заполненности областей, что позволит рассматривать задачу в произвольной области, граница которой имеет ступенчатую форму. При этом получим более точную аппроксимацию уравнений на границе.

Рассматриваемая модель системы «хищник-жертва» имеет большую практическую значимость для моделирования экологических систем, где в расчет принимаются более одного вида живых существ, одни из которых поглощаются другими.

1. Постановка начально-краевой задачи. Исходными уравнениями динамики популяций (модель хищник-жертва) являются [1–3]:

- уравнение, описывающее диффузионное перемещение жертв, а также динамику изменения их концентрации за счет роста и смертности запишется в виде

$$N_t' = (\mu_N N_x')_x' + (\mu_N N_y')_y' + C_1(N_0 - N)N - C_2 P, \tag{1}$$

- уравнение, описывающее диффузионное и конвективное перемещение хищников, а также динамику изменения их концентрации за счет роста и смертности запишется в виде

$$P_t' + uP_x' + vP_y' = (\mu_P P_x')_x' + (\mu_P P_y')_y' - C_3 P + C_4 NP, \tag{2}$$

- уравнения для компонентов вектора скорости конвективного движения хищников в направлении градиента жертв запишутся в виде

$$\alpha u + \beta(u_t' + uu_x' + vu_y') = (\mu_v u_x')_x' + (\mu_v u_y')_y' + C_5 N_x', \tag{3}$$

$$\alpha v + \beta(v_t' + uv_x' + vv_y') = (\mu_v v_x')_x' + (\mu_v v_y')_y' + C_5 N_y', \tag{4}$$

где N – концентрация жертв; P – концентрация хищников; N_0 – предельная концентрация; u, v – компоненты вектора скорости конвективного движения хищников; C_1 – коэффициент роста жертв, C_2 – коэффициент смертности жертв; C_3 – коэффициент роста хищников; C_4 – коэффициент смертности хищников; C_5 – коэффициент таксиса; μ_N – коэффициент диффузионного перемещения жертв; μ_P – коэффициент диффузионного перемещения хищников; μ_v – коэффициент диффузионного обмена для вектора скорости; α, β – весовые коэффициенты. Расчет скорости движения водной среды производится на основе математических моделей гидродинамики [5–7].

Система уравнений (1–4) рассматривается при следующих начальных:

$$N(x,y,t)=N_0(x,y),\ P(x,y,t)=P_0(x,y),\tag{5}$$
$$u(x,y,t)=0,\ v(x,y,t)=0,\ \text{при } t=0$$

и граничных условиях:

$$N_n'(x,y,t)=0,\ P_n'(x,y,t)=0,\tag{6}$$
$$u(x,y,t)=0,\ v(x,y,t)=0,\ \text{при } (x,y)\in\gamma.$$

2. Дискретная математическая модель динамики популяций. Расчетная область вписана в прямоугольник. Покроем область равномерной прямоугольной расчетной сеткой $\omega=\omega_t\times\omega_x\times\omega_y$. Дискретные аналоги операторов конвективного и диффузионного переноса в случае граничных условий в форме Неймана могут быть записаны в следующем виде [9–12]:

$$\left(q_0\right)_{i,j}uc_x'=\left(q_1\right)_{i,j}u_{i+1/2,j}\frac{c_{i+1,j}-c_{i,j}}{2h_x}+\left(q_2\right)_{i,j}u_{i-1/2,j}\frac{c_{i,j}-c_{i-1,j}}{2h_x},$$

$$\left(q_0\right)_{i,j}\left(\mu c_x'\right)_x'=\left(q_1\right)_{i,j}\mu_{i+1/2,j}\frac{c_{i+1,j}-c_{i,j}}{h_x^2}-\left(q_2\right)_{i,j}\mu_{i-1/2,j}\frac{c_{i,j}-c_{i-1,j}}{h_x^2},$$

где q_m – коэффициенты заполненности контрольных областей.

Аппроксимация уравнения (1) в случае граничных условий в форме Неймана имеет вид:

$$\left(q_0\right)_{i,j}\frac{\hat{N}_{i,j}-N_{i,j}}{\tau}=\left(q_1\right)_{i,j}\left(\mu_N\right)_{i+1/2,j}\frac{\bar{N}_{i+1,j}-\bar{N}_{i,j}}{h_x^2}-\tag{7}$$
$$-\left(q_2\right)_{i,j}\left(\mu_N\right)_{i-1/2,j}\frac{\bar{N}_{i,j}-\bar{N}_{i-1,j}}{h_x^2}+\left(q_3\right)_{i,j}\left(\mu_N\right)_{i,j+1/2}\frac{\bar{N}_{i,j+1}-\bar{N}_{i,j}}{h_y^2}-$$
$$-\left(q_4\right)_{i,j}\left(\mu_N\right)_{i,j-1/2}\frac{\bar{N}_{i,j}-\bar{N}_{i,j-1}}{h_y^2}+\left(q_0\right)_{i,j}\left(C_1\left(N_0-N_{i,j}\right)\bar{N}_{i,j}-C_2P_{i,j}\right),$$

где $\hat{N}$ – значение концентрации жертв на следующем временном слое, N – значение концентрации жертв на текущем временном слое, $\bar{N}_{i,j}=\sigma\hat{N}_{i,j}+\left(1-\sigma\right)N_{i,j}$ $\sigma\in[0,1]$.

Дискретный аналог уравнения (2) примет вид

$$
\begin{gathered}
\left(q_0\right)_{i,j}\frac{\hat{P}_{i,j}-P_{i,j}}{\tau}+\left(q_1\right)_{i,j}u_{i+1/2,j}\frac{\overline{P}_{i+1,j}-\overline{P}_{i,j}}{2h_x}+\\
+\left(q_2\right)_{i,j}u_{i-1/2,j}\frac{\overline{P}_{i,j}-\overline{P}_{i-1,j}}{2h_x}+\left(q_3\right)_{i,j}v_{i,j+1/2}\frac{\overline{P}_{i,j+1}-\overline{P}_{i,j}}{2h_y}+\\
+\left(q_4\right)_{i,j}v_{i,j-1/2}\frac{\overline{P}_{i,j}-\overline{P}_{i,j-1}}{2h_y}=\left(q_1\right)_{i,j}\left(\mu_P\right)_{i+1/2,j}\frac{\overline{P}_{i+1,j}-\overline{P}_{i,j}}{h_x^2}-\\
-\left(q_2\right)_{i,j}\left(\mu_P\right)_{i-1/2,j}\frac{\overline{P}_{i,j}-\overline{P}_{i-1,j}}{h_x^2}+\left(q_3\right)_{i,j}\left(\mu_P\right)_{i,j+1/2}\frac{\overline{P}_{i,j+1}-\overline{P}_{i,j}}{h_y^2}-\\
-\left(q_4\right)_{i,j}\left(\mu_P\right)_{i,j-1/2}\frac{\overline{P}_{i,j}-\overline{P}_{i,j-1}}{h_y^2}+\left(q_0\right)_{i,j}\left(-C_3+C_4N_{i,j}\right)\overline{P}_{i,j}\,.
\end{gathered}
\tag{8}
$$

Запишем аппроксимацию уравнений (3)–(4) в случае граничных условий первого рода:

- для компоненты u

$$
\begin{gathered}
\alpha\overline{u}_{i,j}+\beta\left(\frac{\hat{u}_{i,j}-u_{i,j}}{\tau}+u_{i+1/2,j}\frac{\overline{u}_{i+1,j}-\overline{u}_{i,j}}{2h_x}+u_{i-1/2,j}\frac{\overline{u}_{i,j}-\overline{u}_{i-1,j}}{2h_x}+\right.\\
\left.+v_{i,j+1/2}\frac{\overline{u}_{i,j+1}-\overline{u}_{i,j}}{2h_y}+v_{i,j-1/2}\frac{\overline{u}_{i,j}-\overline{u}_{i,j-1}}{2h_y}\right)=\left(\mu_v\right)_{i+1/2,j}\frac{\overline{u}_{i+1,j}-\overline{u}_{i,j}}{h_x^2}-\\
-\left(\mu_v\right)_{i-1/2,j}\frac{\overline{u}_{i,j}-\overline{u}_{i-1,j}}{h_x^2}+\left(\mu_v\right)_{i,j+1/2}\frac{\overline{u}_{i,j+1}-\overline{u}_{i,j}}{h_y^2}-\\
-\left(\mu_v\right)_{i,j-1/2}\frac{\overline{u}_{i,j}-\overline{u}_{i,j-1}}{h_y^2}+C_5\frac{N_{i+1,j}-N_{i-1,j}}{2h_x}\,,
\end{gathered}
\tag{9}
$$

- для компоненты v

$$
\begin{gathered}
\alpha\overline{v}_{i,j}+\beta\left(\frac{\hat{v}_{i,j}-v_{i,j}}{\tau}+u_{i+1/2,j}\frac{\overline{v}_{i+1,j}-\overline{v}_{i,j}}{2h_x}+u_{i-1/2,j}\frac{\overline{v}_{i,j}-\overline{v}_{i-1,j}}{2h_x}+\right.\\
\left.+v_{i,j+1/2}\frac{\overline{v}_{i,j+1}-\overline{v}_{i,j}}{2h_y}+v_{i,j-1/2}\frac{\overline{v}_{i,j}-\overline{v}_{i,j-1}}{2h_y}\right)=\left(\mu_v\right)_{i+1/2,j}\frac{\overline{v}_{i+1,j}-\overline{v}_{i,j}}{h_x^2}-\\
-\left(\mu_v\right)_{i-1/2,j}\frac{\overline{v}_{i,j}-\overline{v}_{i-1,j}}{h_x^2}+\left(\mu_v\right)_{i,j+1/2}\frac{\overline{v}_{i,j+1}-\overline{v}_{i,j}}{h_y^2}-\\
-\left(\mu_v\right)_{i,j-1/2}\frac{\overline{v}_{i,j}-\overline{v}_{i,j-1}}{h_y^2}+C_5\frac{N_{i,j+1}-N_{i,j-1}}{2h_y}\,.
\end{gathered}
\tag{10}
$$

Выражения (9)–(10) аппроксимируют уравнения (3)–(4) в случае ступенчатой формы расчетной области.

Уравнения (7)–(10) являются дискретным аналогом системы уравнений (1)–(4), описывающей поведение динамики изменения концентрации популяций, состоящей из двух видов. Первый вид условно назовем жертвами, второй – хищниками.

3. Результаты работы программного комплекса. В целях моделирования возможных сценариев поведения биологической системы, состоящей из хищников и жертв, был разработан комплекс программ. Рассматривается двумерная сетка размером 100x100 ед., шаг по пространству равен 1, шаг по времени равен 0,01. Вес для разностной схемы равен 0,5. В начальный момент времени моделирования концентрация жертв задавалась постоянным значением, равным 1, исходная концентрация хищников приведена на рис. 1. Концентрация хищников показана палитрой. При моделировании изменения концентрации популяций использованы следующие параметры: предельная концентрация, коэффициент роста жертв $C_1 = 1$, коэффициент смертности жертв $C_2 = 1$, коэффициент роста хищников $C_3 = 1$, коэффициент смертности хищников $C_4 = 1$, коэффициент таксиса $C_5 = 10$, коэффициент диффузии равен 1.

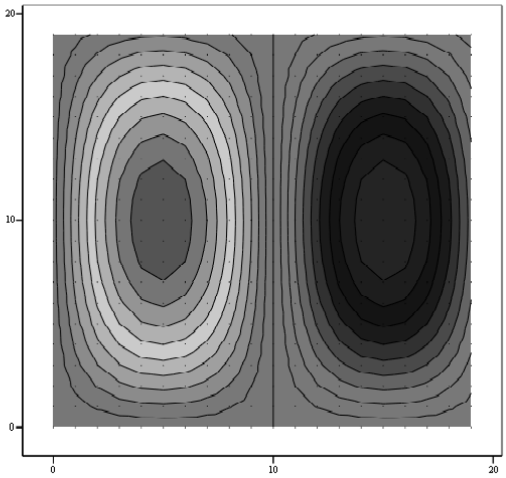

Рис. 1. Начальное распределение концентрации хищников

На рис. 2–5 приведены результаты использования предложенных алгоритмов и построенного на их основе программного обеспечения. Стрелочками показано направление движения хищников, цветом показана концентрация популяций.

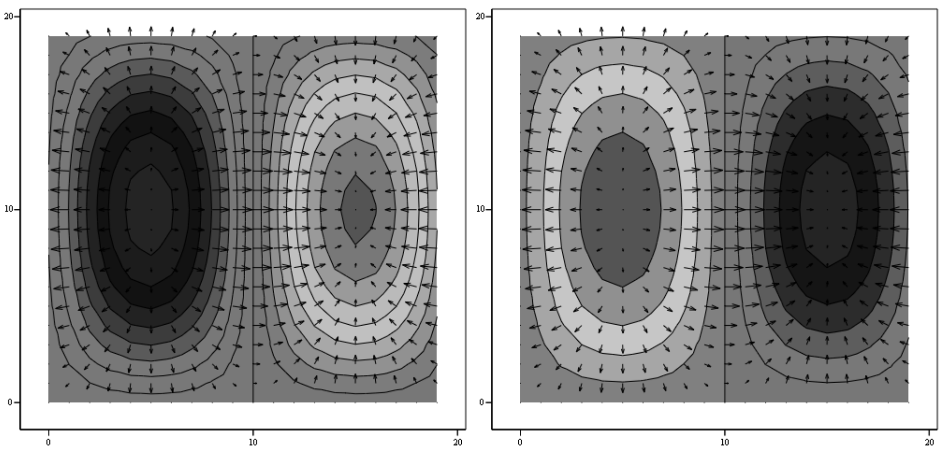

Рис. 2. Распределение концентраций жертв (слева) и хищников (справа) через время 100 у.е.

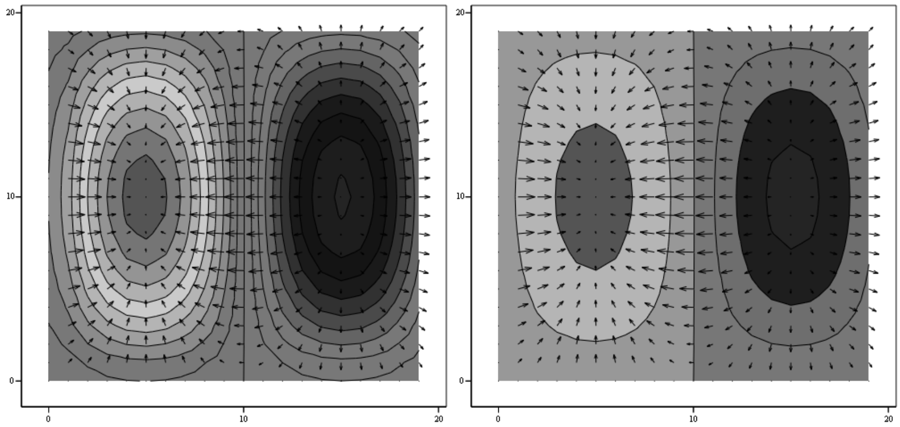

Рис. 3. Распределение концентраций жертв (слева) и хищников (справа) через 500 у.е.

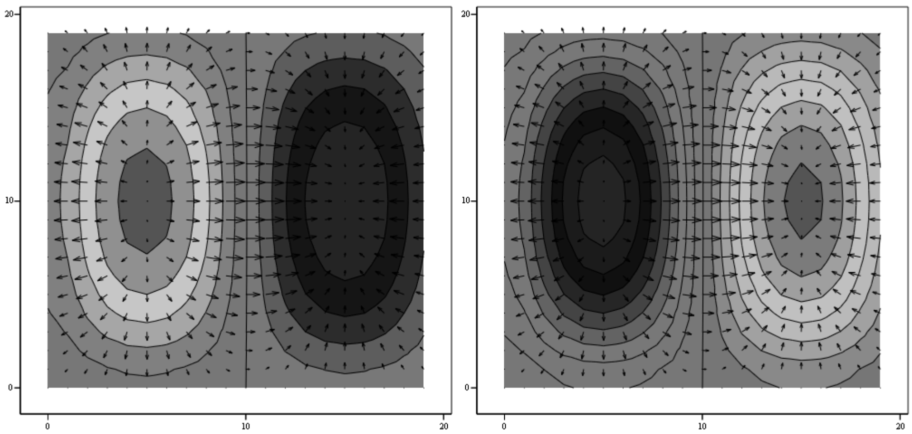

Рис. 4. Распределение концентраций жертв (слева) и хищников (справа) через 1000 у.е.

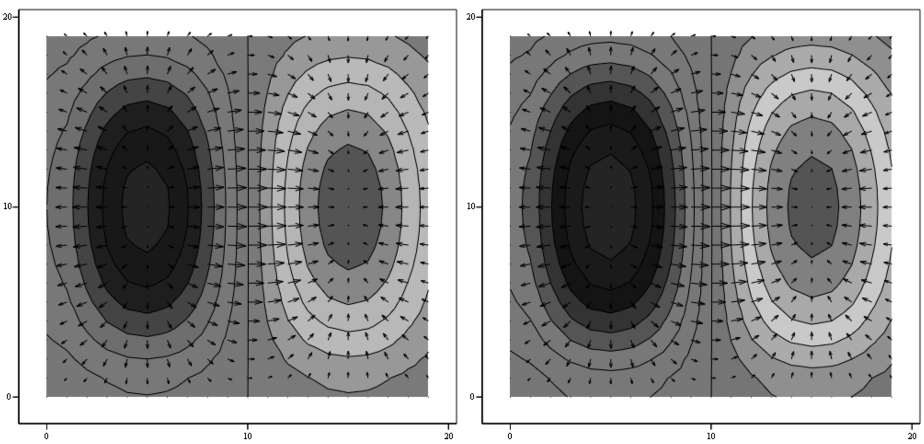

Рис. 5. Распределение концентраций жертв (слева) и хищников (справа) через 1500 у.е.

Из приведенных рисунков видно периодическое изменение концентраций популяций. Возможны другие сценарии развития этой экосистемы. Например, система выходит на стационар или наступает полное поглощение жертв хищниками, после чего хищники умирают.

Из приведенного примера видно, что разработанное программное обеспечение может быть применено для моделирования развития экосистем, состоящих из двух видов, один из которых поглощает другой.

Вывод. В данной работе рассмотрена математическая модель системы хищник-жертва. Для системы дифференциальных уравнений, описывающих данную модель, составлены дискретные аналоги, разработан комплекс программ. На рис. 1–5, иллюстрирующих полученные результаты, наблюдается характерное «запаздывание» максимальной численности хищников относительно максимальной численности жертв.

Отличительные особенности разработанных алгоритмов и выполненной на их основе программной реализации – это высокая размерность задачи, возможность привязки к реальной физической экологической системе, учет заполненности контрольных объемов в дискретных алгоритмах, – позволяют получать достаточно высокую точность даже на грубых сетках за счет более точной аппроксимации границы.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Сухинов А.И., Никитина А.В.* Математическое моделирование и экспедиционные исследования качества вод в Азовском море // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2011. – № 8 (121). – С. 62-73.
2. *Никитина А.В.* Численное решение задачи динамики токсичных водорослей в Таганрогском заливе // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2010. – № 6 (107). – С. 113-116.
3. *Никитина А.В.* Модели биологической кинетики, стабилизирующие экологическую систему таганрогского залива // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2009. – № 8 (97). – С. 130-134.
4. *Вольтерра В.* Математическая теория борьбы за существование. – М.: Наука, 1976.
5. *Чистяков А.Е.* Трехмерная модель движения водной среды в Азовском море с учетом транспорта солей и тепла // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2009. – № 8 (97). – С. 75-82.
6. *Алексеенко Е.В., Сидоренко Б.В., Колгунова О.В., Чистяков А.Е.* Сравнительный анализ классических и неклассичнских моделей гидродинамики водоемов с турбулентным обменом // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2009. – № 8 (97). – С. 6-18.
7. *Чистяков А.Е., Алексеенко Е.В., Колгунова О.В.* Вычислительные эксперименты с математическими моделями турбулентного обмена в мелководных водоемах // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2009. – № 10 (87). – С. 171-175.
8. *Чистяков А.Е.* Теоретические оценки ускорения и эффективности параллельной реализации ПТМ скорейшего спуска // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2010. – № 6 (107). – С. 237-249.
9. *Чистяков А.Е.* Об аппроксимации граничных условий трехмерной модели движения водной среды // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2010. – № 6 (107). – С. 66-77.
10. *Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Проценко Е.А.* Построение дискретной двумерной математической модели транспорта наносов // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2011. – № 8 (121). – С 32-44.
11. *Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Проценко Е.А.* Двумерная гидродинамическая модель, учитывающая динамическое перестроение геометрии дна мелководных водоемов // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2011. – № 8 (121). – С. 159-167.
12. *Сухинов А.И., Тимофеева Е.Ф., Чистяков А.Е.* Построение и исследование дискретной математической модели расчета прибрежных волновых процессов // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2011. – № 8 (121). – С. 22-32.

Статью рекомендовал к опубликованию д.ф.-м.н., профессор А.И. Жорник.

Чистяков Александр Евгеньевич – Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Южный федеральный университет»; e-mail: cheese_05@mail.ru; 347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44; тел.: 88634371606; кафедра высшей математики; доцент.

Першина Юлия Валериевна – e-mail: yuliapershina@mail.ru; тел.: 89043471778; кафедра высшей математики; студентка.

Chistyakov Alexander Evgenjevich – Federal State-Owned Autonomy Educational Establishment of Higher Vocational Education "Southern Federal University"; e-mail: cheese_05@mail.ru; 44, Nekrasovskiy, Taganrog, 347928, Russia; phone: +78634371606; the department of higher mathematics; associate professor.

Pershina Yulia Valerievna – e-mail: yuliapershina@mail.ru; phone: +79043471778; the department of higher mathematics; student.

УДК 004.3:681.518

Д.Е. Иванов

ПРИМЕНЕНИЕ ИНФОРМАЦИИ СТРУКТУРНОГО УРОВНЯ В АЛГОРИТМАХ ПОСТРОЕНИЯ ИДЕНТИФИЦИРУЮЩИХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Рассматриваются вопросы эффективного применения структурной информации об обрабатываемом цифровом устройстве при построении оценочных функций в алгоритмах идентификации таких устройств. Целью работы является построение математического аппарата конструирования оценочных функций. Первая задача работы – формализация параметров оценочных функций. Для этого вводятся понятия функций состояния и активности компонент, а также различия компонент по паре и по множеству устройств. Вторая задача – показать применение введённого математического аппарата при построении оценочных функций в практических задачах идентификации. Формализация структурной информации о поведении устройства в виде оценочной функции позволяет более точно оценивать последовательности и, следовательно, улучшить сходимость эволюционных алгоритмов.

Цифровое устройство; идентификация; эволюционный алгоритм; оценочная функция.

D.E. Ivanov

USE OF STRUCTURAL INFORMATION IN THE ALGORITHMS OF GENERATION OF IDENTIFYING SEQUENCES

The article deals with the effective implementation of structural information about the digital devices in the construction of evaluation functions in the algorithms of generation of identifying sequences. The aim is to construct a mathematical apparatus for the building of evaluation functions. The first objective is the formalization of the parameters of evaluation functions. For this purpose the functions of the achieved component value, component activity and components difference are introduced. The second objective - to show the application of the introduced mathematical formalism in the construction of evaluation functions in practical problems of identification. The formalization of the structural information about the behavior of the device under test allows more accurately assess the sequences, and hence to improve the convergence of evolutionary algorithms.

Digital device; identification; evolutionary algorithm; evaluation function.

Введение. Парадигма эволюционных вычислений проникла в техническую диагностику [1–3]. Это выразилось в том, что решение многих задач синтеза идентифицирующих последовательностей (ИдП) было заменено на применение итеративной задачи анализа, что позволяет производить обработку больших