

5. *Widrow B., Walach E. Adaptive Inverse Control // A Signal Processing Approach, Wiley, Hoboken, NJ, 2008.*
6. *Гудкова Н.В. Приложение принципов адаптивного моделирования к задачам управления динамическими объектами типа «черный ящик» // Современная электроника. – 2012. – № 8.*

Статью рекомендовал к опубликованию д.т.н., профессор Р.А. Нейдорф.

**Гудкова Наталья Васильевна** – Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Южный федеральный университет»; e-mail: tala\_gud@gambler.ru; 347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44; тел.: 88634371689; кафедра систем автоматического управления; к.т.н.; доцент.

**Бесклубова Ксения Валериевна** – e-mail: kbesklubova@mail.ru; кафедра систем автоматического управления; магистрант.

**Gudkova Natalya Vasilyevna** – Federal State-Owned Autonomy Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”; e-mail: tala\_gud@rambler.ru; 44, Nekrasovskiy, Taganrog, 347928, Russia; phone: +78634371689; the department of automatic control systems; cand. of eng. sc.; associate professor.

**Besklubova Ksenia Valeryevna** – e-mail: kbesklubova@mail.ru; the department of automatic control systems; magister.

УДК 681.51.01

**А.В. Семенов, А.Р. Гайдук**

### **МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ ЖЕЛАЕМЫХ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ С ВЫСОКИМ ПОРЯДКОМ АСТАТИЗМА\***

*Предложен метод построения желаемых передаточных функций дискретных систем с высоким порядком астатизма на основе стандартных передаточных функций непрерывных систем.*

*В работе приведены алгебраические условия астатизма, которым должны удовлетворять коэффициенты числителя и знаменателя передаточных функций дискретных систем. На основе этих условий разработан алгоритм модификации передаточных функций дискретных систем-прототипов для достижения требуемого порядка астатизма путем изменения коэффициентов её числителя.*

*Приведен численный пример построения передаточной функции дискретной системы со вторым порядком астатизма, который показывает эффективность предлагаемого метода.*

*Астатизм; высокий порядок астатизма; алгебраические условия астатизма; дискретная система; передаточная функция.*

**A.V. Semenov, A.R. Gaiduk**

### **METHOD OF GENERATION OF DESIRED TRANSFER FUNCTION OF DISCRETE SYSTEMS WITH HIGH-ORDER ASTATICISM**

*In the paper a method of discrete systems with high-order generation based on standard transfer functions of continuous systems is suggested.*

*Algebraic astaticism conditions imposed on the coefficients of the numerator and denominator of the transfer functions of discrete systems are showed. Based on algebraic terms of astaticism an algorithm of modification transfer functions of discrete systems prototypes to achieve the desired astaticism order by changing the coefficients of the numerator of its transfer function is obtained.*

\* Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 12-08-90050-Бел\_а).

*A numerical example of generation transfer function of a discrete system with second-order astaticism, which shows the effectiveness of the proposed method, is showed.*

*Astaticism; high order astaticism; astaticism algebraic conditions; discrete systems; transfer function.*

**Введение.** При проектировании мехатронных систем управления широкое распространение нашли системы управления с астатизмом первого порядка. Астатические системы управления с более высоким порядком применяются реже, но не потому, что они не нужны, а потому, что с применением управления по отклонению очень трудно обеспечить устойчивость.

В тоже время существуют объекты управления, для которых желательно обеспечить управление с астатизмом второго, третьего и более высоких порядков [1, 2, 3]. Особенно актуальной является задача синтеза цифровых регуляторов, обеспечивающих высокий порядок астатизма следящих систем.

При синтезе астатических непрерывных систем управления широкое применение нашли стандартные передаточные функции (ПФ) для формирования желаемых ПФ проектируемых систем [1, 2, 4]. Это очень удобно, так как выбор стандартных ПФ можно проводить по требуемым в задании на проектирование показателям качества, в том числе и порядкам астатизма к задающему и возмущающему воздействиям, определяющим ошибку системы управления. В тоже время, стандартные дискретные ПФ в литературе отсутствуют.

В работе ставится задача разработки метода построения желаемых ПФ дискретных систем (ДС) с малым перерегулированием и колебательностью переходного процесса, на основе стандартных ПФ непрерывных систем управления. Метод позволит конструировать желаемые ПФ ДС, на основе которых с помощью аналитического метода синтеза возможно проектирование физически реализуемых цифровых регуляторов для управления объектами как с левыми, так и с правыми нулями по управлению [4, 5, 6].

**Описание метода построения желаемых ПФ ДС.** Примем, что ПФ ДС в замкнутом состоянии  $W_{yg}(z)$  по задающему воздействию  $g(k)$  описывается следующим выражением [1, 4]:

$$W_{yg}(z) = \frac{\eta_0 + \eta_1 z + \eta_2 z^2 + \dots + \eta_{m-1} z^{m-1} + \eta_m z^m}{\delta_0 + \delta_1 z + \delta_2 z^2 + \dots + \delta_{n-1} z^{n-1} + \delta_n z^n}. \quad (1)$$

Чтобы проектируемая система обладала астатизмом  $v_g^*$ -го порядка по отношению к задающему воздействию  $g(k)$ , необходимо, чтобы ошибка, вызванная полиномиальным воздействием  $g(k)$  степени  $v_g^* - 1$  или меньше, была равна нулю, а ошибка, вызванная полиномиальным воздействием  $g(k)$  степени  $v_g^*$  не была равна нулю, но была постоянной [4]. Полученные в работе [7] алгебраические условия астатизма  $v_g^*$ -го порядка для ДС с известной ПФ  $W_{yg}(z)$  (1) имеют вид

$$\sum_{i=v-1}^m \binom{i}{v-1} \eta_i = \sum_{i=v-1}^n \binom{i}{v-1} \delta_i, \quad v = \overline{1, v_g^*}; \quad \sum_{i=v_g^*}^m \binom{i}{v_g^*} \eta_i \neq \sum_{i=v_g^*}^n \binom{i}{v_g^*} \delta_i, \quad (2)$$

где  $\binom{i}{v-1}$  – весовые множители коэффициентов числителя и знаменателя ПФ ДС в замкнутом состоянии вида (1), определяемыми по формуле биномиальных коэффициентов при  $k = v - 1$ :  $\binom{i}{k} = i! / k!(i - k)!$ .

Подчеркнем, что число равенств типа (2) равно порядку астатизма  $v_g^*$ . Выражения (2) можно использовать и для случая  $m = n$ ; при этом  $m, n \geq v_g^*$ . Заметим, что два первых условия (2) при  $v = 1, 2$  соответствуют приведенным в [1, 4].

В том случае, если ДС с ПФ вида (1) не имеет заданного высокого порядка астатизма  $v_g^*$ , то для достижения этого необходимо изменить коэффициенты ПФ так, чтобы выполнялись условия (2). Подчеркнем, что коэффициенты знаменателя ПФ определяют устойчивость, а коэффициенты числителя – показатели качества такие, как время регулирования и перерегулирование замкнутой ДС. Поэтому в данной работе рекомендуется изменять коэффициенты числителя ПФ вида (1).

Как видно из равенств (2), количество коэффициентов числителя и знаменателя ПФ вида (1) больше, чем количество равенств. Примем, например, что в выражениях (2) коэффициенты знаменателя  $\delta_i$  и числителя  $\eta_k$ , где  $k \in \overline{v_g^*, m}$  известны и не будут подлежать изменению. Тогда, решая алгебраическую систему уравнений (2) относительно  $v_g^*$  неизвестных коэффициентов числителя  $\eta_k$ , где  $k \in \overline{0, (v_g^* - 1)}$  и учитывая, что  $\binom{i}{i} = 1$ , получим следующие выражения для определения численных значений неизвестных коэффициентов числителя:

$$\eta_k = \sum_{i=k}^n \binom{i}{k} \delta_i - \sum_{i=k+1}^m \binom{i}{k} \eta_i; \quad k \in \overline{(v_g^* - 1), 0}. \quad (3)$$

Подчеркнем, что число равенств типа (3), как и число неизвестных коэффициентов числителя ПФ, равно порядку астатизма  $v_g^*$ . Вначале находим численное значение коэффициента числителя ПФ вида (1)  $\eta_k$  с индексом  $k = (v_g^* - 1)$ , затем  $k = (v_g^* - 2)$  и т.д. до индекса  $k = 0$ .

Отметим, что полученное выражение (3) является не единственным соотношением, т.е. могут изменяться не только свободные коэффициенты числителя, но и любые другие.

Таким образом, используя изложенный метод, можно получить желаемую ПФ ДС с заданными показателями качества, в том числе и заданным порядком астатизма  $v_g^*$ . Для этого предлагается следующий алгоритм.

1. Учитывая, что изменения коэффициентов числителя могут привести к повышению перерегулирования и времени регулирования, выбрать из таблиц [4] коэффициенты  $\Delta_i, i = \overline{0, n}$  стандартной ПФ непрерывной системы  $n$ -го порядка с астатизмом  $v_g = v_g^*$ , но с меньшим перерегулированием, а безразмерный временной масштабный коэффициент рассчитать по следующей формуле:

$$\omega_0 = t_{p.n.} / (K_{зап} \cdot t_p^*), \quad (4)$$

где  $t_{p.n.}$  – нормированное время регулирования стандартной ПФ, выбираемое также по таблицам стандартных ПФ [4];  $K_{зап}$  – коэффициент запаса, принимаемый  $K_{зап} = 1$  при  $v_g^* = 1$  и  $K_{зап} > 1$  при  $v_g^* > 1$ .

Затем вычислить коэффициенты знаменателя непрерывной ПФ по формуле

$$\delta_i = \Delta_i \cdot \omega_0^{n-i}, \quad i = \overline{0, n}, \quad (5)$$

и записать передаточную функцию вспомогательной непрерывной системы (непрерывного прототипа)  $\tilde{W}_{yg}(p)$ .

2. Выполнив z-преобразование непрерывного прототипа с учетом экстраполятора нулевого порядка [4], получить передаточную функцию соответствующей ДС (дискретного прототипа)  $\tilde{W}_{yg}^*(z)$ .

3. Если  $v_g^* = 1$ , то п. 3 не выполняется. Если  $v_g^* > 1$ , то вычислить, например, по соотношениям (3), новые значения коэффициентов числителя ПФ дискретного прототипа так, чтобы выполнялись условия заданного порядка астатизма.

4. Путем моделирования на ЭВМ проверить качество полученной в п.3 ДС. Необходимость проверки вызвана тем, что в результате изменения коэффициентов ПФ показатели качества соответствующей ДС могут ухудшиться. Если это произошло, то необходимо вернуться к выполнению п. 3, вычислив по-другому коэффициенты числителя.

**Пример.** Найти желаемую ПФ дискретной системы 5-го порядка со вторым порядком астатизма, т.е.  $n = 5, v_g^* = 2$ ; период дискретизации  $T = 0,1$  с; перерегулирование  $\sigma^* \leq 15\%$ ; время переходного процесса  $t_p^* \leq 3,5$  с.

**Шаг 1.** Выбираем из таблиц [4] стандартную ПФ с  $n = 5, v_g = 2$ ,  $\sigma = 10\% \leq 15\%$ , коэффициенты которой равны:  $\Delta_i, i = \overline{0, n}$  ( $\Delta_0 = 1, \Delta_1 = 18, \Delta_2 = 38, \Delta_3 = 29, \Delta_4 = 9, \Delta_5 = 1$ );  $t_{p.n.} = 18$  с. По (4) при  $K_{ЗАП} = 1,13$  получаем  $\omega_0 = 6$ . Тогда, с учетом (5), ПФ непрерывного прототипа имеет вид:

$$\tilde{W}_{yg}(p) = \frac{23410p + 7810}{p^5 + 54,05p^4 + 1046p^3 + 8230p^2 + 23410p + 7810}. \quad (6)$$

**Шаг 2.** Выполняя  $Z_T$ -преобразование [4] в (6) с помощью функции c2d системы MATLAB при  $T = 0,1$  с, получим ПФ дискретного прототипа:

$$\tilde{W}_{yg}^*(z) = \frac{0,03480z^4 + 0,1066z^3 - 0,08805z^2 - 0,04465z - 0,001336}{z^5 - 2,1946z^4 + 1,6868z^3 - 0,5597z^2 + 0,07933z - 0,004495}. \quad (7)$$

**Шаг 3.** Из выражения (7) видно, что  $m = 4$ , коэффициенты знаменателя имеют значения:  $\delta_0 = -0,004495, \delta_1 = 0,07933, \delta_2 = -0,5597, \delta_3 = 1,6868, \delta_4 = -2,1946, \delta_5 = 1$ ; коэффициенты числителя имеют значения:  $\eta_0 = -0,001336, \eta_1 = -0,04465, \eta_2 = -0,08805, \eta_3 = 0,1066, \eta_4 = 0,03480$ . С учетом (2), проверим, удовлетворяет ли ПФ дискретного прототипа (7) требованиям 2-го порядка астатизма. При  $v_g^* = 2, n = 5, m = 4$  условия астатизма (2) имеют вид

$$\begin{aligned} \eta_0 + \eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + \eta_4 &= \delta_0 + \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4 + \delta_5; \\ \eta_1 + 2\eta_2 + 3\eta_3 + 4\eta_4 &= \delta_1 + 2\delta_2 + 3\delta_3 + 4\delta_4 + 5\delta_5; \\ \eta_2 + 3\eta_3 + 6\eta_4 &\neq \delta_2 + 3\delta_3 + 6\delta_4 + 10\delta_5. \end{aligned} \quad (8)$$

Подставив численные значения коэффициентов ПФ дискретного прототипа (7) в выражение (8), получаем, что  $0,0074 = 0,0074$ ;  $0,2419 \neq 0,2382$ , т.е. второе условие астатизма не выполняется, как и третье ( $1,3330 \neq 0,4406$ ).

С использованием выражения (3) вычислим новые значения коэффициентов числителя ПФ. Для  $v_g^* = 2, k = 1,0; n = 5, m = 4$  получим:

$$\eta_1^* = \sum_{i=1}^5 i\delta_i - \sum_{i=2}^4 i\eta_i = -0,04098; \eta_0^* = \sum_{i=0}^5 \delta_i - \sum_{i=1}^4 \eta_i = -0,005009. \quad (9)$$

Проверив условие (8) с найденными по (9) значениями коэффициентов числителя ПФ (7), видим, что оба условия астатизма выполняются, а третье по-прежнему не выполняется, что и доказывает заданный (второй) порядок астатизма синтезируемой ДС. Таким образом, желаемая ПФ ДС будет иметь вид

$$W_{yg}^*(z) = \frac{0,03480z^4 + 0,1066z^3 - 0,08805z^2 - 0,04098z - 0,005009}{z^5 - 2,195z^4 + 1,687z^3 - 0,5597z^2 + 0,07933z - 0,004495}. \quad (10)$$

**Шаг 4.** Результаты моделирования непрерывного прототипа (6), дискретного прототипа (7), желаемой ПФ ДС (10) приведены на рис. 1. Рассогласования (а, б, в) и реакции (г, д, е) моделируемых систем определялись при различных входных воздействиях: типа «скачок» (а, г), линейном (б, д) и квадратичном (в, е).

Как видно на рис. 1,а, при входном воздействии типа «скачок» все три системы имеют нулевую ошибку, что говорит о выполнении условия 1-го порядка астатизма. Это соответствует выполнению первого условия (8).

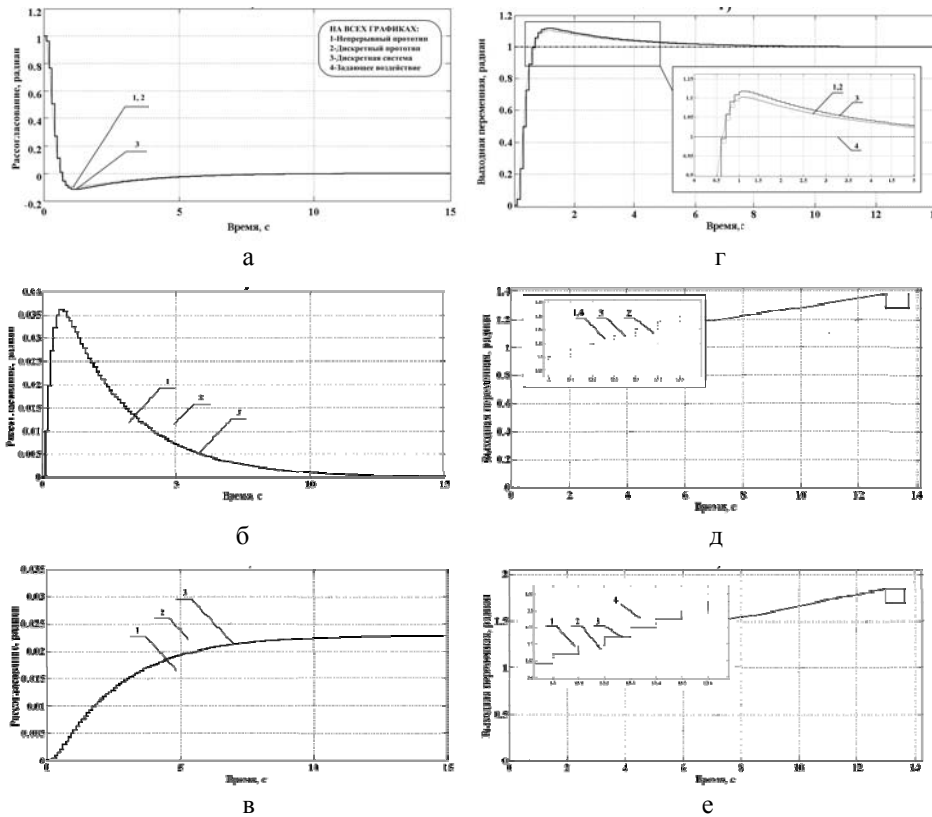


Рис. 1. Рассогласования и реакции моделируемых систем

На рис. 1,б видно, что при линейном воздействии непрерывная система (график 1) имеет нулевую скоростную ошибку, что подтверждает то, что непрерывный прототип обладает астатизмом 2-го порядка. Дискретный прототип (график 2) имеет постоянную скоростную ошибку, следовательно, дискретный прототип не имеет 2-го порядка астатизма.

Синтезируемая дискретная система с ПФ (10) (рис. 1,б, график 3) имеет, как и непрерывный прототип, нулевую скоростную ошибку, т.е. обладает вторым порядком астатизма.

Как видно на рис. 1,в, при квадратичном воздействии ошибка непрерывного прототипа и синтезируемой ДС постоянна, т.е. эти системы имеют 2-й порядок астатизма, а ошибка дискретного прототипа – расходящаяся, т.е. он не имеет 2-го порядка астатизма.

По переходной функции (рис. 1,г) видно, что, по сравнению с непрерывным прототипом ( $\sigma = 10\%$ ,  $t_p = 3,1\text{ с}$ ), у синтезированной ДС незначительно увеличены перерегулирование ( $\sigma^* = 12\%$ ) и время регулирования ( $t_p^* = 3,5\text{ с}$ ), что является «платой» за достижение заданного порядка астатизма. При этом  $t_p^*/t_p = 1,13$ , что соответствует принятому при синтезе значению  $K_{ЗАП}$ . Перерегулирование и время регулирования синтезированной ДС не превышают заданных значений.

**Заключение.** Разработанный метод позволяет получать желаемые ПФ ДС на основе стандартных ПФ непрерывных систем. При этом синтезируемые дискретные системы обладают такими желаемыми показателями качества, как порядок астатизма по задающему воздействию, перерегулирование и время регулирования.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Красовский А.А., Поспелов Г.С. Основы автоматики и технической кибернетики. – М.–Л., Госэнергоиздат, 1962.
2. Геложе Ю.А., Семенов А.В., Клименко П.П. Наведение телескопов астронавигационных систем: Учебное пособие по дисциплине «Радиосистемы управления» (Курсовое проектирование и лабораторные исследования). – Таганрог: Изд-во ТТИ ЮФУ, 2010. – 65 с.
3. Семенов А.В., Геложе Ю.А., Макаруч А.В. Электромеханическая следящая система с асинхронным исполнительным электродвигателем // Материалы Всероссийской научной конференции «Теоретические и методические проблемы эффективного функционирования радиотехнических систем» («Системотехника-2011»). – Таганрог: Изд-во ТТИ ЮФУ, 2011. – С. 26-33.
4. Гайдук А.Р. Теория автоматического управления: Учебник. – М.: Высш. шк., 2010. – 415 с.
5. Семенов А.В., Гайдук А.Р. Синтез дискретных неминимально-фазовых следящих систем. Известия ЮФУ. Технические науки. – 2012. – № 2 (127). – С. 53-59.
6. Семенов А.В. Синтез цифрового двумерного устройства управления электромеханической следящей системы. 4-я Всероссийская мультиконференция по проблемам управления // Материалы 4-й Всероссийской мультиконференции. Т. 2. – Таганрог: Изд-во ТТИ ЮФУ, 2011. – С. 136-139.
7. Семенов А.В., Гайдук А.Р. Алгебраические условия астатизма дискретных систем. Радиоэлектронные средства передачи и приёма сигналов и визуализации информации // Материалы Второй Всероссийской конференции. – М.–Таганрог: Изд-во ТТИ ЮФУ, 2012. – С. 81-84.

Статью рекомендовал к опубликованию д.т.н., профессор Р.А. Нейдорф.

**Гайдук Анатолий Романович** – Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Южный федеральный университет»; e-mail: gaiduk\_2003@mail.ru; 347904, г. Таганрог, ул. Слесарная, 26, кв. 2; тел.: 88634626287; кафедра систем автоматического управления; д.т.н.; профессор.

**Семенов Александр Валерьевич** – e-mail: semenov-av@rambler.ru; 347922, г. Таганрог, ул. Шевченко, 2; тел.: 88634312350; кафедра систем автоматического управления; аспирант.

**Gaiduk Anatoly Romanovich** – Federal State-Owned Autonomy Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”; e-mail: gaiduk\_2003@mail.ru; 26, Slesarnaya street, app. 2, Taganrog, 347904, Russia; phone: +78634626287; the department of automatic control systems; dr. of eng. sc.; professor.

**Semenov Alexander Valerevich** – e-mail: semenov-av@rambler.ru; 2, Shevchenko street, Taganrog, 347922, Russia; phone: +78634312350; the department of automatic control systems; post-graduate student.