УДК 517.518.85:517.443

Г.С. Ханян

ТЕОРЕМА ОТСЧЕТОВ ДЛЯ СИГНАЛА КОНЕЧНОЙ ДЛИТЕЛЬНОСТИ С НЕОБЯЗАТЕЛЬНО НУЛЕВЫМ ИНДЕКСОМ ЧАСТОТНОЙ ПОЛОСЫ

Рассматривается теорема отсчетов во временной области применительно к сигналам ограниченной длительности в полосе частот с верхней и нижней (необязательно нулевой) границами среза. Ставится цель найти более широкие достаточные условия справедливости теоремы отсчетов для финитных процессов и, тем самым, расширить сферу приложений теоремы в цифровой обработке сигналов. Проводится доказательство теоремы для базового сигнала – фрагмента гармонического колебания, и на основе принципа суперпозиции делается обобщение на полигармонический процесс с частотами гармоник, определяемыми в процессе исследования.

Теорема отсчетов; частота дискретизации; индекс полосы частот; длина цифровой реализации; гармонический сигнал; интерполяционная формула; дельта-функция.

G.S. Khanyan

SAMPLING THEOREM FOR FINITE DURATION SIGNAL WITH A NON-OBLIGATORY ZERO INDEX OF THE FREQUENCY BAND

The sampling theorem is considered in time domain with respect to signals of limited duration in a frequency band with upper and lower (non-obligatory zero) cutoff boundaries. The aim is to find wider sufficient conditions of sampling theorem validity for finite processes and thereby to broaden application sphere of this theorem in digital signal processing. A proof of the theorem is conducted for the base signal – a time fragment of a harmonic oscillation, – and on the superposition principle basis a generalization is made to polyharmonic process with harmonic frequencies determined in the course of the study.

Sampling theorem; sampling frequency; index of frequency band; length of digital realization; harmonic signal; interpolation formula; delta-function.

Введение. Одним из фундаментальных результатов, установленных в теории информации, является теорема отсчетов Уиттекера–Котельникова-Шеннона, в которой утверждается о возможности и способе полного восстановления аналогового сигнала $s(t)$ по его цифровой реализации $s(t_n)$, полученной с частотой дискретизации F, если спектр сигнала ограничен полосой частот $0 \le f < F/2$.

В данной, классической формулировке [1] теоремы сигнал восстанавливается преобразованием

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(t_n) \frac{\sin \pi F(t - t_n)}{\pi F(t - t_n)}; \quad t_n = n / F \cdot \tag{1}$$

Обобщение теоремы на случай полосовой фильтрации выглядит так:

$$s'(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(t_n) \frac{\sin \pi(G+1)F(t-t_n) - \sin \pi GF(t-t_n)}{\pi F(t-t_n)}, \tag{2}$$

и рассматривается в [2], где для индекса полосы частот G указаны границы

$$F_{low} = ([G+1/2] + |G - [G+1/2]|)F/2, \quad F_{up} = ([G+1/2] + 1 - |G - [G+1/2]|)F/2 \tag{3}$$

диапазона частот протекания процесса

$$F_{low} < f < F_{up}, \tag{4}$$

в котором преобразование (2) тождественное:

$$s'(t) = s(t). \tag{5}$$

Формулировка (2) теоремы с целочисленным индексом G рассматривалась, например, в [3]. В этом случае из (3) следует, что границами диапазона являются $F_{low} = GF/2$, $F_{up} = (G+1)F/2$, и индекс $G = 0, 1, 2, ...$ нумерует в частотной области последовательно расположенные полосы (4), в которых выполняется утверждение теоремы (5). Классической формулировке (1) соответствует при этом индекс $G = 0$ с присоединением точки $f = 0$ – частоты постоянной составляющей процесса.

Постановка задачи. Теорема отсчетов приобретает практическую ценность, когда преобразование (2) имеет лишь конечное число слагаемых. Тогда оно может, в математическом обеспечении той или иной измерительно-вычислительной системы, служить инструментом интерполяции ограниченного числа данных, получаемых при проведении различного рода испытаний и тестов – электронных устройств, приборов, аппаратуры, деталей и узлов машин, метеонаблюдений и т.д.

Ясно, что при таком ограничении временной области в ядре преобразования (2) наряду с параметрами G и F должен фигурировать третий параметр – число N интерполируемых отсчетов $s(t_{n.})$ сигнала $s(t)$, называемое также длиной цифровой реализации сигнала. При нулевом индексе G вид такого преобразования известен:

$$s'(t) = \sum_{n=0}^{N-1} s(t_n) \frac{\sin \pi F(t - t_n)}{N \sin \pi F(t - t_n)/N}. \tag{6}$$

Так, в работах [4], [5] утверждение (5) в формулировке (6) теоремы доказывается для периодической функции $s(t) = s(t+T)$, но только с нечетным числом отсчетов $N = FT$, укладывающихся на протяжении периода T.

В настоящей работе ставится цель найти более широкие достаточные условия справедливости теоремы отсчетов для финитных процессов – с необязательно нулевым индексом полосы частот. Тем самым будет расширена сфера приложений теоремы в цифровой обработке сигналов, например, в задаче интерполяции поля давления при малом (несильно возмущающем поток) и технически жестко обусловленном числе датчиков на входе в авиационный двигатель.

Метод исследования. При переходе от (1) к (6) ядро преобразования – функция $\mathrm{sinc}(x)=(\sin x)/x$ заменяется ее «неполным циклическим» аналогом

$$\mathrm{sinc}_N(x) = \frac{\sin x}{N \sin x/N} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \cos\frac{2k - N + 1}{N} x, \tag{7}$$

получаемым суммированием N косинусоид и стремящимся к $\mathrm{sinc}(x)$ при $N \to \infty$.

Руководствуясь этой идеей, модификацию преобразования (2) для сигнала ограниченной длительности с произвольным индексом G представим в виде

$$s'(t) = \sum_{n=0}^{N-1} s(t_n) \frac{\sin \pi(G+1)F(t - t_n) - \sin \pi GF(t - t_n)}{N \sin \pi F(t - t_n)/N}; \quad t_n = t_0 + n/F. \tag{8}$$

Формулировка (8) теоремы отличается от (1), (2) и (6) еще и тем, что дискретизация в общем случае проводится со смещением: начальный момент времени t_0 необязательно равен нулю или кратен интервалу дискретизации $1/F$. На практике такая ситуация может иметь место, например, при аналого-цифровом преобразовании нескольких сигналов с применением мультиплексирования.

В качестве базового объекта преобразования примем гармоническое колебание с амплитудой a, частотой f, начальной фазой φ и длительностью T:

$$s(t) = a\cos(2\pi f t + \varphi); \quad a > 0, \quad f \ge 0, \quad -\pi < \varphi \le \pi; \quad t_0 \le t < t_0 + T. \tag{9}$$

Как только будут установлены параметры сигнала (9) и преобразования (8), отвечающие утверждению (5) теоремы, более сложный тип сигналов можно будет порождать суперпозицией тригонометрических функций с такими параметрами.

Доказательство теоремы. Дискретизация сигнала (9) с частотой F и подстановка цифровой реализации $s(t_n)$ в правую часть преобразования (8) дает, с использованием формулы выражения разности синусов через удвоенное произведение синуса полуразности на косинус полусуммы аргументов:

$$s'(t) = a\sum_{n=0}^{N-1}\cos(2\pi f t_n + \varphi)\,\mathrm{sinc}_{N/2}\,\pi F\frac{t-t_n}{2}\cos\pi(2G+1)F\frac{t-t_n}{2}. \qquad (10)$$

Вычислить сумму (10) можно, воспользовавшись разложением функции (7) с последующим представлением косинусов в экспоненциальной форме и применением формулы суммирования геометрической прогрессии:

$$\sum_{n=0}^{N-1} q^n = \begin{cases} \dfrac{1-q^N}{1-q}, & q \ne e^{i2\pi JK/N} \\ N\,\delta_{K,IN}, & q = e^{i2\pi JK/N} \end{cases} \qquad (11)$$

$$J = \pm 1;\quad K = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots;\quad I = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

где δ – символ Кронекера, J – знак, K – заданное, I – неопределенное целое число в дискретной дельта-функции. Но тогда мы вынуждены сделать предположение, что при ненулевом индексе G число отсчетов N – четное (число слагаемых $N/2$ – целое). В случае $G = 0$ число отсчетов N может быть любым натуральным числом, поскольку оно, в соответствии с (6), совпадет с числом слагаемых разложения (7).

Подставив правую часть (7) в (10) с заменой в этой формуле N на $N/2$, имеем:

$$s'(t) = \frac{a}{4N}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{j=\pm1} e^{ij(2\pi f t_n+\varphi)} \sum_{k=0}^{N/2-1}\sum_{J=\pm1} e^{iJ(2k-N/2+1)\pi F(t-t_n)/N} \sum_{L=\pm1} e^{iL(G+1/2)\pi F(t-t_n)}. \qquad (12)$$

Поменяв местами индексы суммирования n и k, расположив их правее индексов суммирования j, J, L слагаемых формулы Эйлера и введя обозначение, записываем

$$K = jJ\,fT - JLNG/2 - JLN/4 + N/4 - 1/2, \qquad (13)$$

записываем преобразование (12) в виде, в котором слева (в комплексной форме) фигурирует исходный сигнал $s(t)$ вместо его цифровой реализации $s(t_n)$:

$$s'(t) = \frac{a}{4}\sum_{j=\pm1} e^{ij(2\pi f t+\varphi)} \sum_{J=\pm1}\sum_{L=\pm1}\sum_{k=0}^{N/2-1} e^{i2\pi JF(t-t_0)(k-K)/N}\left(\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} e^{i2\pi J(K-k)n/N}\right). \qquad (14)$$

Ясно теперь, что дальнейшее упрощение возможно, если крайняя справа сумма подпадет под второй случай формулы (11), т.е. будет дискретной дельта-функцией. Но тогда $K - k$ должно быть целым числом, или, что то же самое, целым должен быть параметр K. Приняв это предположение, представляем (14) в виде

$$s'(t) = \frac{a}{4}\sum_{j=\pm1} e^{ij(2\pi f t+\varphi)} \sum_{J=\pm1}\sum_{L=\pm1}\sum_{k=0}^{N/2-1} e^{i2\pi JF(t-t_0)(k-K)/N}\,\delta_{K-k,IN}. \qquad (15)$$

В силу определяющего свойства дельта-функции в сумме по k остается всего одно слагаемое, и преобразование сводится лишь к сумме по индексам j, J, L:

$$s'_I(t) = \frac{a}{4}\sum_{j=\pm1}\sum_{J=\pm1}\sum_{L=\pm1} e^{ij(2\pi ft+\varphi)-iJ2\pi IF(t-t_0)}\,\Delta_{0\le k=K-IN\le N/2-1};\quad I = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \qquad (16)$$

Издержкой столь радикального упрощения является то, что результат преобразования $s'(t)$ становится многозначной функцией – с ветвями, нумеруемыми отмеченным в имени функции индексом I. Здесь и далее через Δ_B обозначена логическая дельта-функция от булевой переменной B, равная единице при истинности этой переменной и нулю при ее ложности (символ Кронекера представляет собой частный случай этой функции: $\delta_{k,n} = \Delta_{k=n}$). В формуле (16) в роли B выступает неравенство, указывающее множество значений индекса k в (15).

Подставив в (16) K из (13), получаем, наконец, результат преобразования:

$$s_I'(t)\Big|_{N\geq 2, G>0} = \frac{a}{2}\sum_{J=\pm 1}\Delta_{(GN+1)/2\leq|fT-IJN|\leq(GN+N-1)/2}\cos(2\pi(f-IJF)t+(\varphi+2\pi IJFt_0)), \quad (17)$$

означающий, что исходное колебание расщепляется на две компоненты с частотами $f \pm IF$ и фазами $\varphi \mp 2\pi IFt_0$.

Проанализируем теперь условия целочисленности параметра K. Представим безразмерную частоту сигнала как сумму целого числа m и правильной дроби μ:

$$fT = m + \mu; \quad m = 0, 1, 2, ...; \quad 0 \leq \mu < 1. \quad (18)$$

Подставим (18) в (13) и напишем решение полученного уравнения:

$$\mu = \{-m + jJK + jLNG/2 + jLN/4 - jJN/4 + jJ/2\}. \quad (19)$$

Представим NG в виде суммы целой (четной или нечетной) и дробной частей:

$$NG = 2R + r + \rho; \quad R = [NG/2], \quad r = [NG]\,\mathrm{mod}\,2, \quad \rho = \{NG\}. \quad (20)$$

Подстановка (20) в (19) и отбрасывание заведомо целочисленных термов из фигурных скобок дает, путем обобщения всех частных случаев комбинаций j, J, L:

$$\mu = \frac{1 - r + jL\rho + (1 - jL)r\,\mathrm{sgn}\,\rho}{2}. \quad (21)$$

Дробная часть μ безразмерной частоты fT, как заданный параметр сигнала, не должен зависеть от комбинаций индексов суммирования j и L в (21), что, очевидно, возможно только при ρ=0, т.е. когда NG – целое число. Таким образом, μ – целое или полуцелое число в зависимости от нечетности или четности NG:

$$\mu = (1 - (NG)\,\mathrm{mod}\,2)/2 = \{(NG-1)/2\}; \quad \{N/2\} = 0; \quad \{NG\} = 0; \quad G > 0. \quad (22)$$

Это и есть условия целочисленности параметра K – достаточные условия представления результата преобразования сигнала в виде (17).

Рассмотрим теперь случай $G = 0$, руководствуясь той же методикой анализа.

В этом случае вместо (10) мы имеем дело с преобразованием

$$s'(t) = \frac{a}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{N-1}\cos(2\pi f t_n + \varphi)\cos\frac{2k - N + 1}{N}\pi F(t - t_n), \quad (23)$$

которое в комплексной форме выглядит следующим образом:

$$s'(t) = \frac{a}{4}\sum_{j=\pm 1}e^{ij(2\pi ft+\varphi)}\sum_{J=\pm 1}\sum_{k=0}^{N-1}e^{i2\pi JF(t-t_0)(k-K)/N}\left(\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}e^{i2\pi J(K-k)n/N}\right); \quad K = jJfT + \frac{N-1}{2}. \quad (24)$$

Требование целочисленности K приводит вместо (19)-(22) к соотношениям

$$\mu = \{-m + jJK - jJN/2 + jJ/2\} = \{jJ/2 - jJN/2\} = \{(N-1)/2\}; \quad G = 0, \quad (25)$$

а преобразование – к многозначной функции, I-я ветвь которой задается формулой

$$s_I'(t)\Big|_{G=0} = \frac{a}{2}\sum_{J=\pm 1}\Delta_{|fT-IJN|\leq(N-1)/2}\cos(2\pi(f - IJF)t + (\varphi + 2\pi IJFt_0)). \quad (26)$$

Параметр μ и на этот раз оказывается целым или полуцелым числом, что позволяет обобщить условия (22) и (25) на все случаи $G\geq 0$:

$$\{NG\} = 0, \quad \{N/2\}G = 0, \quad \mu = \{(NG + N - 1)/2\}. \quad (27)$$

Далее, поскольку μ фиксировано, то смежные разрешенные безразмерные частоты отличаются на единицу, что позволяет обобщить формулы (17) и (26):

$$s_I'(t) = \frac{a}{2}\sum_{J=\pm 1}D_{I,J}\cos(2\pi(f - IJF)t + (\varphi + 2\pi IJFt_0)); \quad D_{I,J} = \Delta_{(GN-1)/2<|fT-IJN|\leq(GN+N-1)/2}. \quad (28)$$

Ясно, что за восстановление (5) сигнала может отвечать только нулевая ветвь функции (28) при $D_{0,\pm 1}$=1, поскольку частоты и фазы компонент J=±1 при I=0 совпадают, и сумма компонент становится равной исходному сигналу (9). Однако этого недостаточно, необходимо еще, чтобы $D_{I,J}=0$ для всех $I\neq 0$ и $J=\pm 1$, иначе при любом способе суперпозиции ветвей произойдет пересечение области определения функции $D_{I,J}$ с областью определения функции $D_{0,J}$, т.е. будет иметь место явление искажения сигнала из-за наложения частот.

Анализ наложения ветвей путем решения уравнения $D_{0,J}=D_{I,J}=1$ (фактически, системы неравенств) показал, что на нулевую ветвь при нецелом G накладываются 2 из 4 компонент ветвей $I=\pm[-G]$, что определяет для теоремы (8) диапазон частот

$$F_{low}+\frac{1}{2T}-\left(\frac{F}{2}-\frac{1}{T}\left[\frac{FT}{2}\right]\right)\leq f\leq F_{up}-\frac{1}{2T} \qquad (29)$$

с параметрами F_{low} и F_{up} из (3). Границы в (29) отличаются от границ в (3) для теоремы (2) не более чем на половину спектрального разрешения $1/T$ каждая. В пределе $T\to\infty$ неравенство (29) приобретает вид (3), соответствующий сигналу бесконечной протяженности.

В силу принципа суперпозиции (линейности преобразования (8) относительно отсчетов сигнала) теорема верна для полигармонических процессов

$$s(t)=\sum_{m=P}^{Q}a_m\cos(2\pi f_m t+\varphi_m);\quad f_m=(m+\mu)/T,\quad a_m\geq 0,\quad -\pi<\varphi_m\leq\pi \qquad (30)$$

с безразмерными частотами гармоник f_mT – целыми или полуцелыми в зависимости от параметра μ из (27).

Целочисленные границы суммирования P и Q в терминах частот среза $(P+\mu)/T$ и $(Q+\mu)/T$ совпадают с границами неравенства (29) и задаются формулами:

$$\begin{cases}P=[(NG-N+1)/2]+N[\{G\}+1/2](1-\{G\})+[N/2]\\ Q=[(NG+N-1)/2]+N[\{G\}-1/2]\{G\}.\end{cases} \qquad (31)$$

Число гармоник в процессе (30) или же число разрешенных частот гармонического сигнала (9) составляет

$$M=Q-P+1=N\left|\{G\}-1/2\right|+\{N/2\}. \qquad (32)$$

Оно максимально ($M=N-[N/2]$) при целом индексе G и минимально ($M=0$) при полуцелом. Последнее означает невыполнение утверждения (5) теоремы (8), так же, как и (2). В простейшем случае ($N=1$) из (27), (30)–(32) следует, что можно по единственному отсчету восстановить лишь функцию $s(t)=a_0\cos\varphi_0$, т.е. константу.

Заключение. Сформулирована и доказана при определенных достаточных условиях теорема отсчетов для финитных полигармонических процессов с выводом аналитических формул для границ дискретного спектра частот гармоник в зависимости от индекса частотной полосы и числа интерполируемых отсчетов.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Котельников В.А.* О пропускной способности «эфира» и проволоки в электросвязи // Материалы к I Всесоюзному съезду по вопросам технической реконструкции дела связи и развития слаботочной промышленности. – М.: Всесоюзн. энергетич. комитет, 1933.
2. *Ханян Г.С.* Обобщение теоремы отсчетов на случай нецелого индекса полосы частот // Международная научно-техническая конференция к 100-летию со дня рождения В.А. Котельникова: Москва, 21-23 октября 2008 г. Тезисы докладов. – М.: Изд. дом МЭИ, 2008. – С. 35-37.
3. *Петров В.В., Усков А.С.* Информационная теория синтеза оптимальных систем контроля и управления (Непрерывные системы). – М.: Энергия, 1975. – 232 с.
4. *Linden D.A.* A Discussion of Sampling Theorems. Proc. of the IRE, July 1959. – P. 1219-1226.
5. *Brown J.L., Jr.* An RKHS Analysis of Sampling Theorems for Harmonic-Limited Signals // IEEE Trans. of Acoustics, Speech, and Signal Processing. – April 1985. – Vol. ASPP-33, № 2. – P. 437-440.

Статью рекомендовал к опубликованию д.т.н., профессор С.Г. Крутчинский.

Ханян Гамлет Сократович – Центральный институт авиационного моторостроения им. П.И. Баранова; e-mail: khanian@mail.ru; 111116, г. Москва, ул. Авиамоторная, 2; старший научный сотрудник; к.т.н.

Khanyan Gamlet Sokratovich – Central Institute of Aviation Motors; e-mail: khanian@mail.ru; 2, Aviamotornaya street, Moscow, 111116, Russia; principal researcher; cand. of eng. sc.

УДК 621.372.54

В.П. Тепин, А.В. Тепин

СИНТЕЗ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ ПЕРЕСТРАИВАЕМЫХ АНАЛОГОВЫХ И ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРОВ

Рассматриваются произвольный аналоговый фильтр с управляемой частотой настройки при неизменной форме частотной характеристики, а также эквивалентный ему рекурсивный цифровой фильтр, управляемый двумя способами: прямым – изменением частоты дискретизации, а также косвенным – изменением весовых коэффициентов. Предлагаются методы синтеза таких фильтров, основанные на частотном масштабировании и билинейном z-преобразовании аргумента передаточной функции базового аналогового или цифрового фильтра. Эти методы гарантируют эквивалентность не только частотных характеристик, но также и законов перестройки фильтров рассматриваемого класса.

Перестраиваемый фильтр; синтез передаточной функции; прямой и косвенный способы перестройки; частотное масштабирование; закон перестройки.

V.P. Tepin, A.V. Tepin

SYNTHESIS OF EQUIVALENT TUNABLE ANALOG AND DIGITAL FILTERS

In this paper, we consider a tunable analog filter and equivalent recursive digital filter. Their adjustment frequency is controlled provided that frequency response remains invariable. Two modes of digital filter tuning are discussed: direct one – by varying a sampling frequency, and indirect one – by varying the filter weighting coefficients. We propose several methods for either filter synthesis which use frequency scaling and bilinear z-transform of basic analog or digital filter transfer function's argument. These methods ensure both the frequency responses and control laws equivalence for the filters considered.

Tunable analog filter; tunable digital filter; transfer function synthesis; direct and indirect control modes; frequency scaling; control law.

Введение. Перестраиваемые аналоговые и цифровые фильтры широко используются в современных системах автоматического управления, а также в информационно-измерительных и телекоммуникационных системах, обеспечивая адаптивную селекцию и обработку, формирование, поиск и автоматическое сопровождение сигналов, слежение за их частотой, подавление нестационарных помех, а также решение ряда других задач. Среди них наиболее распространены фильтры, относящиеся к классу «частотно-масштабируемых», управление частотой настройки которых достигается без искажения формы частотных характеристик, путем изменения масштаба аргумента передаточной функции [1]. Известно, что при этом масштабируются не только частотные, но и временные характеристики [2]. Такие фильтры применяются также для реализации управляемых генераторов периодических и непериодических колебаний, в частности – параметрических генераторов динамического хаоса, а также систем защищенной передачи информации на их основе [3, 4].