БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Каляев И.А., Гайдук А.Р., Капустян С.Г.* Модели и алгоритмы коллективного управления в группах роботов. – М.: Физматлит, 2009.
2. *Rus D., Donald B., Jennings J.* Moving Furniture with Teams of Autonomous Robots // Proceedings of The IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems 95. 'Human Robot Interaction and Cooperative Robots'. – 1995. – P. 235-242.
3. *Гайдук А.Р., Капустян С.Г., Шаповалов И.О.* Оптимальное перемещение тела интеллектуальным роботом // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2009. – № 7. – С. 43-46.
4. *Капустян, С.Г., Шаповалов И.О.* Структура и алгоритмы действий коллектива роботов при перемещении тела // Экстремальная робототехника: Труды XXI Международной научно-технической конференции. – СПб.: Изд-во "Политехника-сервис", 2010. – С. 375-381.
5. *RochefortY., Piet-Lahanier H., Bertrand S., Beauvois D., Dumur D.* Guidance of flocks of vehicles using virtual signposts // Preprints of the 18th IFAC world congress. – 2011. – P. 5999-6004.
6. Краткий физико-технический справочник. – М.: ФИЗМАТГИЗ, 1962.

Статью рекомендовал к опубликованию д.т.н., профессор Р.А. Нейдорф.

Шаповалов Игорь Олегович – Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Южный федеральный университет»; e-mail: shapovalovio@gmail.com; 347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44; тел.: 89508473455; кафедра систем автоматического управления; ассистент.

Shapovalov Igor Olegovich – Federal State-Owned Autonomy Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”; e-mail: shapovalovio@gmail.com; 44, Nekrasovsky, Taganrog, 347928, Russia; phone: +79508473455; the department of automatic control systems; assistant.

УДК.512.53(043)

Е.С. Арапина-Арапова

ЧАСТИЧНЫЕ ГРУППОИДЫ ПРИМЕНИТЕЛЬНО К ИНФОРМАЦИОННЫМ СИСТЕМАМ

Основным объектом исследования в работе является класс категорийных полугрупп, допускающих разложения в объединение полугрупп Брандта с общим нулем. Например, нулевое расширение фундаментального группоида любого неориентированного графа относится к полугруппам изучаемого класса. Симметрию кристаллов, при помощи группоидов Брандта, описывают Вехлер и Фихтнер. Полугруппа Брандта является наиболее естественным аналогом понятия группы. Основной метод исследования состоит в использовании операции над классами частичных группоидов, которая близка умножению классов полных группоидов, впервые рассмотренному А.И. Мальцевым. В этих терминах можно рассматривать и градуированные алгебры. Получены новые результаты, которые обобщают некоторые известные факты теории полугрупп.

Частичные группоиды; полугруппы Брандта; неориентированные графы; симметрия кристаллов.

E.S. Arapina-Arapova

APPLICATION OF PARTIAL GRUPPOIDS TO INFORMATION SYSTEMS

The main object of research in work, is the class of the category semigroups allowing decomposition in association of semigroups of Brandt with the general zero. For example, zero expansion fundamental groupoid any nondirectional count belongs to semigroups of a studied class.Symmetry of crystals, with the help groupoids Brandt, describe Vekhler and Fikhtner.

Brandt's semigroup is the most natural analog of concept of group. The main method of research consists in operation use over classes partial groupoids which is close to multiplication of classes full groupoids, for the first time considered by A.I. Maltsev. In these terms it is possible to consider and the graduated algebras. New results are received, which generalize some known facts of the theory of semigroups.

Partial gruppoids; Brandt's semigroups; nondirectional count; symmetry of crystals.

Постановка задачи. Как известно, один из способов изучения той или иной алгебраической системы состоит в разложении ее на подсистемы из некоторого достаточно изученного класса. В теории полугрупп широко применяются разложения в объединение попарно непересекающихся подполугрупп или, иногда, попарно пересекающихся в общем нуле. В этом направлении известны работы А. Клиффорда, В. Манна, М. Петрича, Р. Круазо, Д. Хауи, Л.Н. Шеврина, А.В. Келарева и многих других.

Основным объектом исследования является класс категорийных полугрупп, допускающих разложения в объединение полугрупп Брандта с общим нулем. Заметим, что всякое утверждение о полугруппах с нулем влечет в качестве очевидного следствия некоторое утверждение о полугруппах без нуля, если предположить, что в рассматриваемой полугруппе ноль является внешним.

Изучение полугрупп, являющихся 0-объединением полугрупп Брандта, представляется актуальным, так как в классе полугрупп с нулем полугруппа Брандта есть наиболее естественный аналог понятия группы. К примеру, Вехлер и Фихтнер при помощи группоидов Брандта и Эресмана описывают симметрию кристаллов, а нулевое расширение фундаментального группоида любого неориентированного графа также является прямым объединением полугрупп Брандта. Еще пример. Пусть $M = \{\mathrm{M}_i \mid i \in I\}$ – множество попарно не пересекающихся непустых множеств. Тогда множество всех биекций, область определения и область значения которых принадлежат M (эти области могут совпадать), относительно обычной суперпозиции отображений является частичным группоидом, нулевое расширение которого является полугруппой, являющейся 0-объединением полугрупп Брандта. Например, в качестве M можно взять множество открытых граней (без ребер) многогранника, в частности, какого-нибудь кристалла.

Формулировки полученных результатов становятся намного короче, а доказательства их значительно упрощаются, если вместо исследуемой полугруппы с нулем рассматривать тот частичный группоид, который получается из данной полугруппы удалением нуля.

Основной метод исследования в работе состоит в использовании операции над классами частичных группоидов, которая близка умножению классов полных группоидов, впервые рассмотренному А.И. Мальцевым. В этих терминах можно рассматривать также и понятие градуированной алгебры.

Для решения поставленной задачи на частичных группоидах с некоторыми условиями типа ассоциативности исследуются конгруэнции, смежные классы которых являются группоидами Брандта. На изучаемых нами частичных группоидах единственной конгруэнцией, удовлетворяющей этому требованию, является эквивалентность Грина $\mathfrak{J}$. При помощи выявления различных свойств этой эквивалентности и последующего перехода к нулевому расширению рассматриваемых частичных группоидов достигается поставленная в работе цель: описывается строение категорийных в нуле полугрупп, являющихся 0-объединением полугрупп Брандта в терминах частичных полурешеток.

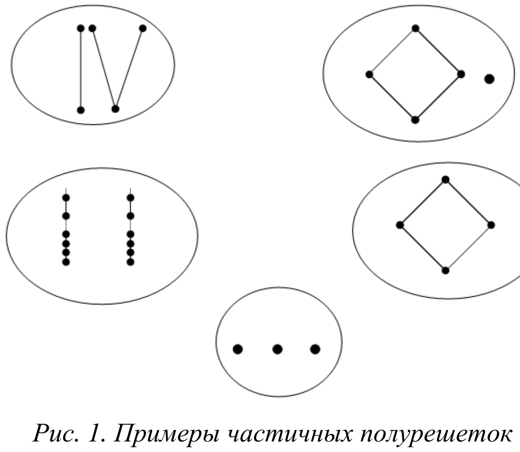

Рис. 1. Примеры частичных полурешеток

Описание метода. Понятие катенарного полугруппоида ввел в геометрических целях В.В. Вагнер [1]. *Полугруппоидом* называется сильно ассоциативный частичный группоид, т.е. частичный группоид $(S;\cdot)$ является полугруппоидом тогда и только тогда, когда из того, что определено в S одно из произведений $(x\cdot y)\cdot z$, $x\cdot(y\cdot z)$ следует, что определено и другое, и выполняется равенство

$$(x\cdot y)\cdot z = x\cdot(y\cdot z). \tag{1}$$

Если произведение $u\cdot v$ не определено в S, то пишем $u\cdot v=\varnothing$.

Очевидно, частичный группоид $(S;\cdot)$ есть полугруппоид тогда и только тогда, когда его нулевое расширение [2] $S^0 = S\cup\{0\}$ является полугруппой. Поэтому всякое свойство полугруппоидов влечет очевидное следствие для полугрупп (с нулем).

Идемпотентный коммутативный полугруппоид называем *частичной полурешеткой.*

Идемпотентный частичный группоид называется *антицепью*, если условие $xy\neq\varnothing$ всегда влечет $x=y$.

Частичный группоид $(S;\cdot)$ называют *катенарным*, если условие $x\cdot y\neq\varnothing\neq y\cdot z$ всегда влечет $(x\cdot y)\cdot z\neq\varnothing\neq x\cdot(y\cdot z)$.

Условие катенарности частичного группоида S равносильно условию категорийности в нуле его нулевого расширения S^0.

Принятая полугрупповая терминология сохраняется нами и для произвольных полугруппоидов. Понятны, например, термины *регулярный*, *инверсный*, *простой*, *вполне простой полугруппоиды* и т.д. Вполне простой инверсный полугруппоид называют *группоидом Брандта*.

Для произвольных классов $\sum,\Gamma$ полугруппоидов через $\sum*\Gamma$ обозначен класс всех полугруппоидов S, на которых существует такая конгруэнция τ, что $S/\tau\in\Gamma$, , а каждый замкнутый в S τ -класс принадлежит $\sum$. Всякий полугруппоид класса $\sum*\Gamma$ называем Γ-полугруппоидом $\sum$ -полугруппоидов. В работе рассматривается строение катенарных полугруппоидов, являющихся идемпотентными коммутативными полугруппоидами группоидов Брандта. Частным случаем полученного в работе результата является одна из основных теорем в [4].

Обозначения:

A – класс антицепей;

B – класс группоидов Брандта;

I – класс полурешеток;

Q – класс катенарных частичных полурешеток;

M – класс инверсных клиффордовых полугруппоидов, в которых идеальная эквивалентность Грина $\Im$ является конгруэнцией;

K – класс тех полугруппоидов $S \in \boldsymbol{M}$, для которых бинарное отношение

$$\triangleleft = \{(\alpha,\beta)\in S/_{\Im}\times S/_{\Im} \mid \alpha\circ\beta=\alpha\}$$

удовлетворяет условию

$$(\gamma \triangleleft \alpha \,\&\, \gamma \triangleleft \beta) \to (\gamma \triangleleft \alpha\circ\beta). \tag{2}$$

Теорема 1. $\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{I}*\boldsymbol{A}$

Доказательство. Если $S \in \boldsymbol{I}*\boldsymbol{A}$, т.е. S – прямое объединение полурешеток, то идемпотентность и коммутативность полугруппоида S очевидны. Пусть $x, y, z \in S$, $xy \neq \varnothing \neq yz$. Тогда, по определению ($*$) и класса ***A***, элементы x, y, z принадлежат некоторой подполурешетке S_α полугруппоида S, а поэтому $(xy)z$ $(= x(yz))$ принадлежит S_α, т.е. $(xy)z \neq \varnothing \neq x(yz)$. Значит S – катенарный идемпотентный коммутативный полугруппоид, т.е. S – катенарная частичная полурешетка, следовательно, $S \in \boldsymbol{Q}$. Итак, $\boldsymbol{I}*\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{Q}$.

Докажем обратное включение. Если $S \in \boldsymbol{Q}$, то отношение $\theta = \{(x, y)\in S\times S \mid xy \neq \varnothing\}$ является эквивалентностью. В самом деле, рефлексивность и симметричность θ следуют соответственно из идемпотентности и коммутативности умножения в S. Если, наконец $x\theta y$, $y\theta z$, т.е $xy \neq \varnothing \neq yz$, то, в силу катенарности, $(xy)z \neq \varnothing$. Но S – полугруппоид, поэтому $(xz)y = (zx)y = z(xy) \neq \varnothing$. Отсюда следует $x\theta z$. Значит, θ – эквивалентность на S. По определению θ, если $x\theta y$, то $xy \neq \varnothing$, т.е. $xy \in S$. Но $x\cdot(xy) = x^2 y = xy \neq \varnothing$, поэтому $x\theta(xy)$. Таким образом, каждый θ – класс есть обычный (т.е. полный) группоид, а поэтому является обычной полурешеткой. Из сказанного следует $S \in \boldsymbol{I}*\boldsymbol{A}$. Этим доказано включение $\boldsymbol{Q} \subset \boldsymbol{I}*\boldsymbol{A}$, а вместе с ним и требуемое равенство.

В [3] доказано, что полугруппоиды класса ***K*** и только они являются катенарными частичными полурешетками группоидов Брандта, т.е. $\boldsymbol{K}=\boldsymbol{B}*\boldsymbol{Q}$, откуда, по теореме 1, $\boldsymbol{K}=\boldsymbol{B}*(\boldsymbol{I}*\boldsymbol{A})$. Естественно, возникает вопрос о строении катенарных полугруппоидов класса ***K***. Решение этого вопроса и является целью настоящей работы.

Теорема 2. Полугруппоид S класса ***K*** катенарен тогда и только тогда, когда для любых $\alpha,\beta \in S/_{\Im}$, таких, что $\beta \triangleleft \alpha$ и любого идемпотента $e \in \alpha$ найдется единственный идемпотент $f \in \beta$ такой, что $f \leq e$.

Доказательство. Пусть S – катенарный полугруппоид из ***K***. В этом случае, как показано в [3], обозначенное в формулировке условие выполнено. Покажем обратное. Пусть $S \in \boldsymbol{K}$ и указанное в формулировке условие выполнено. Берем произвольные идемпотенты $e, f, g \in S$ такие, что $ef \neq \varnothing \neq fg$ и покажем, что

$$efg \neq \varnothing. \tag{3}$$

Так как $S \in \boldsymbol{K}$, то S является частичной полурешеткой Y группоидов Брандта $\{\alpha | \alpha \in Y\}$. Следовательно, найдутся такие $\alpha, \beta, \gamma \in Y$, что $e \in \alpha$, $f \in \beta$, $g \in \gamma$. Поскольку $ef \neq \varnothing \neq fg$ то, по определению частичного факторгруппоида $S/\mathfrak{Z} = Y$, имеем $\alpha \circ \beta \neq \varnothing \neq \beta \circ \gamma$. Так как частичная полурешетка Y катенарна, то отсюда следует $\alpha \circ \beta \circ \gamma \neq \varnothing$.

Очевидно

$$\alpha \circ \beta \circ \gamma \lhd \beta. \tag{4}$$

Так как $ef \in \alpha \circ \beta$, то по условию, найдется идемпотент $h_1 \in \alpha \circ \beta \circ \gamma$, такой, что

$$h_1 \leq ef \leq f. \tag{5}$$

Аналогично, существует идемпотент $h_2 \in \alpha \circ \beta \circ \gamma$ такой, что

$$h_1 \leq fg \leq f. \tag{6}$$

Но $\alpha \circ \beta \circ \gamma \in \boldsymbol{B}$, т.е $\alpha \circ \beta \circ \gamma$ – группоид Брандта и $h_1, h_2 \in \alpha \circ \beta \circ \gamma$, значит, либо $h_1 h_2 = \varnothing$, либо $h_1 = h_2$. Если $h_1 \neq h_2$, то в группоиде $\alpha \circ \beta \circ \gamma$ нашлись различные идемпотенты h_1, h_2, удовлетворяющие (5), (6) и выполняется неравенство (4), что противоречит требованию «единственности» в формулировке теоремы. Значит $h_1 = h_2$, откуда получаем

$$\varnothing \neq h_1 = h_1^2 = h_1 h_2 = h_1(ef) \cdot (fg) h_2 = h_1(efg) h_2,$$

поскольку S -полугруппоид. Отсюда следует $efg \neq \varnothing$. Таким образом, в инверсной полугруппе $S^0 = S \cup \{0\}$ полурешетка идемпотентов категорийна в нуле, а потому категорийна в нуле и полугруппа S°, т.е. полугруппоид S катенарен.

Заключение. Решение этой задачи на чисто полугрупповом языке представляет значительные сложности. Это вызвано следующим обстоятельством. Разложение полугруппы S на подполугруппы с общим нулем не определяет на S не только конгруэнции, но даже и эквивалентности. Попытка же изолировать ноль, считая его отдельным классом, несостоятельна: рассматриваемые разложения S таковы, что отвечающие им бинарные отношения на частичном группоиде $S\backslash\{0\}$, являясь конгруэнциями, сильными конгруэнциями не являются, а потому не являются конгруэнциями на полугруппе S их нулевые расширения (при помощи пары (0,0)). Именно поэтому предпочтительнее язык частичных действий, нежели действий полных.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Вагнер В.В.* Диаграммируемые полугруппоиды и обобщенные группоиды // Известия вузов. Математика. – 1967. – № 10. – С. 11-23.
2. *Клиффорд А., Престон Г.* Алгебраическая теория полугрупп. – М.: Мир, 1972. – Т. 1, 2.
3. *Кожевников О.Б.* Об одной операции на классах полугруппоидов // Вестник ТГПИ. Естест. науки, 2009.
4. *Арапина–Арапова Е.С.* Разложение полугрупп в объединение декартовых полугрупп // II-я Международная конференция “Полугруппы: теория и приложения” в честь профессора Е.С. Ляпина. – СПб., 1999. – С. 66-67.
5. *Арапина–Арапова Е.С.* О катерных инверсных полугруппоидах // Вестник ТГПИ. Физико-математические и естественные науки. – Таганрог: Изд-во Таганрог. гос. пед. инс-та, 2010. – № 1. – С. 3-5.

Статью рекомендовал к опубликованию д.т.н., профессор Я.Е. Ромм.

Арапина-Арапова Елена Сергеевна – ФГБОУ ВПО «Таганрогский государственный педагогический институт им. А.П. Чехова»; e-mail: arapina@mail.ru; 347926, г. Таганрог, ул. Инициативная, 48; тел.: +79185219138; кафедра информатики; к.ф.-м.н.; доцент.

Arapina-Arapova Elena Sergeevna – FGBOU of VPO «Taganrog State Pedagogical Institute of a name A.P. Chekhov»; e-mail: arapina@mail.ru; 48, Initsiativnaya street, Taganrog, 347926, Russia; phone: +79185219138; the department of informatics; cand. of phis.-math. sc.; associate professor.

УДК 681.12

К.В. Бесклубова

ОБЛАСТЬ ПРИТЯЖЕНИЯ ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ МНОГОМЕРНОГО ОБЪЕКТА С ОГРАНИЧЕННЫМ УПРАВЛЕНИЕМ

Исследуется область притяжения положения равновесия многомерного динамического объекта при ограниченном управлении, формируемом многомерным устройством управления. Построение области производится с применением метода квадратичных функций Ляпунова и инвариантных эллипсоидов. Получены аналитические выражения, определяющие область начальных значений переменных состояния объекта, при которых обеспечивается гарантированная линейность системы управления. Проведено моделирование системы с ограниченным управлением при различных начальных условиях. Результаты моделирования подтверждают справедливость полученных выражений.

Многомерная система управления; ограничение на управление; функция Ляпунова; оценка области устойчивости; переменные состояния.

K.V. Besklubova

STABLE STATE ATTRACTION AREA OF THE MULTIVARIABLE PLANT WITH LIMITED CONTROL

The paper considers the attraction area of stable state of multivariable dynamic plant with limited control formed with the aid of multivariable control unit. The attraction area is formed with application of square Lyapunov's function method and invariant ellipsoids. Analytical expressions, defining area of plant's initial conditions providing the guaranteed system's linearity, are received. Simulation of the system with limited control is carried out at the various initial conditions which results prove the specified expressions.

Multivariable control system; limited control; Lyapunov's function; an estimation of linearity area; state variables.

Введение. Управляющие воздействия реальных объектов, как правило, ограничены по величине. В том случае, когда значение управления, формируемого устройством управления, превышает допустимую величину, система может потерять линейность и, как следствие, устойчивость и работоспособность. В связи с этим в данной работе рассматривается задача построения областей притяжения положения равновесия динамической системы с ограничением на управление. Решение задачи получено методом функций Ляпунова с применением инвариантных эллипсоидов.

Постановка задачи. Рассмотрим линейный многомерный объект управления (МОУ), заданный уравнениями

$$\dot{x} = Ax + Bu\,, \quad y = C^T x + Du\,, \tag{1}$$

где x – n-вектор состояния МОУ; A, B, C, D – матрицы коэффициентов; u, y – q-векторы управлений и выходов МОУ.