Арапина-Арапова Елена Сергеевна – ФГБОУ ВПО «Таганрогский государственный педагогический институт им. А.П. Чехова»; e-mail: arapina@mail.ru; 347926, г. Таганрог, ул. Инициативная, 48; тел.: +79185219138; кафедра информатики; к.ф.-м.н.; доцент.

Arapina-Arapova Elena Sergeevna – FGBOU of VPO «Taganrog State Pedagogical Institute of a name A.P. Chekhov»; e-mail: arapina@mail.ru; 48, Initsiativnaya street, Taganrog, 347926, Russia; phone: +79185219138; the department of informatics; cand. of phis.-math. sc.; associate professor.

УДК 681.12

К.В. Бесклубова

ОБЛАСТЬ ПРИТЯЖЕНИЯ ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ МНОГОМЕРНОГО ОБЪЕКТА С ОГРАНИЧЕННЫМ УПРАВЛЕНИЕМ

Исследуется область притяжения положения равновесия многомерного динамического объекта при ограниченном управлении, формируемом многомерным устройством управления. Построение области производится с применением метода квадратичных функций Ляпунова и инвариантных эллипсоидов. Получены аналитические выражения, определяющие область начальных значений переменных состояния объекта, при которых обеспечивается гарантированная линейность системы управления. Проведено моделирование системы с ограниченным управлением при различных начальных условиях. Результаты моделирования подтверждают справедливость полученных выражений.

Многомерная система управления; ограничение на управление; функция Ляпунова; оценка области устойчивости; переменные состояния.

K.V. Besklubova

STABLE STATE ATTRACTION AREA OF THE MULTIVARIABLE PLANT WITH LIMITED CONTROL

The paper considers the attraction area of stable state of multivariable dynamic plant with limited control formed with the aid of multivariable control unit. The attraction area is formed with application of square Lyapunov's function method and invariant ellipsoids. Analytical expressions, defining area of plant's initial conditions providing the guaranteed system's linearity, are received. Simulation of the system with limited control is carried out at the various initial conditions which results prove the specified expressions.

Multivariable control system; limited control; Lyapunov's function; an estimation of linearity area; state variables.

Введение. Управляющие воздействия реальных объектов, как правило, ограничены по величине. В том случае, когда значение управления, формируемого устройством управления, превышает допустимую величину, система может потерять линейность и, как следствие, устойчивость и работоспособность. В связи с этим в данной работе рассматривается задача построения областей притяжения положения равновесия динамической системы с ограничением на управление. Решение задачи получено методом функций Ляпунова с применением инвариантных эллипсоидов.

Постановка задачи. Рассмотрим линейный многомерный объект управления (МОУ), заданный уравнениями

$$\dot{x} = Ax + Bu\ ,\ \ y = C^T x + Du\ , \qquad (1)$$

где x – n -вектор состояния МОУ; A, B, C, D – матрицы коэффициентов; u, y – q -векторы управлений и выходов МОУ.

Для МОУ (1) методом динамической декомпозиции [5] многомерного объекта синтезировано управление по выходам и воздействиям. При отсутствии задающих воздействий его можно представить в виде функции от переменных состояния замкнутой системы:

$$u_i = \begin{cases} K_i\omega, & |K_i\omega| \le u_{\max,i}, \\ u_{\max,i}\, sign(K_i\omega), & |K_i\omega| > u_{\max,i}, \end{cases} \quad i = \overline{1,q}, \tag{2}$$

где u_i, $i=\overline{1,q}$ – управление i-того канала замкнутой многомерной системы автоматического управления (МСАУ), K_i – строки матрицы K параметров управления, $u_{\max,i}$ – допустимые значение управления u_i. В выражении (2) ω – $n_{ЗС}$-вектор переменных состояния замкнутой МСАУ, причем $\omega = [x \;\; z]^T$, где $z \in R^r$ – вектор переменных состояния многомерного устройства управления (МУУ).

Уравнения замкнутой системы с управлением (2) имеют вид

$$\dot{\omega} = A_{ЗС}\omega, \quad y = C_{ЗС}^T\omega, \tag{3}$$

где $A_{ЗС}$, $C_{ЗС}$ – матрицы коэффициентов МСАУ.

Ниже рассматривается приложение метода функций Ляпунова с применением инвариантных эллипсоидов к решению задачи определения диапазонов изменения переменных состояния, в которых сохраняется линейность системы (3).

Решение задачи. Поскольку система (3) является устойчивой, то для неё можно найти функцию Ляпунова в виде квадратичной формы $V(\omega) = \omega^T P\omega$. В этом выражении P – симметричная, положительно-определенная матрица, которую можно найти путем решения уравнения Ляпунова

$$A_{ЗС}^T P + PA_{ЗС} = -E, \tag{4}$$

где E – единичная матрица. Производная по времени функции $V(\omega) = \omega^T P\omega$ вдоль траекторий системы определяется выражением $\dot{V}(\omega) = -\omega^T E\omega$. Так как $E > 0$, то $\dot{V}(\omega)$ является отрицательно-определенной функцией. Поэтому при ограниченной норме $\|\omega_0\|$ вектора начальных значений ω_0 решение $\omega(t) = \omega(t,\omega_0)$ системы (3) также является ограниченным при всех $t \ge 0$ и стремится к нулю с ростом времени.

В последнее время широкое распространение получила теория инвариантных эллипсоидов [2–4]. Ее методы с применением техники матричных линейных неравенств используются при описании множеств достижимости и притяжения линейных систем, а также для формирования управления в форме линейной статической обратной связи по состоянию [3]. Кроме того, методы теории инвариантных эллипсоидов служат основанием для разработки новых подходов к решению проблемы подавления ограниченных внешних возмущений и, в частности, позволяют проводить синтез оптимальных регуляторов и осуществлять оценку показателей качества замкнутых динамических систем [4].

В данной работе метод инвариантных эллипсоидов используется для оценки допустимого диапазона изменения переменных состоянии системы (3), при котором выполняется неравенство $|K_i\omega| \le u_{\max,i}$.

Приведем определение: эллипсоид

$$\varepsilon_\rho(P) = \left\{\omega \in R^n : \omega^T P\omega \le \rho^2\right\}, \quad P > 0 \tag{5}$$

называется инвариантным притягивающим для (3), если для любого $\omega_0 \in \varepsilon_\rho(P)$ при всех $t \ge 0$ будет выполнено условие

$$\omega(t,\omega_0)\in\varepsilon_\rho(P). \qquad (6)$$

Здесь параметр ρ^2 должен быть связан с допустимым значением управления $u_{\max}$.

Фактически эллипсоид ε_ρ представляет собой область в пространстве состояний системы (3), ограниченную поверхностью $\omega^T P\omega=\rho^2$. Если на управление системы не налагается каких-либо условий, т.е. система устойчива при любом векторе начальных значений ω_0, все траектории системы с ростом времени стремятся к эллипсоиду ε_ρ и попадают в него при некотором $t>t_\rho>0$. Однако если при $\omega\in\varepsilon_\rho(P)$ функция $V(\omega)\le\rho^2$, то при $\omega\notin\varepsilon_\rho(P)$ $V(\omega)=\omega^T P\omega\ge\rho^2$. В этом и заключается смысл $\varepsilon_\rho(P)$.

Согласно лемме 1 из [2], если начальные значения вектора переменных состояния системы (3) удовлетворяют равенству $\omega^T P\omega=\rho^2$, то при всех $t\ge 0$ выполняется условие

$$\omega^T(t,\omega_0)P\omega(t,\omega_0)\le\rho^2. \qquad (7)$$

Нужно отметить, что из леммы 1 не следует монотонное затухание $\omega(t)$ или его нормы $\|\omega(t)\|$. В ней утверждается, по сути, лишь монотонность убывания функции $\omega^T(t)P\,\omega(t)$ с ростом t. Причем именно это и требуется для того, чтобы $\omega(t)\in\varepsilon_\rho(P)$, так как $\varepsilon_\rho(P)$ определяется условием $\omega^T P\omega\le\rho^2$. Хотя словами и говорится: если $\omega_0\in\varepsilon_\rho(P)$, то и $\omega(t,\omega_0)\in\varepsilon_\rho(P)$, на самом деле ограничивается не $\omega(t,\omega_0)$, а функция $V(\omega)=\omega^T P\omega$.

При этом, по лемме 2 из [2], обеспечить выполнение неравенства $|u|\le u_{\max}$ можно при выполнении условий (7) и (8), при $\mathrm{Y}=K^T P^{-1}$

$$\begin{bmatrix} P^{-1} & \mathrm{Y}^{\mathrm{T}} \\ \mathrm{Y} & \dfrac{u_{\max}^2}{\rho^2}E \end{bmatrix}\ge 0. \qquad (8)$$

Таким образом, задаваясь некоторым значением $u_{\max}$, по условию (8), можно найти параметр ρ^2, который и определяет размеры эллипсоида ε_ρ, являющегося границей области начальных значений x_0, при которых обеспечивается неравенство $|u_i|\le u_{\max,i}$ и линейность системы (3).

Пример. В рассматриваемой МСАУ (3) $q=3$, $\dim x=6$, $\dim\omega=30$. Для нее найдена матрица P из уравнения Ляпунова (4). Соотношения (7), (8) метода инвариантных эллипсоидов позволяют в явном виде построить область притяжения, в которой выполняется условие $|u_i|\le u_{\max,i}$, $u_{\max,i}=10$, $i=\overline{1,q}$. Эта область для объекта (1) с управлением (2) показана на рис. 1. Если начальные значения вектора переменных состояния попадают в область ε_ρ, т.е. $\omega_0\in\varepsilon_\rho(P)$, то соответствующий график $x(t)$ располагается в этой области, как показано на рис. 1.

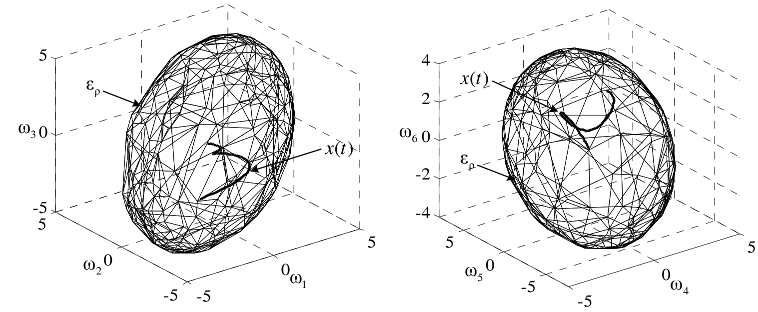

Рис. 1. Проекции траекторий МОУ при $\omega_0 \in \varepsilon_\rho(P)$, $\omega_0^T P \omega_0 \le \rho^2$

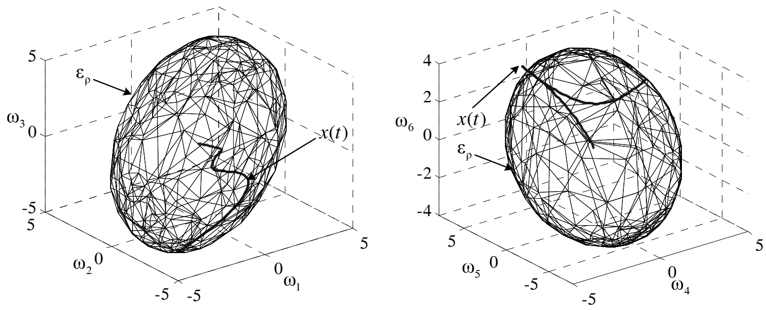

Рис. 2. Проекции траекторий МОУ при $\omega_0 \in \varepsilon_\rho(P)$, $x_0^T P_1 x_0 = \rho^2$

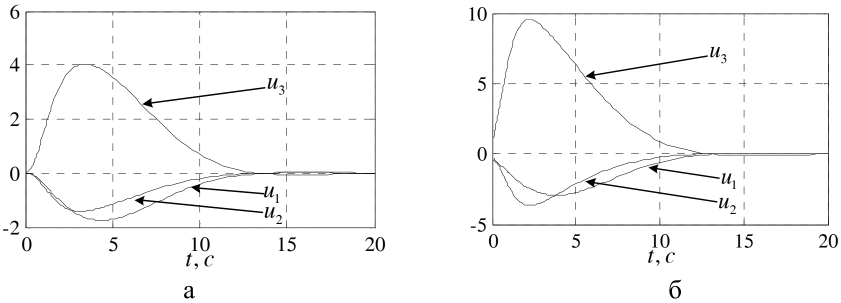

Рис. 3. Управление МСАУ при $\omega_0 \in \varepsilon_\rho(P)$ *(а –* $\omega_0^T P \omega_0 \le \rho^2$, *б –* $x_0^T P_1 x_0 = \rho^2$)

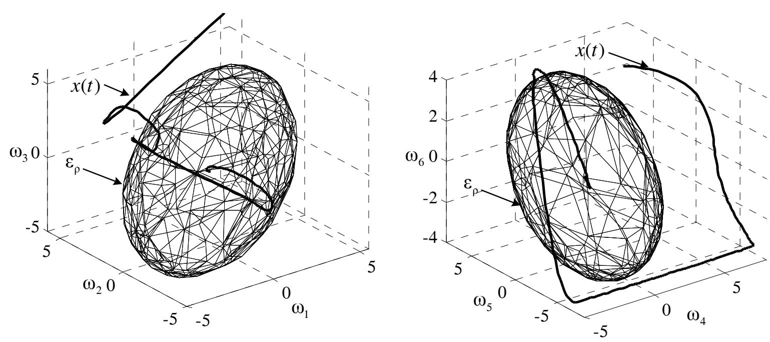

Рис. 4. Проекции траекторий МОУ при $\omega_0 \notin \varepsilon_\rho(P)$

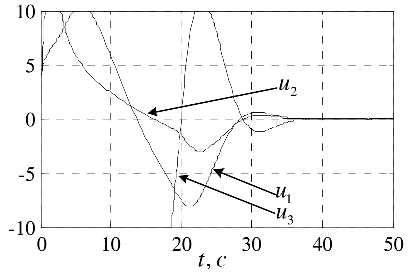

Рис. 5. Управление МСАУ при $\omega_0 \notin \varepsilon_\rho(P)$

На рис. 2 приведены проекции траекторий МОУ для случая, когда начальные значения x_0 его переменных состояния расположены на границе области $\varepsilon_\rho(P)$. Как видно, при $x_0^T P_1 x_0 = \rho^2$, где P_1 – подматрица P, траектории МОУ также ограничены, однако могут покидать область $\varepsilon_\rho(P)$. По рис. 3, при $\omega_0 \in \varepsilon_\rho(P)$ управление не достигает своего максимально допустимого значения $u_{\max,i} = 10$ и, следовательно, замкнутая система остается линейной.

При дальнейшем увеличении значений x_0, когда начальная точка находится за границей области $\varepsilon_\rho(P)$, т.е. $\omega_0 \notin \varepsilon_\rho(P)$, управляющие воздействия достигают своего максимально допустимого значения, а система теряет линейность. Это подтверждается изменением переменных состояния объекта, изображенных на рис. 4, и графиками изменения управляющих воздействий на рис. 5.

Заключение. Рассмотренный метод позволяет построить область притяжения положения равновесия многомерного динамического объекта или системы при ограниченном управлении, где гарантируется линейность замкнутой системы.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Гайдук А.Р.* Оценки переменных состояния линейных систем. Наука и образование на рубеже тысячелетий: сборник научно-исследовательских работ. Вып. 2. – М.: Учлитвуз, 2011. – С. 23-27.
2. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Наука, 1967.
3. *Поляк Б.Т., Щербаков П.С.* Множества достижимости и притяжения линейных систем с ограниченным управлением: описание с помощью инвариантных эллипсоидов. Сб. «Стохастическая оптимизация в информатике» / Под ред. О.Н. Граничина. Вып. 4. – СПб.: СПб ГУ, 2008. – С. 3-23.
4. *Хлебников М.В.* Время установления в линейной динамической системе с ограниченными внешними возмущениями // Автоматика и телемеханика. – 2012. – № 6. – С. 3-17.
5. *Гайдук А.Р., Плаксиенко Е.А.* Синтез динамических систем по требуемым показателям качества // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2008. – № 4. – С. 7-12.
6. *Гайдук А.Р.* Теория и методы аналитического синтеза систем автоматического управления (Полиномиальный подход). – М.: Физматлит, 2011.

Статью рекомендовал к опубликованию д.т.н., профессор Р.А. Нейдорф.

Бесклубова Ксения Валериевна – Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Южный федеральный университет»; e-mail: kbesklubova@mail.ru; 347904, г. Таганрог, ул. Яблочкина, 8/1, кв. 33; тел.: 88634387349; магистрант.

Besklubova Ksenia Valeryevna – Federal State-Owned Autonomy Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”; e-mail: kbesklubova@mail.ru; 8/1, Yablochkina street, app. 33, Taganrog; 347904, Russia; phone: +78634387349; the department of automatic control systems; magister.