Раздел III. Системы управления

УДК 519.283

Е.Я. Рубинович

РОБАСТНАЯ ЛИНЕЙНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ СКАЧКООБРАЗНЫХ ПРОЦЕССОВ*

Для процессов, описываемых линейными стохастическими доффеpенциальными уравнениями Ито с мерой, рассматривается задача оптимальной (в среднеквадратическом смысле) линейной фильтрации в случае, когда частично наблюдаемый векторный процесс имеет ненаблюдаемую компоненту возмущенную скачкообразным марковским процессом с конечным числом состояний, а процесс наблюдений зашумлен семимартингалом с негауссовской мартингальной частью. Иллюстрируются робастные свойства оптимальных линейных оценок в сравнении с оптимальными нелинейными оценками в случае неадекватности математической модели реальному процессу.

Марковские процессы; фильтрация; робастность.

E.Ya. Rubinovich

ROBUST LINEAR FILTRATION FOR JUMP-WISE PROCESSES

The paper deals with an optimal (in the mean square sense) linear estimation for the processes describing by Ito's linearly differential equations with measure when partially observable vector-process has unobservable component corrupted by Markov jump-wise process with finite number of states and observation process is excited by semimartingale with non-Gaussian martingale part. It is shown robust property of linear estimations.

Markov processes; filtering; robustness.

Введение. Во многих технических задачах возникает необходимость оценки координат скачкообразных процессов, наблюдаемых на фоне шума. Такая задача обычно решается с применением фильтров Калмана, что связано с построением определенной вероятностной модели описания эволюции оцениваемых координат во времени, которая учитывала бы скачкообразный характер процесса. В качестве такой модели в работе рассматривается скачкообразный марковский процесс с конечным числом состояний. Отметим, что для построения оценок состояний такого процесса в настоящее время существует хорошо разработанный аппарат теории нелинейной фильтрации [2]. Однако, с практической точки зрения, оптимальный (в среднеквадратическом смысле) линейный фильтр оказывается предпочтительнее. Дело в том, что кроме своей простоты, с вычислительной точки зрения, линейный фильтр «грубее» оптимального нелинейного фильтра в том смысле, что оценки даваемые линейным фильтром в случае неадекватности математической модели реальному процессу (например, при аппроксимации реального процесса марковским процессом с малым числом состояний, неточным знанием интенсивностей переходов между состояниями и т.п.) оказываются более точными.

* Работа выполнена при поддержке Программы Президиума РАН «Динамические системы и теория управления».

Цель настоящей работы – построить оптимальный в среднеквадратическом смысле линейный фильтр для оценки скачкообразного марковского процесса с дискретным множеством состояний наблюдаемого на фоне шума и на базе этого фильтра синтезировать алгоритм отслеживания траекторий реальных скачкообразных процессов, в частности, фазовых координат маневрирующих динамических объектов.

Естественный подход к решению данной задачи состоит в следующем. По среднему значению и корреляционной функции исходного марковского процесса строится его гауссовский марковский аналог, т.е. гауссовский процесс с теми же двумя моментами, что и у исходного процесса. По этому гауссовскому аналогу строится калмановский фильтр, являющийся оптимальным линейным для исходного процесса [1].

Трудность построения такого аналога состоит в сложности вычисления корреляционной функции марковского процесса с большим числом состояний (в случае двух состояний – это простая задача). Мы преодолеваем эту трудность, прибегая к так называемому, семимартингальному представлению скачкообразного марковского процесса [3] и строим его гауссовский марковский аналог без вычисления среднего значения и корреляционной функции. Такой подход (в дискретном и непрерывном времени) был успешно применен в простейшем случае оценивания одномерного скачкообразного марковского процесса с конечным числом состояний, наблюдения за которым были искажены аддитивным белым шумом [1]. В настоящей работе, кроме обобщения на многомерный случай, рассматривается более широкий класс случайных процессов, являющихся семимартингалами, эволюция состояния которых описывается стохастическими дифференциальными уравнениями с мерой. Такое представление позволяет единообразно описывать дискретные, непрерывные и дискретно-непрерывные процессы.

Постановка задачи. На стохастическом базисе $(\Omega,\ F,\ \mathbf{F}=(F_t)_{0\le t\le T},\ P)$ с обычными условиями задан ненаблюдаемый векторный процесс $X=(X(t))_{t\ge 0}\in\mathbf{R}^m$, удовлетворяющий стохастическому дифференциальному уравнению Ито:

$$X(t)=\int_{]0,t]}(\mathrm{d}a(s))X(s-)+Q(t), \tag{1}$$

Наблюдению доступен векторный процесс $Y=(Y(t))_{t\ge 0}\in\mathbf{R}^k$:

$$Y(t)=\int_{]0,t]}(\mathrm{d}A(s))Y(s-)+Z(t). \tag{2}$$

Здесь $X(t-)=\lim X(s),\ s\uparrow t$; $Q=(Q(t))_{t\ge 0}$ – векторный марковский процесс с конечным числом состояний; $Z=(Z(t))_{t\ge 0}$ – квадратично интегрируемый мартингал (относительно $\mathbf{F}$), независимый от Q, с $Z(0)=0$ и квадратической характеристикой $\langle Z\rangle_t$; $\mathrm{d}a(\cdot)$ и $\mathrm{d}A(\cdot)$ – детерминированные матричные меры по t. Все функции от t предполагаются непрерывными справа и имеющими пределы слева. Предполагается также существование матричной функции $\rho(t)$, удовлетворяющей при $t\in[0,T]$ следующим условиям согласованности:

$$\mathrm{d}A^c(t)=[\mathrm{d}\mathbf{E}\langle Z\rangle_t^c]\rho(t),$$

$$\mathbf{Sp}\int_{[0,T]}\rho^*(t)[\mathrm{d}\mathbf{E}\langle Z\rangle_t]\rho(t)<\infty,$$

где верхний индекс c – соответствует непрерывным компонентам мер; $\mathbf{Sp}$ – знак матричного следа; * – символ транспонирования; $\mathbf{E}$ – знак математического ожидания. Задача состоит в построении оптимального (в среднеквадратическом смысле) линейного фильтра для частично наблюдаемого процесса (X,Y).

Основные результаты. Известно, что оптимальный линейный фильтр для негауссовского процесса (X, Y) является оптимальным фильтром для его гауссовского аналога (x, y), т.е. гауссовского процесса с теми же самыми математическим ожиданием и матрицей ковариаций [3]. Для получения представления процесса (x, y) будем использовать семимартингальное представление компонент процесса Q, где мартингальные части заменим на винеровские мартингалы. Таким же образом мы заменим мартингал Z на гауссовский мартингал $z = (z(t))$ с той же квадратической характеристикой.

Пусть $Q_n(t),\ n = \overline{1, m}$ (n-я компонента процесса Q) имеет вектор состояния $J_n = (\alpha_1^n, \ldots, \alpha_{k_n}^n)$ и матрицу интенсивностей переходов между состояниями

$$\Lambda_n(t) = \|\lambda_{ij}^n(t)\|_{k_n \times k_n}$$

с элементами $\lambda_{ij}^n(t)$ – известными непрерывными функциями времени. Как и в [1], определим индикаторный процесс $I_n(t) = (I_1^n(t), \ldots, I_{k_n-1}^n(t))^*$ с компонентами $I_i^n(t) = \mathbf{I}\{Q_n(t) = \alpha_i^n\},\ i = \overline{1, k_n - 1}$, где $\mathbf{I}\{\cdot\}$ – индикатор множества $\{\cdot\}$. Тогда

$$Q_n(t) = \bar{J}_n I_n(t) + \alpha_{k_n}^n, \tag{3}$$

где $\bar{J}_n = (\alpha_1^n - \alpha_{k_n}^n, \ldots, \alpha_{k_n-1}^n - \alpha_{k_n}^n)$.

Индикаторный процесс $I_n = (I_n(t))_{t \geq 0}$ допускает семимартингальное представление [1]:

$$I_n(t) = I_n(0) + \int_{[0,t]} (\bar{\Lambda}_n^*(s) I_n(s) + \lambda_n(s)) \mathrm{d}s + M_n(t),$$

где

$$\lambda_n(t) = (\lambda_{k_n,1}^n(t), \ldots, \lambda_{k_n,k_n-1}^n(t))^*,$$

$$\bar{\Lambda}_n(t) = \|\bar{\lambda}_{i,j}^n(t)\|_{(k_n-1)\times(k_n-1)},$$

с

$$\bar{\lambda}_{ij}^n(t) = \lambda_{i,j}^n(t) - \lambda_{k_n j}^n(t)$$

и $M_n(t) = (M_1^n(t), \ldots, M_{k_n-1}^n(t))^*$ – квадратично интегрируемый, чисто разрывный мартингал по отношению к семейству $\mathbf{F}^{I_n} = (F_t^{I_n})_{t \geq 0}$ σ-алгебр $F_t^{I_n} = \sigma\{I_n(s),\ s \leq t\}$.

Как отмечалось выше, гауссовский аналог x процесса X удовлетворяет уравнению

$$x(t) = \int_{]0,t]} (\mathrm{d}a(s)) x(s-) + q(t),$$

где $q(t) = (q_1(t), \ldots, q_m(t))^*$ – гауссовский аналог процесса $Q(t)$. Вследствие (3)

$$q_n(t) = \bar{J}_n \tilde{I}_n(t) + \alpha_{k_n}^n,$$

где

$$\tilde{I}_n(t) = \tilde{I}_n(0) + \int_{[0,t]} (\bar{\Lambda}_n^*(s) \tilde{I}_n(s) + \lambda_n(s)) \mathrm{d}s + \int_{[0,t]} R_n^{1/2}(s) \mathrm{d}W_n(s),$$

с винеровским процессом $W_n(s) = (W_1^n(s), \ldots, W_{k_n-1}^n(s))$ и матричной функцией

$$R_n(t) = \frac{\mathrm{d}[\mathbf{E}\langle M \rangle_t]}{\mathrm{d}t}.$$

Здесь $\langle M \rangle_t$ – квадратическая характеристика мартингала $M(t)$. Матрица $R_n(t)$ имеет элементы [1]:

$$R_{jj}^n(t) = \textstyle\sum_{i \leq k_n} |\lambda_{ij}^n(t)| p_i^n(t),$$

$$R_{ij}^n(t) = -(\lambda_{ij}^n(t) p_i^n(t) + \lambda_{ji}^n(t) p_j^n(t)),\quad i \neq j,$$

где $p_j^n(t) = P\{Q_n(t) = \alpha_j^n\}$ могут быть найдены из уравнения Колмогорова

$$\dot{p}_j^n(t) = \sum_{i \le k_n} \lambda_{ij}^n p_i^n(t).$$

Далее введем следующие блочно-диагональные матрицы:

$$\Lambda(t) = \mathrm{diag}[\bar{\Lambda}_1(t) \vdots \ldots \vdots \bar{\Lambda}_m(t)],$$

$$\bar{J} = \mathrm{diag}[\bar{J}_1 \vdots \ldots \vdots \bar{J}_m],$$

$$R(t) = \mathrm{diag}[R_1^{1/2}(t) \vdots \ldots \vdots R_m^{1/2}(t)],$$

а также блочные векторы

$$I(t) = \mathrm{column}[\tilde{I}_1(t) \vdots \ldots \vdots \tilde{I}_m(t)],$$

$$\lambda(t) = \mathrm{column}[\lambda_1(t) \vdots \ldots \vdots \lambda_m(t)],$$

и обозначим $\alpha = (\alpha_{k_1}^1, \ldots, \alpha_{k_m}^m)^*$. Тогда для блочного вектора $u(t) = \mathrm{column}[x(t) \vdots I(t)]$ имеет место представление

$$u(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ -- \\ I(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{J}I(0) + \alpha \\ ------ \\ I(0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{J}\lambda(t) \\ --- \\ \lambda(t) \end{pmatrix} + \\ + \int_{]0,t]} \begin{pmatrix} \mathrm{d}a(s) & | & O \\ --- & | & --- \\ O & | & \Lambda(s)\mathrm{d}s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(s-) \\ --- \\ I(s) \end{pmatrix} + \\ + \begin{pmatrix} \bar{J} \\ -- \\ E \end{pmatrix} \int_{]0,t]} R(s)\mathrm{d}W(s), \tag{4}$$

где O – матрица с нулевыми элементами, E – единичная матрица и $W = (W(t))_{t \ge 0}$ – векторный винеровский процесс, размера $\dim W = k_1 + \cdots + k_m - m$.

Теперь заменим мартингал Z на гауссовский мартингал $z = (z(t))_{t \ge 0}$ с квадратической характеристикой $\langle z \rangle_t = \mathbf{E}\langle Z \rangle_t$. После такой замены гауссовский аналог y процесса Y принимает вид

$$y(t) = \int_{]0,t]} [\mathrm{d}A(s) \vdots O] \begin{pmatrix} x(s-) \\ --- \\ I(s) \end{pmatrix} + z(t). \tag{5}$$

Для гауссовского процесса (u, y) справедливы уравнения обобщенного фильтра Калмана [4], которые описывают эволюцию оптимальной (в среднеквадратическом смысле) оценки $\pi(t, y)$ ненаблюдаемого процесса u по наблюдениям за процессом y, и эта оценка оказывается линейной. Для аналогичной оптимальной линейной оценки $\hat{X}(t, Y)$ процесса X по наблюдениям Y имеет место следующая теорема.

Теорема 1. Оптимальная линейная оценка $\hat{X}(t, Y)$ процесса X по наблюдениям Y равна первым m компонентам вектора $\pi(t, Y)$:

$$(\hat{X}_1(t, Y), \ldots, \hat{X}_m(t, Y)) = (\pi_1(t, Y), \ldots, \pi_m(t, Y)),$$

где $(k_1 + \cdots + k_m - m)$ – размерный векторный процесс $\pi(t, Y)$ удовлетворяет уравнениям обобщенного фильтра Калмана с заменой процесса y на реальный процесс наблюдений Y.

Пример. Приведем пример, который демонстрирует анонсированные в заголовке робастные свойства оптимальных линейных оценок. Как отмечалось, эти свойства особенно проявляются тогда, когда реальный ненаблюдаемый процесс значительно отличается от рассматриваемой математической модели. С такой ситуацией приходится, в частности, сталкиваться в задачах оценки элементов движения маневрирующих динамических объектов.

На рис. 1 и 2 представлены оценки, даваемые оптимальным нелинейным (рис. 1) и линейным (рис. 2) фильтрами, априорно рассчитанными для оценки состояний скачкообразного марковского процесса с четырьмя наблюдаемыми на фоне шума состояниями (a_1, a_2, a_3, a_4), значения которых приведены на рисунках. Однако реальные наблюдения осуществляются за процессом, отмеченным на рисунках сплошной плавной кривой. Как видно из рисунков, там, где реальный процесс мало отличается от предписанных состояний (a_4 и a_3 на рисунках), линейный и нелинейный фильтры дают удовлетворительные оценки. Там же, где траектория реального процесса проходит между предписанными состояниями, оценки линейного фильтра оказываются намного точнее. «Обманутый» оптимальный нелинейный фильтр «не понимает» промежуточного состояния и начинает «метаться» между предписанными состояниями (a_2 и a_1 на рисунках).

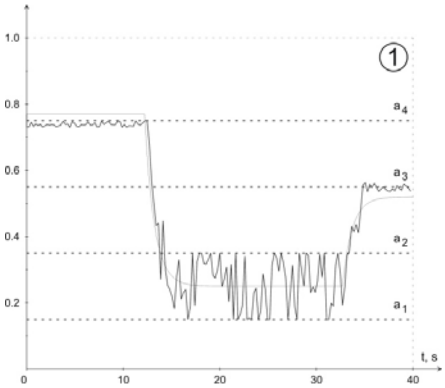

Рис. 1. Оцениваемая траектория и оценка оптимального нелинейного фильтра, рассчитанного на состояния (a_1, a_2, a_3, a_4) скачкообразного процесса

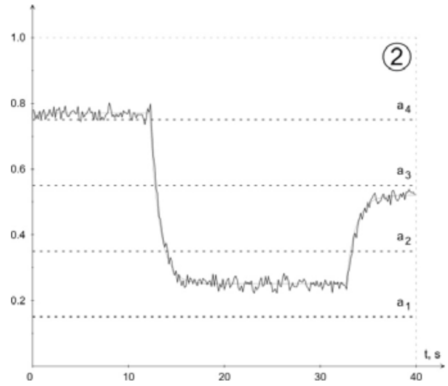

Рис. 2. Оцениваемая траектория и оценка оптимального линейного фильтра, рассчитанного на состояния (a_1, a_2, a_3, a_4) скачкообразного процесса

Для сравнения на рис. 3 представлена оценка, даваемая оптимальным линейным фильтром, рассчитанным на два состояния (b_1, b_2), где

$$b_1 = \frac{a_1 + a_2}{2}, \qquad b_2 = \frac{a_3 + a_4}{2}.$$

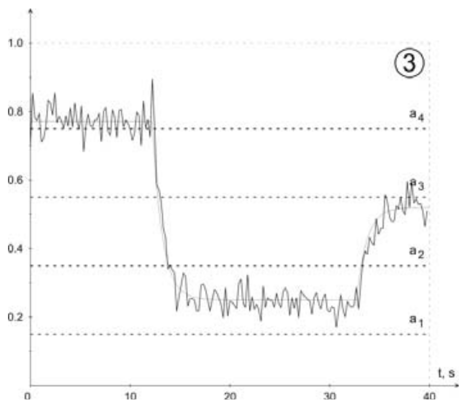

Рис. 3. Оцениваемая траектория и оценка оптимального линейного фильтра, рассчитанного на два состояния (b_1, b_2) скачкообразного процесса

Приложение. В этом разделе приводятся уравнения обобщенного фильтра Калмана для рассматриваемых в работе процессов. Для простоты мы преобразуем уравнения системы (1), (2) к системе уравнений с общей скалярной мерой [4].

Обозначим $\operatorname{var} a(t) = \sum_{ij} \operatorname{var}\, a_{ij}(t)$ сумму вариаций элементов матрицы $a(s)$ для $s \in [0,t]$. Аналогичные обозначения будем использовать для матриц $A(t)$ и $\mathbf{E}\langle Z\rangle_t$. Положим

$$\mu(t) = t + \operatorname{var}\, a(t) + \operatorname{var}\, A(t) + \operatorname{var}\, \mathbf{E}\langle Z\rangle_t$$

и пусть $g(t)$ – любой из элементов матриц $a(t),\ A(t),\ \mathbf{E}\langle Z\rangle_t$. Тогда имеет место абсолютная непрерывность мер $\mathrm{d}g(\cdot) \ll \mathrm{d}\mu(\cdot)$. Далее, обозначим через $b_{ij}(t)$ производную Радона-Никодима меры $\mathrm{d}a_{ij}(\cdot)$ по мере $\mathrm{d}\mu(\cdot)$, а через b – матрицу с элементами $b_{ij}(t), \quad i,j=\overline{1,m}$. Тогда $da(t) = b(t)\mathrm{d}\mu(t)$. Аналогично представляем

$$\mathrm{d}A(t) = B(t)\mathrm{d}\mu(t),$$
$$\mathrm{d}\mathbf{E}\langle Z\rangle_t = \beta(t)\mathrm{d}\mu(t),$$
$$\mathrm{d}t = \theta(t)\mathrm{d}\mu^c(t).$$

В новых обозначениях система (1), (2) переписывается в виде

$$X(t) = \int_{]0,t]} b(s)X(s-)\mathrm{d}\mu(s) + Q(t),$$
$$Y(t) = \int_{]0,t]} B(s)X(s-)\mathrm{d}\mu(s) + Z(t).$$

Уравнения (4), (5) принимают соответственно вид

$$u(t) = u_0 + v(t) + \int_{]0,t]} h(s)u(s-)\mathrm{d}\mu(s) + w(t), \tag{6}$$

$$y(t) = \int_{]0,t]} H(s)u(s-)\mathrm{d}\mu(s) + z(t), \tag{7}$$

где $w = (w(t))_{t\geq 0}$ – винеровский мартингал с квадратической характеристикой $\mathrm{d}\langle w\rangle_t = \kappa(t)\mathrm{d}\mu(t)$ и

$$\kappa(t) = \begin{pmatrix} \bar{J} \\ -- \\ E \end{pmatrix} R(t)R^*(t) \begin{pmatrix} \bar{J} \\ -- \\ E \end{pmatrix}^* \theta(t)\ ;$$

$$u_0 = \begin{pmatrix} \bar{J}I(0) + \alpha \\ ----- \\ I(0) \end{pmatrix}; \quad v(t) = \begin{pmatrix} \bar{J}\lambda(t) \\ --- \\ \lambda(t) \end{pmatrix};$$

$$h(t) = \begin{pmatrix} b(t) & | & O \\ --- & | & --- \\ O & | & \Lambda(t)\theta(t) \end{pmatrix};$$

$$H(t) = [B(t)\vdots O].$$

Для системы (6), (7) справедливы следующие уравнения обобщенной калмановской фильтрации [4]:

$$\pi(t,Y) = \pi_0 + v(t) + \int_{]0,t]} h(s)\pi(s-,Y)\mathrm{d}\mu(s) +$$
$$+ \int_{]0,t]} \Gamma(s)[\mathrm{d}Y(s) - H(s)\pi(s-,Y)\mathrm{d}\mu(s)],$$

где $\pi_0 = \mathbf{E}u_0$ и

$$\Gamma(t) = [E + h(t)\Delta\mu(t)]\gamma(t-)H^*(t)[\beta(t)+$$
$$+H(t)\gamma(t-)H^*(t)\Delta\mu(t)]^+.$$

Здесь «+» – символ псевдообращения, $\Delta\mu(t) = \mu(t) - \mu(t-)$, а матрично-значная функция $\gamma(t)$ удовлетворяет обобщенному уравнению Рикатти с мерой

$$\gamma(t) = \gamma_0 + \int_{]0,t]} [\kappa(s) + h(s)\gamma(s) + \gamma(s)h^*(s)]\mathrm{d}\mu(s)+$$
$$+\int_{]0,t]} \Gamma(s)[\beta(s) + H(s)\gamma(s-)H^*(s)\Delta\mu(s)]\Gamma^*(s)\mathrm{d}\mu(s)+$$
$$+\sum_{\tau_i \le t} h(\tau_i)\gamma(\tau_i-)h^*(\tau_i)(\Delta\mu(\tau_i))^2,$$

где $\gamma_0 = \mathrm{cov}\ (\pi_0, \pi_0^*)$, а $\tau_i,\ i = 1, 2, \dots$ – детерминированные моменты скачков меры $\mathrm{d}\mu(\cdot)$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Krichagina N.V., Liptser R.Sh. and Rubinovich E.Ya.* Kalman filter for Markov processes // In: Statistics and control of stochastic processes. – New York: Publ. Div., 1985. – P. 197-213.
2. *Капылов А.К.* О нелинейной фильтрации случайных процессов при дискретно поступающих данных // Problems of Control and Information Theory. – 1979. – Vol. 8 (1). – P. 39-54.
3. *Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н.* Статистика случайных процессов. – М.: Наука, 1974. – 696 с.
4. *Miller B.M., Rubinovich E.Ya.* Regularization of a generalized Kalman filter // Mathematics and Computers in Simulation. – 1995. – Vol. 39. – P. 87-108.

Статью рекомендовал к опубликованию д.т.н. Е.П. Маслов.

Рубинович Евгений Яковлевич – Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова Российской академии наук; e-mail: rubinvch@ipu.rssi.ru; 117997, г. Москва, ул. Профсоюзная, 65; тел.: 84953349111; д.т.н.; профессор; зам. директора по научной работе.

Rubinovich Evgeny Yakovlevich – V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences; e-mail: rubinvch@ipu.rssi.ru; 65, Profsoyuznaya street, Moscow, 117997, Russia; phone: +74953349111; dr. of eng. sc.; professor; deputy director on R&D.

УДК 681.5-192

А.Б. Филимонов, Н.Б. Филимонов

АВТОМАТ ОГРАНИЧЕНИЙ УПРАВЛЯЕМЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ*

Обсуждается концепция гомеостатического управления, основанная на распространении феномена гомеостаза живых организмов на технические системы. Технический смысл гомеостаза заключается в ограничении контролируемых динамических параметров системы. Данные функции возлагаются на автомат ограничений. Предлагаются механизмы функционирования автоматов ограничений на основе концепции динамических барьеров в фазовом пространстве системы и стратегий упреждающего гомеостатического управления. Развивается полиэдральная методология синтеза автомата ограничений.

Гомеостаз в технических системах; автомат ограничений, динамические барьеры; упреждающее гомеостатическое управление; полиэдральный подход.

---

* Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 13-08-00161.