2. *Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Бондаренко Ю.С.* Оценка погрешности решения уравнения диффузии на основе схем с весами // Известия ЮФУ. Технические науки.– 2011. – № 8 (121). – С. 6-13.
3. *Сухинов А.И., Тимофеева Е.Ф. Чистяков А.Е.* Построение и исследование дискретной математической модели расчета прибрежных волновых процессов // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2011. – № 8 (121). – С. 22-32.
4. *Самарский А.А., Николаев Е.С.* Методы решения сеточных уравнений. – М.: Наука, 1978.
5. *Коновалов А.Н.* К теории попеременно-треугольного итерационного метода // Сибирский математический журнал. – 2002. – № 43:3. – С. 552-572.
6. *Чистяков А.Е.* Теоретические оценки ускорения и эффективности параллельной реализации ПТМ скорейшего спуска // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2010. – № 6 (107). – С. 237-249.
7. *Чистяков А.Е.* Об аппроксимации граничных условий трехмерной модели движения водной среды // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2010. – № 6 (107). – С. 66-77.
8. *Фоменко Н.А.* Моделирование гидродинамических процессов при обтекании корпуса судна // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2011. – № 8 (121). – С. 139-147.
9. *Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Проценко Е.А.* Построение дискретной двумерной математической модели транспорта наносов // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2011. – № 8 (121). – С. 32-44.

Статью рекомендовал к опубликованию д.т.н., профессор Я.Е. Ромм.

Сухинов Александр Иванович – Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Южный федеральный университет»; e-mail: sukhinov@gmail.com; 347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44; тел.: 89281021106; д.ф.-м.н.; профессор.

Чистяков Александр Евгеньевич – e-mail: cheese_05@mail.ru; тел.: 88634371606; кафедра высшей математики; доцент.

Фоменко Наталья Алексеевна – e-mail: fomenko.n86@mail.ru; тел.: 89034855580; кафедра высшей математики; ассистент.

Sukhinov Alexander Ivanovich – Federal State-Owned Autonomy Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”; e-mail: sukhinov@gmail.com; 44, Nekrasovskiy, Taganrog, 347928, Russia; phone: +79281021106; dr. of phis.-math. sc.; professor.

Chistyakov Alexander Evgenjevich – e-mail: cheese_05@mail.ru; phone: +78634371606; the department of higher mathematics; associate professor.

Fomenko Natalya Alexeevna – e-mail: fomenko.n86@mail.ru; phone: +79034855580; the department of higher mathematics; assistant.

УДК 532.5.031

А.И. Сухинов, А.Е. Чистяков, М.Д. Чекина

ОПИСАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПРОЦЕССА ПЕРЕМЕЩЕНИЯ СЫПУЧИХ ВЕЩЕСТВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ УРАВНЕНИЯ СЕН-ВЕНАНА

Рассматривается описание математической модели процесса перемещения сыпучих веществ с использованием уравнения Сен-Венана. Для системы дифференциальных уравнений, описывающих данную модель, получены дискретные аналоги. С помощью метода контрольных объемов, применяющегося для дискретизации модели, достигнута высокая точность аппроксимации, в том числе и на грубых сетках. На основе полученной модели разработан комплекс программ, с помощью которого производится численное моделирование *изменения функции уровня при распространении сыпучих веществ. Результаты, полученные в ходе численных экспериментов, демонстрируют динамику транспорта вещества, являются физичными и согласуются с ожидаемыми.*

Сыпучее вещество; уравнение Сен-Венана; транспорт вещества; математическое моделирование; дискретная модель

A.I. Sukhinov, A.E. Chistyakov, M.D. Chekina

MATHEMATIC MODEL OF PROCESS OF GRANULAR SUBSTANCE'S TRANSIT, WITH USING ON SAINT-VENANT'S EQUATION

The purpose of this research paper is to describe mathematical model of process of granular substance transit with using of Saint-Venant's equation. For a system of differential equations describing the model are derived discrete counterpartsand. High accuracy of approximation is achieved through taking into account fullness of control volumes. On the basis of the model developed comprehensive program, which is produced by numerical simulation function changes at the level of distribution of solids. The results obtained in the course of the numerical experiments demonstrate the dynamics of the transport of matter, physicality, and are consistent with the expected.

Granular substance; Saint-Venant's equation; substance transit; mathematical modeling; discrete model

Введение. Сыпучее вещество – одна из разновидностей сплошной среды, состоящая из множества отдельных макроскопических твёрдых частиц, теряющих механическую энергию при контактном взаимодействии друг с другом.

Физика сыпучего вещества относится к физике мягкого вещества и рассматривает вопросы статики и динамики сыпучих тел. На практике это может касаться случаев песка, грунтов, зерна, цемента и т. д.

Также рассматриваются свойства сыпучих тел и их напряжённое состояние.

В практическом плане это позволяет рассчитать прочность оснований сооружений или устойчивость откосов, а также можно определить давление сыпучего тела на подпорные стены, на стенки хранилищ, на заглубленные сооружения и др.

Цели данной работы: описать математическую модель транспорта сыпучих веществ на основе двумерного уравнения Сен-Венана, построить дискретную схему повышенной точности, разработать комплекс программ для численной реализации поставленной задачи и визуализировать полученные результаты.

Аппроксимация уравнений системы проводится с помощью метода конечных объемов. Это позволяет рассматривать задачу в произвольной области со ступенчатой формой границы. В результате такой аппроксимации расчеты на границе области будут более точными, чем при использовании аппроксимации интегро-интерполяционным методом.

Постановка задачи. Задача транспорта сыпучих веществ (модель песочные часы) может быть представлена двумерным уравнением Сен-Венана [1–3]:

$$\frac{\partial H}{\partial t}+\frac{\partial Q_x}{\partial x}+\frac{\partial Q_y}{\partial y}=f, \tag{1}$$

$$Q=\begin{cases} A\left|\vec{\tau}\right|^{\beta-1}\vec{\tau}, & \left|\vec{\tau}\right|\ge\tau_0 \\ 0, & \left|\vec{\tau}\right|<\tau_0 \end{cases}, \tag{2}$$

где H – функция уровня; $\vec{Q}=\left\{Q_x,Q_y\right\}$ – поток вектора скорости перемещения вещества, $\left|\vec{Q}\right|=Q$; x, y – горизонтальные декартовы координаты; A – постоянная; τ

– касательное напряжение на дне; τ_0 – критическое значение напряжение, при котором начинается движение сыпучих веществ; f – функция, описывающая интенсивность и распределение источников.

При помощи уравнения (1) также можно описывать динамику изменения рельефа при транспорте наносов селевых потоков и лавин, а также движение осадков.

Запишем касательное напряжение для наклонной поверхности дна

$$\vec{\tau} = -\alpha \sin S\vec{n}\,, \tag{3}$$

где $S(x, y, t)$ – острый угол между вектором нормали к поверхности дна и вектором силы гравитации в момент времени t, $\vec{n}$ – единичный вектор, направленный в сторону градиента уровня; $\alpha \sin S\vec{n}$ – тангенциальное напряжение, вызванное гравитационными силами.

Соответственно поток вектора скорости представляется в виде

$$Q = A\varpi d\left|-\alpha \sin S\vec{n}\right|^{\beta-1}(-\alpha \sin S\vec{n})\,. \tag{4}$$

Сделаем следующее допущение:

$$\sin S \approx tgS = \sqrt{\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)^2}\,. \tag{5}$$

Подставим (5) в (4) при этом поток вектора скорости запишется в виде

$$Q = A\left|\alpha\, gradH\right|^{\beta-1}(-\alpha\, gradH). \tag{6}$$

Запишем исходное уравнение транспорта сыпучих веществ (1) с учетом выражения (6)

$$\frac{\partial H}{\partial t} = div\left(k\,gradH\right) + f\,,\quad k = \begin{cases} A\alpha^{\beta}\left|gradH\right|^{\beta-1}, & \left|gradH\right| \ge tg\varphi, \\ 0, & \left|gradH\right| < tg\varphi, \end{cases} \tag{7}$$

где φ – критическое значение угла скоса, при котором начинается движение сыпучих веществ.

Уравнение (7) дополняется начальным условием:

$$H(x, y, 0) = H_0(x, y). \tag{8}$$

На границе отсутствует поток, вызванный влиянием гравитационных сил:

$$H_n'(x, y, t) = 0 \text{ при } (x, y) \in \gamma\,. \tag{9}$$

Таким образом, имеем непрерывную двумерную математическую модель транспорта сыпучих веществ (7)–(9).

Построение дискретной модели. Построим разностную схему, аппроксимирующую уравнение (7) с соответствующими граничными и начальными условиями (8)–(9).

Расчетная область вписана в прямоугольник. Покроем область равномерной прямоугольной расчетной сеткой $\omega = \omega_t \times \omega_x \times \omega_y$:

$$\omega_t = \left\{t^n = nh_t,\ 0 \le n \le N_t - 1,\ l_t = h_t(N_t - 1)\right\},$$

$$\omega_x = \left\{x_i = ih_x,\ 0 \le i \le N_x - 1,\ l_x = h_x(N_x - 1)\right\},$$

$$\omega_y = \left\{y_j = jh_y,\ 0 \le j \le N_y - 1,\ l_y = h_y(N_y - 1)\right\},$$

где n, i, j – индексы по временной координате и пространственным координатным направлениям Ox, Oy соответственно; h_t, h_x, h_y – шаги по временной координате и пространственным координатным направлениям Ox, Oy соответственно;

N_t, N_x, N_y – количество узлов по временной координате и пространственным координатным направлениям Ox, Oy соответственно; l_t, l_x, l_y – длина расчетной области по временной координате и пространственным координатным направлениям Ox, Oy соответственно.

С учетом дискретного аналога оператора диффузионного переноса разностная схема, аппроксимирующая уравнение (7), запишется в следующем виде:

$$\left(q_0\right)_{i,j} \frac{H_{i,j}^{n+1} - H_{i,j}^{n}}{h_t} = \left(q_1\right)_{i,j} k_{i+1/2,j}^{n} \frac{H_{i+1,j}^{n+\sigma} - H_{i,j}^{n+\sigma}}{h_x^2} - \left(q_2\right)_{i,j} k_{i-1/2,j}^{n} \frac{H_{i,j}^{n+\sigma} - H_{i-1,j}^{n+\sigma}}{h_x^2} +$$

$$+ \left(q_3\right)_{i,j} k_{i,j+1/2}^{n} \frac{H_{i,j+1}^{n+\sigma} - H_{i,j}^{n+\sigma}}{h_y^2} - \left(q_4\right)_{i,j} k_{i,j-1/2}^{n} \frac{H_{i,j}^{n+\sigma} - H_{i,j-1}^{n+\sigma}}{h_y^2} + \left(q_0\right)_{i,j} f_{i,j}, \tag{10}$$

где $k_{i+1/2,j}^{n} = A\alpha^{\beta} \left| \left(gradH\right)_{i+1/2,j}^{n} \right|^{\beta-1}, \left|gradH\right| \ge tg\varphi$; q_0, q_1, q_2, q_3, q_4 – коэффициенты заполненности контрольных областей [9]; $H_{i,j}^{n+\sigma} = \sigma H_{i,j}^{n+1} + \left(1-\sigma\right) H_{i,j}^{n}$.

Для получения аппроксимации выражения $gradH\big|_{\left(x_{i+1/2}, y_j\right)}$ нужно уравнение $W = gradH$ проинтегрировать по области D_{xy}:

$$D_{xy} \in \left\{ x \in \left[x_i, x_{i+1}\right], y \in \left[y_{j-1/2}, y_{j+1/2} \right] \right\}.$$

После вычисления полученных интегралов аппроксимация $gradH\big|_{\left(x_{i+1/2}, y_j\right)}$ выразится следующим образом:

$$\left(gradH\right)_{i+1/2,j} = \frac{H_{i+1,j} - H_{i,j}}{h_x} \overline{i} + \left(o_{i,j} \frac{H_{i+1/2,j+1} - H_{i+1/2,j}}{\left(o_{i,j} + o_{i,j-1}\right) h_y} + \right.$$

$$\left. + o_{i,j-1} \frac{H_{i+1/2,j} - H_{i+1/2,j-1}}{\left(o_{i,j} + o_{i,j-1}\right) h_y} \right) \overline{j}, \tag{11}$$

где $\overline{i}, \overline{j}$ – единичные векторы, направленные вдоль координатных осей Ox, Oy соответственно, $o_{i,j}$ – заполненность ячейки (i, j).

Аналогичным образом можно получить следующую аппроксимацию:

$$\left(gradH\right)_{i,j+1/2} = \left(o_{i,j} \frac{H_{i+1,j+1/2} - H_{i,j+1/2}}{\left(o_{i,j} + o_{i-1,j}\right) h_x} + \right.$$

$$\left. + o_{i-1,j} \frac{H_{i,j+1/2} - H_{i-1,j+1/2}}{\left(o_{i,j} + o_{i-1,j}\right) h_x} \right) \overline{i} + \frac{H_{i,j+1} - H_{i,j}}{h_y} \overline{j}. \tag{12}$$

Выражение (10) с аппроксимациями (11)–(12) задают дискретную модель транспорта сыпучих веществ.

Результаты численных экспериментов. На рис. 1 представлены результаты численного моделирования изменения функции уровня при распространении сыпучих веществ, при этом функция решения в начальный момент представляла собой горизонтальную плоскость, источник задавался точечной функцией. Из рисунка видно, что решение при этом обладает цилиндрической симметрией.

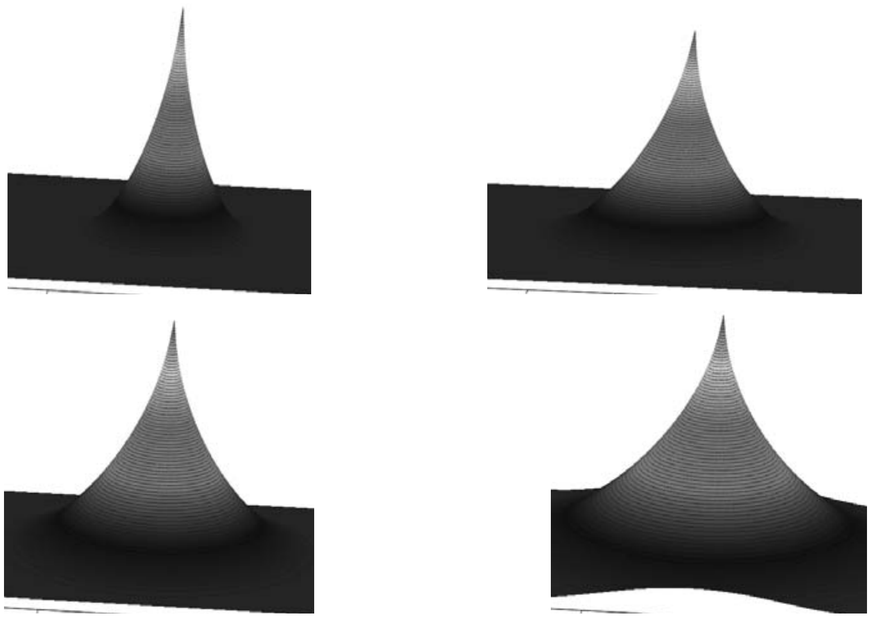

Рис. 1. Динамика транспорта веществ от точечного источника на горизонтальной плоскости

На рис. 2 представлены результаты численного моделирования изменения функции уровня при распространении сыпучих веществ, при этом функция решения в начальный момент представляла собой наклонную плоскость, источник также задавался точечной функцией. Из рисунка видно, что вещество перемещается в сторону уменьшения функции уровня.

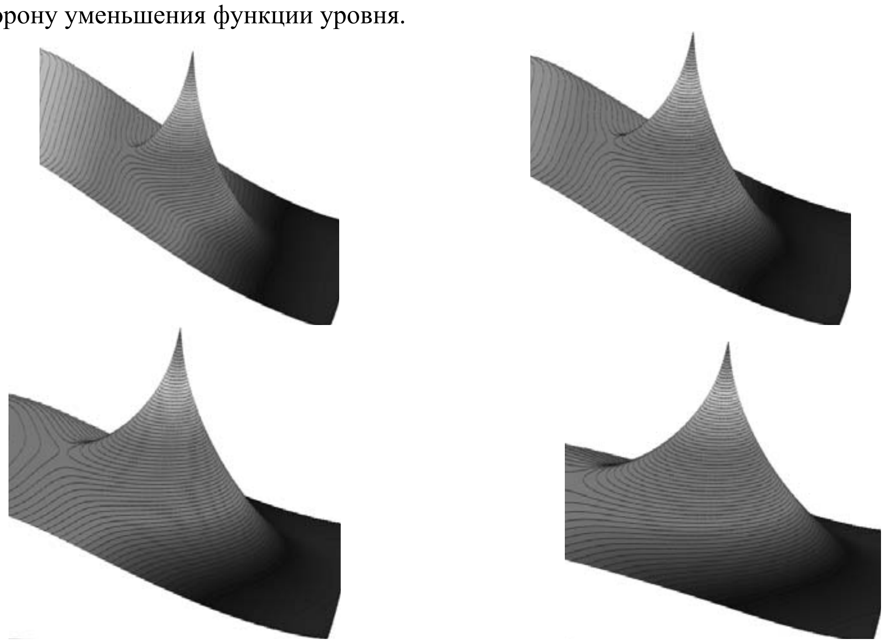

Рис. 2. Динамика транспорта веществ от точечного источника на наклонной плоскости

На рис. 3 представлены результаты численного моделирования изменения функции уровня в случае распределенного источника. Из рисунка видно, что решение также обладает цилиндрической симметрией, как и в случае точечного источника, но при этом значение угла вершины становится больше.

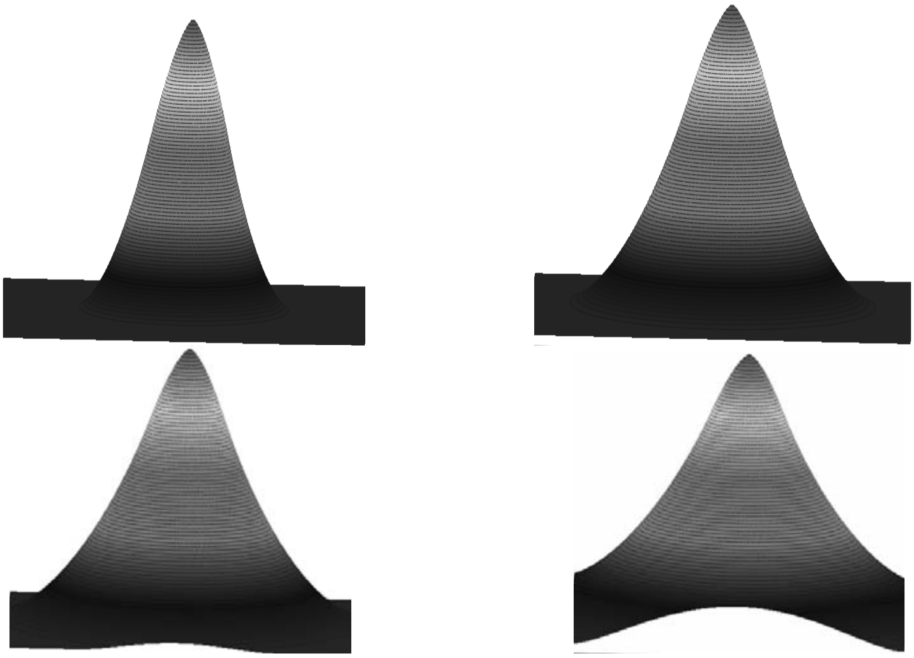

Рис. 3. Динамика транспорта веществ от распределенного источника

Вывод. В данной работе описана модель транспорта сыпучих веществ на основе уравнения Сен-Венана. Для системы дифференциальных уравнений, описывающих данную модель, составлены дискретные аналоги, разработан комплекс программ. Результаты численного моделирования, представленные на рисунках, являются физичными и согласуются с ожидаемыми.

Отличительной особенностью разработанных алгоритмов и выполненной на их основе программной реализации является более высокая точность дискретизации, чем при дискретизации на основе интегроинтерполяционного метода. Такая точность достигается за счёт использования метода контрольных объёмов, обеспечивающего учет заполненности ячеек сетки при реализации дискретных алгоритмов. Это позволяет получать достаточно высокую точность даже на грубых сетках за счет более точной аппроксимации границы.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Сухинов А.И.* Прецизионные модели гидродинамики и опыт применения в предсказании и реконструкции чрезвычайных ситуаций в Азовском море // Известия ТРТУ. – 2006. – № 3 (58). – С. 228-235.
2. *Сухинов А.И., Никитина А.В., Чистяков А.Е.* Моделирование сценария биологической реабилитации Азовского моря // Математическое моделирование. – 2012. – Т. 24, № 9. – С. 3-21.
3. *Сухинов А.И., Тимофеева Е.Ф. Чистяков А.Е.* Построение и исследование дискретной математической модели расчета прибрежных волновых процессов // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2011. – № 8 (121). – С. 22-32.

4. *Сухинов А.И., Чекина М.Д.* Математическое моделирование процессов накопления и фильтрации осадков с помощью супервычислительных систем // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2010. – № 6 (107). – С. 103-113.
5. *Сухинов А.И., Чистяков А.Е.* Адаптивный модифицированный попеременно-треугольный итерационный метод для решения сеточных уравнений с несамосопряженным оператором // Математическое моделирование. – 2012. – Т. 24, № 1. – С. 3-21.
6. *Сухинов А.И., Чистяков А.Е.* Параллельная реализация трехмерной модели гидродинамики мелководных водоемов на супервычислительной системе // Вычислительные методы и программирование: Новые вычислительные технологии. – 2012. – Т. 13. – С. 290-297.
7. *Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Алексеенко Е.В.* Численная реализация трехмерной модели гидродинамики для мелководных водоемов на супервычислительной системе // Математическое моделирование. – 2011. – Т. 23, № 3. – С. 3-21.
8. *Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Бондаренко Ю.С.* Оценка погрешности решения уравнения диффузии на основе схем с весами // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2011. – № 8 (121). – С. 6-13.
9. *Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Проценко Е.А.* Двумерная гидродинамическая модель, учитывающая динамическое перестроение геометрии дна мелководных водоемов // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2011. – № 8 (121). – С. 159-167.
10. *Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Проценко Е.А.* Построение дискретной двумерной математической модели транспорта наносов // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2011. – № 8 (121). – С 32-44.
11. *Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Тимофеева Е.Ф., Шишеня А.В.* Математическая модель расчета прибрежных волновых процессов // Математическое моделирование. – 2012. – № 6 (107). – С. 66-77.
12. *Чистяков А.Е.* Об аппроксимации граничных условий трехмерной модели движения водной среды // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2010. – № 6 (107). – С. 66-77.
13. *Чистяков А.Е.* Теоретические оценки ускорения и эффективности параллельной реализации ПТМ скорейшего спуска // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2010. – № 6 (107). – С. 237-249.

Статью рекомендовал к опубликованию д.т.н., профессор Я.Е. Ромм.

Сухинов Александр Иванович – Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Южный федеральный университет»; e-mail: sukhinov@gmail.com; 347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44; тел.: 89281021106; д.ф.-м.н.; профессор.

Чистяков Александр Евгеньевич – e-mail: cheese_05@mail.ru; тел.: 88634371606; кафедра высшей математики; доцент.

Чекина Мария Дмитриевна – e-mail: elfik55@gmail.com; тел.: 89281541526; кафедра высшей математики; аспирантка.

Sukhinov Alexander Ivanovich – Federal State-Owned Autonomy Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”; e-mail: sukhinov@gmail.com; 44, Nekrasovskiy, Taganrog, 347928, Russia; phone: +79281021106; dr. of phis.-math. sc.; professor.

Chistyakov Alexander Evgenjevich – e-mail: cheese_05@mail.ru; phone: +78634371606; the department of higher mathematics; associate professor.

Chekina Maria Dmitrievna – e-mail: elfik55@gmail.com; phone: +79281541526; the department of higher mathematics; postgraduate student.