УДК 539.3

А.А. Илюхин, А.К. Попов

МИКРОПОЛЯРНАЯ МОДЕЛЬ ДЕФОРМАЦИИ ЕСТЕСТВЕННО-ЗАКРУЧЕННОГО ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ТЕЛА*

Исследовано растяжение естественно-закрученного цилиндрического тела силой, приложенной к торцевому сечению и возникающие в результате этого эффекты. Решение задачи построено в перемещениях. Найдены компоненты вектора перемещений, тензора силовых и моментных напряжений, удовлетворяющие уравнениям равновесия и граничным условиям на основаниях и боковой поверхности. Определено среднее значение кручения для всего поперечного сечения исследуемого цилиндрического тела. Граничные условия на боковой поверхности естественно-закрученного цилиндрического тела привели к нахождению функции, определяющей депланацию поперечного сечения тела из задачи Неймана для уравнения Лапласа.

Микрополярная модель; растяжение; естественно-закрученный стержень.

A.A. Ilyukhin, A.K. Popov

MICROPOLAR MODEL OF DEFORMATION NATURAL THE TWIRLED CYLINDRICAL BODY

In work stretching natural the twirled cylindrical body is investigated by the force attached to face section and effects resulting it. The solution of a task is constructed in movings. Components of a vector of movings, a tensor of the power and momentny tension, satisfying to the equations of balance and boundary conditions on the bases and a lateral surface are found. Average value of torsion for all cross-section section of a studied cylindrical body is defined. Boundary conditions on a lateral surface natural the twirled cylindrical body led to finding of function defining a deplanatsiya of cross-section section of a body from Neumann's task for Laplas's equation.

Micropolar model; the stretching; natural the twirled core.

В работах В.Я. Принца, Н.К. Гутаковского и других сотрудников Института полупроводников СОРАН в г. Новосибирске по исследованию напряженно-деформированного состояния кристаллов, по формированию различных наноструктур оказалось весьма полезным учитывать и вращательное взаимодействие частиц, которое несмотря на относительную малость по сравнению с классическим взаимодействием, оказывает влияние на устойчивость структур [4]. Исследование конфигураций молекул ДНК с помощью механического подхода к формированию определенного типа устойчивых их состояний [2, 3] выявило большую сопротивляемость к разрушению конфигурации, что подтвердили исследования в рамках моментной теории упругости [3]. В монографии [1] приведены решения ряда задач моментной теории упругости. Однако ряд классических задач остались нерешенными. Одной из таких нерешенных задач является задача, решение которой приводится в данной статье.

Рассмотрим задачу об упругом равновесии стержня под действием растягивающих усилий, приложенных к торцевому сечению и статически эквивалентных силе P, параллельной оси стержня и приложенной в центре тяжести свободного торцевого сечения. Рассматриваемый стержень подвержен осевому растяжению.

* Данная статья написана при финансовой поддержке государственного задания Министерства образования и науки РФ ФГБОУ ВПО «ТГПИ имени А.П. Чехова» по проекту № 1.1885.2011.

Массовыми силами пренебрегаем. Задача об упругом равновесии стержня при указанных условиях сводится к нахождению компонент тензоров напряжений, удовлетворяющих в области, занятой телом, дифференциальным уравнениям равновесия при отсутствии массовых сил и граничным условиям.

Начало координат выберем в центре тяжести одного из сечений, оси x и y направим по главным осям сечения, а за ось z примем ось стержня. При описании деформации упругой микрополярной среды будем использовать криволинейные координаты x^1, x^2, x^3, связанные с декартовыми координатами x, y, z соотношениями

$$x^1 = x + \tau_0 yz, x^2 = y - \tau_0 xz, x^3 = z, x = x^1 - \tau_0 x^2 x^3, y = x^2 + \tau_0 x^1 x^3, z = x^3.$$

Величину τ_0 называем естественной круткой и будем считать её малой.

Символы Кристоффеля $\tilde{A}_{sk}^{m}$ второго рода равны:

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{13}^1 = \Gamma_{22}^1 = \Gamma_{33}^1 = \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{22}^2 = \Gamma_{23}^2 = \Gamma_{33}^2 = 0,$$

$$\Gamma_{11}^3 = \Gamma_{12}^3 = \Gamma_{13}^3 = \Gamma_{22}^3 = \Gamma_{23}^3 = \Gamma_{33}^3 = 0,\ \Gamma_{23}^1 = -\tau_0 \quad \Gamma_{13}^2 = \tau_0.$$

Проекции n_1,n_2,n_3 вектора нормали **n** к боковой поверхности естественно-закрученного стержня определяются выражениями

$$n_1 = \frac{dx^2}{dl},\ n_2 = -\frac{dx^1}{dl}, n_3 = \tau_0(x^2 n_1 - x^1 n_2). \tag{1}$$

Решение в перемещениях поставленной задачи будем искать в виде

$$\begin{gathered} u_1 = A_{11}x^1 + A_{12}x^2 + A_{13}x^3 + \tau_0(D_{11}x^1 + D_{12}x^2 + D_{13}x^3 + \\ + B_{11}\left(x^1\right)^2 + B_{12}x^1x^2 + B_{13}x^1x^3 + B_{22}\left(x^2\right)^2 + B_{23}x^2x^3 + B_{33}\left(x^3\right)^2); \\ u_2 = A_{21}x^1 + A_{22}x^2 + A_{23}x^3 + \tau_0(C_{11}\left(x^1\right)^2 + C_{12}x^1x^2 + D_{21}x^1 + D_{22}x^2 + \\ + D_{23}x^3 + C_{13}x^1x^3 + C_{22}\left(x^2\right)^2 + C_{23}x^2x^3 + C_{33}\left(x^3\right)^2); \\ u_3 = A_{31}x^1 + A_{32}x^2 + A_{33}x^3 + \tau_0\left(p_1\varphi + E_{13}x^1x^3 + E_{23}x^2x^3 + E_{33}\left(x^3\right)^2\right), \end{gathered} \tag{2}$$

где $\varphi = \varphi\left(x^1, x^2\right)$ – некоторая функция, подлежащая определению.

Кинематические соотношения, закон Гука и уравнения равновесия микрополярной среды при отсутствии массовых сил и моментов имеют вид [4]

$$\begin{gathered} \gamma_{ij} = u_{i,j} - \in_{kij} \omega^k,\ \ \omega^k = \frac{1}{2} \in^{skt} r_t \left(\frac{\partial u_k}{\partial x^s} - \Gamma_{sk}^m u_m\right),\ \kappa_{ji} = \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} - \Gamma_{ij}^k \omega_k, \\ \sigma_{ij} = \lambda\delta_{ij}\gamma_{kk} + (\mu - \alpha)\gamma_{ij} + (\mu + \alpha)\gamma_{ij}, \mu_{ij} = \varepsilon\delta_{ij}\kappa_{kk} + (\upsilon - \beta)\kappa_{ij} + (\upsilon + \beta)\kappa_{ij},\ \sigma_{,j}^{ji} = 0, \\ \mu_{,j}^{ji} + \in^{ijk} \sigma_{jk} = 0. \end{gathered} \tag{3}$$

где γ_{ij}, κ_{ij}, σ_{ij}, μ_{ij} – компоненты ковариантного соответственно тензора деформаций, изгиба-кручения, напряжений и напряжений; u_i и ω^k, $\in^{skt}$ – ковариантные компоненты вектора перемещений и контравариантные компоненты псевдовектора собственного микроповорота и тензора Леви–Чивиты.

Предполагается, что латинские индексы принимают значения от 1 до 3 и по повторяющимся индексам подразумевается суммирование от 1 до 3.

Так как уравнения равновесия, учитывая равенства (2) и (3), представлены в виде разложения в ряд по степеням параметра τ_0, то коэффициенты, стоящие при соответствующих степенях параметра τ_0, должны равняться нулю. Учитывая независимость компонент x^1,x^2,x^3 друг от друга, константы, стоящие при соответствующих независимых переменных, также приравняем нулю:

$$\begin{gathered}
2(\lambda+2\mu)B_{11}+(\lambda+\mu)(C_{12}+E_{13})+\mu\left(2(B_{22}+B_{33})-3A_{23}\right)=0;\\
2(\lambda+2\mu)C_{22}+(\lambda+\mu)(B_{12}+E_{23})+\mu\left(2(C_{11}+C_{33})+3A_{13}\right)=0;\\
2\mu\left(C_{11}+2(C_{33}+A_{13})\right)+2(\lambda+2\mu)E_{23}+(\mu+2\lambda)B_{12}+4(\lambda+\mu)C_{22}=0;\\
4(\lambda+\mu)B_{11}+(\mu+2\lambda)C_{12}+2(\lambda+2\mu)E_{13}+2\mu\left(B_{22}+2(B_{33}-A_{23})\right)=0;\\
2C_{33}-E_{23}=0E_{13}-2B_{33}=0, E_{13}+2(B_{33}-A_{23})=0,\ 2(C_{33}+A_{13})+E_{23}=0;\\
(3\nu+\beta)(E_{13}-2B_{33})+(\nu+\beta)A_{23}-(\nu-\beta)(C_{12}-B_{22})=0;\\
(3\nu+\beta)(E_{23}-2C_{33})-(\nu+\beta)A_{13}-(\nu-\beta)(B_{12}-C_{11})=0.
\end{gathered}\tag{4}$$

Граничные условия на основании $x_3=0$ естественно-закрученного стержня:

$$\begin{gathered}
\int_S\sigma_{13}dS=\int_S\sigma_{23}dS=\int_S\sigma_{33}dS=0,\int_S(x_2\sigma_{33}+\mu_{31})dS=\int_S(-x_1\sigma_{33}+\mu_{32})dS=\\
=\int_S(x_1\sigma_{32}-x_2\sigma_{31}+\mu_{33})dS=0.
\end{gathered}\tag{5}$$

Граничные условия на основании $x_3=\ell$ естественно-закрученного стержня:

$$\begin{gathered}
\int_S\sigma_{13}dS=\int_S\sigma_{23}dS=0,\int_S\sigma_{33}dS=P,\int_S(x_2\sigma_{33}+\mu_{31})dS=\int_S(-x_1\sigma_{33}+\mu_{32})dS=\\
=\int_S(x_1\sigma_{32}-x_2\sigma_{31}+\mu_{33})dS=0.
\end{gathered}\tag{6}$$

Из формул (5) и (6) две группы граничных условий на основаниях естественно-закрученного стержня представлены следующим образом:

$$\begin{gathered}
\left(\left((C_{23}+B_{13})\lambda+2(\lambda+2\mu)E_{33}\right)\ell+(D_{11}+D_{22})\lambda\right)\tau_0+(A_{11}+A_{22})\lambda+(\lambda+2\mu)A_{33}=\frac{P}{S};\\
2((\lambda(B_{12}+2C_{22})+(\lambda+2\mu)E_{23})I_{11}+\nu S\tau_0\left(-\left(2(B_{33}-A_{23})\ell\right)-2D_{13}-2B_{33}\ell\right)+\\
+S\left(\nu\left((E_{23}-A_{13}-B_{12})+2(C_{11}-C_{33})\right)-\beta\left(2(C_{11}+C_{33})+A_{13}-B_{12}-E_{23}\right)-\nu A_{13}\right))=0;\\
2(-\left(\lambda(C_{12}+2B_{11})+(\lambda+2\mu)E_{13}\right)I_{22}+\nu S\tau_0\left(-\left(2(C_{33}+A_{13})\ell\right)-2D_{23}-2C_{33}\ell\right)+\\
+S\left(\nu(C_{12}+2B_{33}-A_{23}-2B_{22}-E_{13})-\beta\left(-2(B_{22}+B_{33})+A_{23}+C_{12}+E_{13}\right)-\nu A_{23}\right))=0;\\
p_1T+\mu\left((C_{13}+2A_{11})I_{22}+(-B_{23}+2A_{22})I_{11}\right)+\cdot S(C_{13}-B_{23})=0;\\
\tau_0\int_S\frac{\partial\varphi(x^1,x^2)}{\partial x^2}dS=-\left(\left(\left(2(C_{33}+A_{13})+E_{23}\right)\ell+D_{23}\right)\tau_0+A_{23}\right)\frac{S}{p_1};\\
\tau_0\int_S\frac{\partial\varphi(x^1,x^2)}{\partial x^1}dS=-\left(\left(\left(2(B_{33}-A_{23})+E_{13}\right)\ell+D_{13}\right)\tau_0+A_{13}\right)\frac{S}{p_1};\\
T=\mu\int_S\left(x^1\frac{\partial\varphi}{\partial x^2}-x^2\frac{\partial\varphi}{\partial x^1}+\left(x^1\right)^2+\left(x^2\right)^2\right)dS.
\end{gathered}\tag{7}$$

Первая группа граничных условий на боковой поверхности естественно-закрученного стержня имеет вид

$$(\sigma^{1k}+\tau_0 x^2\sigma^{3k})n_1+(\sigma^{2k}-\tau_0 x^1\sigma^{3k})n_2=0. \tag{8}$$

Третье уравнение первой группы граничных условий на боковой поверхности естественно-закрученного стержня с учетом равенств (4) и (7) сводится к условиям Неймана:

$$\frac{\partial\varphi\left(x^1,x^2\right)}{\partial n}=$$

$$=\frac{1}{\mu p_1}[((-(2A_{11}+C_{13})\mu+3\lambda A_{11}+(3\lambda+2\mu)A_{22}+(4\mu+3\lambda)A_{33})x^1-$$
$$-(C_{23}+3\cdot A_{12}+A_{21})\mu x^2-(2C_{33}+E_{23})\mu x^3-D_{23}\mu)\frac{dx^1}{dl}+((B_{13}+3\cdot A_{21}+A_{12})\mu x^1+$$
$$+(\mu(2A_{22}-B_{23})-(3\lambda+2\mu)A_{11}-3\lambda A_{22}-(4\mu+3\lambda)A_{33})x^2- \tag{9}$$
$$-\mu(2B_{33}+E_{13})x^3-\mu\cdot D_{13})\frac{dx^2}{dl}].$$

Задача определения функции $\varphi\left(x^1,x^2\right)$ есть, таким образом, задача Неймана (9) для уравнения Пуассона:

$$\Delta\varphi=(2\mu\left(A_{21}-A_{12}\right)-\left(\lambda+\mu\right)\left(C_{23}+B_{13}\right)-2\left(\lambda+2\cdot\mu\right)E_{33})/\mu p_1. \tag{10}$$

С учетом взаимосвязей между константами (6),(8) равенство (11) преобразуется к виду $\Delta\varphi=0$.

Вторая группа граничных условий на боковой поверхности естественно закрученного стержня имеет вид

$$(\mu^{1k}+\tau_0 x^2\mu^{3k})n_1+(\mu^{2k}-\tau_0 x^1\mu^{3k})n_2=0. \tag{11}$$

Первое и второе равенства (11), в результате интегрирования по контуру ℓ примут вид

$$\frac{\partial\varphi\left(x^1,x^2\right)}{\partial x^1}=$$

$$=\frac{1}{\nu p_1}[C_1+[-\left((2(C_{11}-C_{33})+E_{23}-B_{12}-A_{13})\frac{3\nu}{2}+(-2(C_{33}+C_{11})B_{12}+E_{23}-A_{13})\frac{\beta}{2}\right)\frac{\left(x^2\right)^2}{2}+$$
$$+((2(C_{33}-C_{11})+B_{12}-E_{23}+A_{13})\nu+\beta(2(C_{33}+C_{11})-E_{23}-B_{12}+A_{13}))\frac{\left(x^1\right)^2}{2}]\tau_0+$$
$$+\nu C_{13}\cdot x_2+x^1(-\frac{(\nu+\beta)}{2}\left(\frac{1}{\mu\cdot p_1}\left[2\mu(A_{12}-A_{21})+(\lambda+\mu)(C_{23}+B_{13})+2(\lambda+2\mu)E_{23}\right]\right)+$$
$$+(B_{13}-C_{23})\frac{\nu}{2}+(2(A_{12}-A_{21})-(B_{13}+C_{23}))\frac{\beta}{2})];$$

$$\frac{\partial\varphi\left(x^1,x^2\right)}{\partial x^2}=$$

$$=\frac{1}{\nu p_1}[C_2+[\left((2(B_{22}-B_{33})+A_{23}+E_{13}-C_{12})\frac{3\nu}{2}+(-2(B_{22}+B_{33})+A_{23}+C_{12}+E_{13})\frac{\beta}{2}\right)\frac{\left(x^1\right)^2}{2}+$$
$$+((A_{23}-2B_{33}+2B_{22}+E_{13}-C_{12})\nu+(-2B_{22}+C_{12}-2B_{33}+A_{23}+E_{13})\beta)\frac{\left(x^2\right)^2}{2}]\tau_0+p_1\nu B_{23}x^1-$$
$$-x^2[(B_{13}-C_{23})\frac{\nu}{2}+(2(A_{21}-A_{12})+B_{13}+C_{23})\frac{\beta}{2}+\frac{(\nu+\beta)}{2}\left(\frac{1}{\mu\cdot p_1}\left[2\mu(A_{12}-A_{21})+(\lambda+\mu)(C_{23}+B_{13})+2(\lambda+2\mu)E_{33}\right]\right)]].$$

Для разрешимости граничной задачи Неймана (9) должна выполняться взаимосвязь $B_{13} - C_{23} = 2\left(A_{12} - A_{21}\right)$.

Таким образом, каждая из двух групп граничных условий на боковой поверхности естественно-закрученного стержня приводит к одинаковой для каждой из групп задаче Неймана для уравнения Лапласа (10). Первые граничные условия (8) и третье граничное условие (11) на боковой поверхности естественно-закрученного стержня удовлетворяются тождественно выбором констант. В результате получаем следующие взаимосвязи между константами:

$$A_{11} = -\frac{\lambda p_1}{2\mu\left(3\lambda + 2\mu\right)},\ A_{22} = -\frac{\lambda p_1}{2\mu\left(3\lambda + 2\mu\right)},\ A_{33} = \frac{\left(\lambda + \mu\right)p_1}{\mu\left(3\lambda + 2\mu\right)},$$

$$D_{22} = \frac{\left(p - p_1\right)\left(\lambda + 2\mu\right)}{2\mu\tau_0\lambda},\ B_{23} = \frac{p_1\left(\left(3\lambda + 2\mu\right)T - I_p\lambda\right)}{\left(3\lambda + 2\mu\right)\mu I_p + 2\left(3\lambda + 2\mu\right)\nu S},$$

$$C_{13} = -B_{23},\ D_{11} = -\frac{p - p_1}{2\mu\tau_0}.$$

Остальные константы равны нулю.

При совпадении p и p_1 компоненты вектора перемещений и вектора собственного микроповорота примут вид

$$u_1 = -\frac{\lambda p_1}{2\mu\left(3\lambda + 2\mu\right)}x^1 + \tau_0\frac{p_1\left(\left(3\lambda + 2\mu\right)T - I_p\lambda\right)}{\left(3\lambda + 2\mu\right)\mu I_p + 2\left(3\lambda + 2\mu\right)\nu S}x^2x^3;$$

$$u_2 = -\frac{\lambda p_1}{2\mu\left(3\lambda + 2\mu\right)}x^2 - \tau_0\frac{p_1\left(\left(3\lambda + 2\mu\right)T - I_p\lambda\right)}{\left(3\lambda + 2\mu\right)\mu I_p + 2\left(3\lambda + 2\mu\right)\nu S}x^2x^3;$$

$$u_3 = \frac{\left(\lambda + \mu\right)p_1}{\mu\left(3\lambda + 2\mu\right)}x^3 + \tau_0 p_1\cdot\varphi\left(x^1, x^2\right).$$

В результате получаем значения компонент тензора напряжений:

$$\sigma_{33} = p_1, \sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{12} = \sigma_{21} = 0;$$

$$\sigma_{13} = \sigma_{31} = \left(\tau_0 p_1\frac{\partial\varphi\left(x^1, x^2\right)}{\partial x^1} + \left(\frac{p_1\left(\left(3\lambda+2\mu\right)T - I_p\lambda\right)}{\left(3\lambda+2\mu\right)\mu I_p + 2\left(3\lambda+2\mu\right)\nu S} + \frac{\lambda p_1}{\mu\left(3\lambda+2\mu\right)}\right)x^2\tau_0\right)\mu;$$

$$\sigma_{23} = \sigma_{32} = \left(\tau_0 p_1\frac{\partial\varphi\left(x^1, x^2\right)}{\partial x^2} - \left(\frac{p_1\left(\left(3\lambda+2\mu\right)T - I_p\lambda\right)}{\left(3\lambda+2\mu\right)\mu I_p + 2\left(3\lambda+2\mu\right)\nu S} + \frac{\lambda p_1}{\mu\left(3\lambda+2\mu\right)}\right)x^1\tau_0\right)\mu.$$

И значения компонент тензора моментных напряжений:

$$\mu_{11} = p_1\nu\tau_0\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2\partial x^1} + \frac{\left(\left(3\lambda+2\mu\right)T - I_p\lambda\right)}{\left(3\lambda+2\mu\right)\mu I_p + 2\left(3\lambda+2\mu\right)\nu S}\right);$$

$$\mu_{22} = p_1\nu\tau_0\left(\frac{\left(\left(3\lambda+2\mu\right)T - I_p\lambda\right)}{\left(3\lambda+2\mu\right)\mu I_p + 2\left(3\lambda+2\mu\right)\nu S} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2\partial x^1}\right);$$

$$\mu_{33} = \frac{2p_1\left(\lambda I_p - \left(3\lambda+2\mu\right)T\right)\nu\tau_0}{\left(3\lambda+2\mu\right)\mu I_p + 2\left(3\lambda+2\mu\right)\nu S};$$

$$\mu_{12} = \mu_{21} = -\frac{\tau_0 p_1}{2}\left(\left(\nu+\beta\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial\left(x^1\right)^2} - \left(\nu-\beta\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial\left(x^2\right)^2}\right);$$

$$\mu_{13}=\mu_{31}=\nu p_1\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^1}-\frac{\left((3\lambda+2\mu)T-I_p\lambda\right)}{(3\lambda+2\mu)\mu I_p+2(3\lambda+2\mu)\nu S}x^2\right)\tau_0^2\ \mu_{23}=\mu_{32}=$$

$$=\nu p_1\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^2}+\frac{\left((3\lambda+2\mu)T-I_p\lambda\right)}{(3\lambda+2\mu)\mu I_p+2(3\lambda+2\mu)\nu S}x^1\right)\tau_0^2.$$

Следовательно, в каждой точке стержня мы получили чистый сдвиг, определяемый компонентами тензора напряжений σ_{13}, σ_{31}, σ_{23}, σ_{32}. Можно видеть, что относительно напряжений возникают нормальные напряжения, действующие между продольными волокнами стержня или в направлении самих волокон. Также возникают искажения плоскостей поперечных сечений (депланация поперечного сечения стержня), поскольку $\gamma_{11},\gamma_{22},\gamma_{33},\gamma_{12},\gamma_{21}$ не обращаются в нуль.

Формулы, определяющие компоненты тензора напряжений, имеют вид

$$\sigma_{33}=p\quad \sigma_{11}=\sigma_{22}=\sigma_{12}=\sigma_{21}=0;$$

$$\sigma_{13}=\sigma_{31}=p\tau_0\left(\frac{I_p}{T}\frac{\partial\varphi\left(x^1,x^2\right)}{\partial x^1}-x^2\left(\frac{I_p}{T}-1\right)\right);$$

$$\sigma_{23}=\sigma_{32}=p\tau_0\left(\frac{I_p}{T}\frac{\partial\varphi\left(x^1,x^2\right)}{\partial x^2}+x^1\left(\frac{I_p}{T}-1\right)\right).$$

Среднее значение кручения для всего поперечного сечения равно

$$\tau=\frac{1}{S}\int_S\kappa_{x_3x_3}dS=\frac{p_1\left(\lambda I_p-(3\lambda+2\mu)T\right)\tau_0}{S\left((3\lambda+2\mu)\mu I_p+2(3\lambda+2\mu)\nu S\right)}.$$

Вывод. Формулы, получившиеся с учетом моментных напряжений отличаются тем, что: 1. Депланация поперечного сечения стержня определяется не только соответствующими классическому случаю компонентами силовых напряжений σ_{13}, σ_{31}, σ_{23}, σ_{32}, но и компонентами моментных напряжений μ_{11}, μ_{22}, μ_{12}, μ_{21}. 2. Первая и вторая компоненты вектора перемещений зависят не только от величины растягивающих усилий р, но и от геометрии стержня. 3. Среднее значение кручения для всего поперечного сечения зависит не только от полярного момента и величины Т, но и от площади поперечного сечения S.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Еремеев В.А., Зубов Л.М.* Основы механики вязкоупругой микрополярной жидкости. – Ростов-на-Дону: Изд-во ЮНЦ РАН, 2009. – 128 с.
2. *Илюхин А.А., Тимошенко Д.В.* Математическая модель замкнутых молекул ДНК // Известия Саратовского университета. – 2008. – Т. 8. – Вып. 3. – С. 32-40.
3. *Илюхин А.А., Тимошенко Д.В.* Решение задачи о деформации естественно-закрученного и растяжимого стержня и применение его к исследованию условий замкнутости молекул ДНК // Механика твердого тела. – 2008. – Вып. 38. – С. 161-167.
4. *Илюхин А.А., Щепин Н.Н.* К моментной теории упругих стержней // Изв. вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2001. Спецвыпуск. – С. 92-94.
5. *Шкутин Л.И.* Численный анализ разветвленных форм изгиба арок // Прикладная механика и техническая физика. – 2001. – Т. 42, № 4. – С. 155-160.

Статью рекомендовал к опубликованию д.ф.-м.н., профессор Г.В. Куповых.

Илюхин Александр Алексеевич – Таганрогский государственный педагогический институт имени А.П. Чехова; e-mail: aleilyukhin@yandex.ru; 347936, г. Таганрог, ул. Инициативная, 48; тел.: 89043465321; кафедра математического анализа; зав. кафедрой, д.ф.-м.н.; профессор.

Попов Алексей Константинович – e-mail: ASDAlexey@yandex.ru; тел.: 89526058875; кафедра математического анализа; аспирант.

Ilyukhin Alexander Alexeyevich – Anton Chekhov Taganrog State Pedagogical Institute; e-mail: aleilyukhin@yandex.ru; 48, Initiative street, Taganrog, 347936, Russia; phone: +79043465321; department of mathematical analysis; head of the department, dr. of phys.-math. sc.; professor.

Popov Alexey Konstantinovich – e-mail: ASDAlexey@yandex.ru; phone: +79526058875; department of mathematical analysis; postgraduate studies.

УДК 681.586.72:543.27.08

С.А. Богданов

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ МНОГОЗАРЯДНЫХ ПРИМЕСНЫХ ЦЕНТРОВ НА ВОЛЬТ-АМПЕРНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ КОНТАКТОВ МЕТАЛЛ-ПОЛУПРОВОДНИК С БАРЬЕРОМ ШОТТКИ

Предложена математическая модель и проведено моделирование влияния многозарядных примесных центров на вольт-амперные характеристики контактов металл-полупроводник с барьером Шоттки. Разработанная математическая модель учитывает квантово-механические эффекты при переносе носителей заряда в контактах металл-полупроводник с барьером Шоттки и позволяет прогнозировать их вольт-амперные характеристики. Результаты моделирования хорошо согласуются с известными из литературы экспериментальными данными. Разработанная математическая модель может быть использована в системах автоматизированного проектирования элементов интегральных микросхем.

Диод Шоттки; потенциал; уравнение Пуассона; вольт-амперная характеристика.

S.A. Bogdanov

THE SIMULATION OF MULTIPLE-CHARGE CENTERS INFLUENCE ON VOLT-AMPERE CHARACTERISTICS OF METAL-SEMICONDUCTOR JUNCTIONS WITH SCHOTTKY BARRIER

The mathematical model and the simulation of the multiple-charge centers influence on metal-semiconductor junctions with Schottky barrier volt-ampere characteristics are made in this work. The developed mathematical model takes into account quantum mechanical effects during the charge carriers transfer in metal-semiconductor junctions with Schottky barrier and allows forecasting their volt-ampere characteristics. The simulation results meet the experimental data from famous literary sources. The developed mathematical model can be used in computer aided design of integrated circuits elements.

Schottky diode; potential; Poisson equation; volt-ampere characteristic.

Необходимость моделирования технологических процессов и приборов обусловлена сложностью протекающих физических процессов, их многомерностью, нестационарным и неравновесным характером. Кроме того, с переходом к нанометрическим размерам резко усилилась взаимосвязь между электрофизическими характеристиками элементов твердотельной электроники и технологическими режимами их производства. Очевидно, что математическое моделирование элементов и технологических процессов сверх- и ультрабольших интегральных схем становится той областью, где достижения фундаментальных наук дают непосредственный экономический эффект.