УДК 519.216.2

И.Ю. Кузнецова

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ЭНЕРГОПОТРЕБЛЕНИЯ

Рассмотрена одна из возможных моделей, позволяющих прогнозировать потребление энергетических ресурсов. Описанная модель основывается на стохастическом дифференциальном уравнении. Описан метод Мильштейна для численного решения стохастического дифференциального уравнения, на основе которого построена модель, проведено исследование данного метода. В статье приведены результаты численных расчетов по прогнозированию электропотребления на 2010–2011 гг. на основании данных по потреблению электроэнергии общежитиями № 1–3 студенческого городка ТТИ ЮФУ за 2008–2009 гг. Применимость полученной модели к прогнозированию потребления электроэнергии оценена путем сравнения расчетных и реальных значений.

Стохастические дифференциальные уравнения; численные методы; потребление; энергосбережение; математическое моделирование; метод Мильштейна.

I.U. Kuznetsova

MATHEMATICAL MODEL OF ENERGY CONSUMPTION

One of the models of energy consumption, which based on the stochastic differential equation, is described in the article. Milshtein's method for numerical solution of stochastic differential equation, which used here, is described and researched in the article. Results of numerical calculations of energy consumption prognostication in 2010–2011 based on data of energy consumption of hostels №1–3 of TTI SFU campus in 2008–2009 are given in the article. The applicability of forecasting model of electricity consumption is estimated.

Stochastic differential equations; numerical methods; consumption; energy-saving; mathematical modeling; method Milstein.

Введение. Прогнозирование потребления энергоресурсов является одной из важнейших задач современного мира. Моделирование спроса на электроэнергию является сравнительно новым направлением исследования в современной российской экономике, но представляется особенно актуальным в связи с реформированием электроэнергетики.

При моделировании процесса потребления электроэнергии необходимо учитывать несколько типов факторов: периодические или циклические, к которым можно отнести тренд и сезонность, и случайные. Оба типа факторов вносят различный вклад в потребление в зависимости от специфики исследуемой области.

Периодические зависимости наиболее прогнозируемы и существенно влияют на потребление электроэнергии. Тренд позволяет учесть динамику возрастания энергопотребления из года в год. Сезонная компонента позволяет учесть периодические зависимости, существенно влияющие на потребление электроэнергии, например, продолжительность светового дня.

Отличительной особенностью случайных факторов является тот факт, что хотя их доля в процессе невелика, амплитуда отклонений может быть довольно значительна.

Постановка задачи. Учитывая перечисленные выше факторы, была построена модель, позволяющая спрогнозировать потребление электроэнергии. Данная модель строится на основе стохастического дифференциального уравнения и имеет следующий вид:

$$dX(t)=\left(\mu(t)+\theta(t)X(t)\right)dt+\sigma X(t)dz(t),\ X(0)=x_0, \tag{1}$$

где *X(t)* – потребление энергоресурсов (электроэнергии); x_0 – значение потребления в начале рассматриваемого периода; $\theta(t)$ – функция, учитывающая сезонные изменения; $\mu(t)$ – тренд; σ – коэффициент, учитывающий изменения, носящие случайных характер; $z(t)$ – винеровский процесс.

Одним из самых распространенных способов нахождения сильного решения стохастического дифференциального уравнения (СДУ) является использование разностных методов. Применим к СДУ (1) схему со среднеквадратичным порядком точности, равным 1, впервые предложенную Г.Н. Мильштейном.

Зафиксируем равномерную сетку

$$\omega_t = \left\{ t_{i+1} = t_i + \Delta t, \quad i = \overline{1,n}, \quad \Delta t = T/n \right\},$$

где T – длина рассматриваемого временного промежутка; n – количество месяцев в рассматриваемом промежутке времени; Δt – шаг по времени.

Также введем следующие обозначения:

$$X(t_i) = X_i, \quad \theta(t_i) = \theta_i, \quad \mu(t_i) = \mu_i.$$

Тогда имеем

$$X_{i+1} = X_i + \left(\mu_i + \theta_i X_i\right)\Delta t + \sigma X_i \Delta z_i + 0{,}5\sigma\left(\Delta z_i^2 - \Delta t\right), \tag{2}$$

где Δz_i – приращение винеровского процесса. На практике наиболее используемой является формула вычисления приращения винеровского процесса

$$\Delta z_i = \sqrt{\Delta t}\,\xi_i, \text{ где } \xi_i \in N\left(0,1\right), \tag{3}$$

т.е. ξ_i – случайная величина, распределенная по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием и дисперсией, равной 1.

В случае приближенного сильного решения СДУ как решения соответствующей разностной схемы, можно определить понятие сходимости и порядка точности метода (в различных смыслах). При этом рассматривается близость к нулю выражения

$$Z_i = X_i - X\left(t_i\right),$$

где X_i – значение приближенного решения в i-й точке сетки; $X(t_i)$ – значение точного решения в момент времени t_i. Наиболее распространено понимание близости решений в среднеквадратическом смысле.

В [3] показано, что для метода Мильштейна выполняется следующее соотношение:

$$\left(E\sup_i Z_i^2\right)^{1/2} \le O\left(\Delta t\right).$$

Как и в детерминированном случае, для численного решения СДУ естественно ставить вопрос об устойчивости численных методов. На данный момент нет общепринятых подходов к этой проблематике, так как данная проблема усугубляется необходимостью раздельно изучать слабые и сильные решения, а также разнообразием подходов к пониманию устойчивости, обусловленным учетом различных видов сходимости случайных величин и их распределений. Один из возможных подходов к исследованию устойчивости численного метода состоит в исследовании устойчивости данного метода на модельном (тестовом) уравнении.

Исследуем устойчивость метода Мильштейна на следующем тестовом уравнении:

$$dX(t) = \alpha X(t)dt + \beta X(t)dz(t), \quad X\left(0\right) = x_0. \tag{4}$$

Уравнение (4) имеет следующее сильное решение:

$$X(t) = X(0)\exp\left\{\left(\alpha - 0.5\beta^2\right)t + \beta z(t)\right\},$$

которое при

$$\alpha - 0{,}5\beta^2 < 0 \tag{5}$$

(условие асимптотической устойчивости почти наверное) стремится к тривиальному решению ($X(0)=0$ влечет $X(t)=0$) почти наверное. При этом сходимости в среднем любого порядка $p \geq 1$ условие (5) не гарантирует, так как

$$E\left|X(t)\right|^p = \exp\left(pt\left[\alpha + (p-1)\beta^2/2\right]\right)E\left|X(0)\right|^p, \tag{6}$$

т.е. сходимость в среднем имеет место лишь при условии

$$\alpha < -\beta^2(p-1)/2$$

(условии асимптотической устойчивости в среднем). Для исследования на устойчивость в среднеквадратическом смысле положим $p=2$.

Для схемы Мильштейна имеем

$$EX_k^2 = EX_0^2\left[1 + \left(2\alpha - \beta^2\right)\Delta t + \left[0{,}25\beta^4 + \left(\alpha - \beta^2\right)^2\right](\Delta t)^2\right]^k. \tag{7}$$

Из (6) следует, что при выполнении условия (5) эта схема условно устойчива в среднеквадратическом смысле (т.е. почти наверное), так как выражение в квадратных скобках по модулю меньше единицы при

$$\Delta t < -\left(2\alpha - \beta^2\right)\Big/\left[0{,}25\beta^4 + \left(\alpha - \beta^2\right)^2\right]. \tag{8}$$

Таким образом, метод Мильштейна имеет первый порядок погрешности в среднеквадратическом смысле и устойчив в среднеквадратическом смысле при выполнении условия (8).

Численный эксперимент. На основе данных по потреблению электроэнергии за 2008–2009 гг. общежитием № 1 студенческого городка ТТИ ЮФУ были получены прогнозные значения потребления на 2010–2011 гг., которые позже были сверены с реальным потреблением электроэнергии в рассматриваемый период. Для прогнозирования энергопотребления необходимо определить коэффициенты, входящие в построенную модель (1). Расчет этих коэффициентов производится в несколько этапов.

Во-первых, коэффициенты, отражающие сезонные изменения. Функция сезонности периодическая, с периодом в 1 месяц. Вклад сезонных факторов определялся следующим образом:

$$\theta_i = \frac{\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\left(X_{i+1}^k - X_i^k\right) - \frac{1}{n\cdot m}\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\left(X_{i+1}^k - X_i^k\right)}{\frac{1}{n\cdot m}\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}X_i^k},$$

где θ_i – значение сезонности для i-го месяца; n – количество сезонов в году (количество месяцев); m – количество лет в рассматриваемом периоде.

После расчета коэффициентов сезонности для каждого месяца делается поправка исходных данных с учетом сезонности.

Затем рассчитываются коэффициенты функции линейного тренда:

$$\mu_t = \alpha + \beta t.$$

Используя описанный выше алгоритм и численное решение (2) с условием (3), были получены следующие результаты прогнозных значений потребления электроэнергии общежитиями № 1–3 на 2010–2011 гг. (рис. 1).

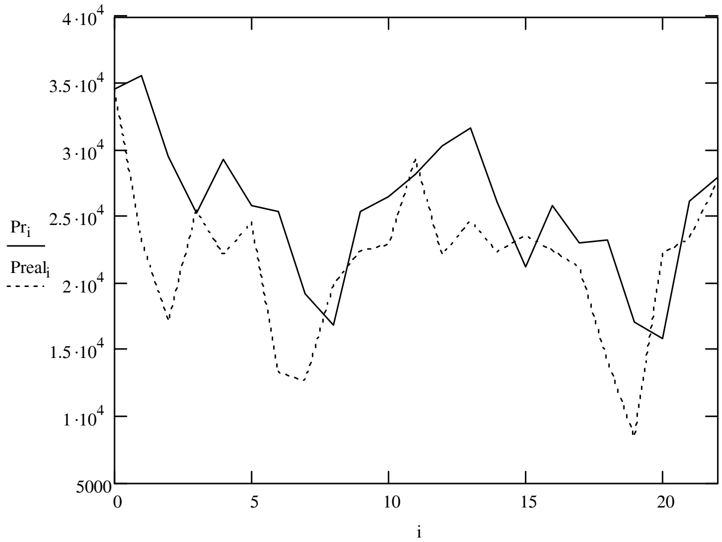

Рис. 1. График потребления электроэнергии за 2010–2011 гг. (сплошной чертой отмечены полученные прогнозные значения, пунктиром – реальные данные по энергопотреблению в рассматриваемом периоде)

Надежность этой модели прогнозирования оценивалась путем сравнения реальных данных по потреблению электроэнергии общежитиями студенческого городка за 2010–2011 гг. и прогнозных значений.

Основными оценочными характеристиками качества прогнозной модели являются следующие показатели.

1. Средний процент ошибки MPE (the mean percentage error)

$$MPE = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{P_i^r - P_i}{P_i^r}\cdot 100\ \%,$$

где P_i^r – фактическое значение потребления в i-й момент времени; P_i – расчетное значение потребления в i-й момент времени; n – число наблюдений.

MPE характеризует относительную степень смещенности прогноза.

2. Коэффициент несоответствия Тейла:

$$\upsilon = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(P_i^r - P_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(P_i^r\right)^2 + \sum_{i=1}^{n}P_i^2}}.$$

Индекс Тейла показывает степень схожести временных рядов P_i^r и P_i; чем он ближе к нулю, тем ближе сравниваемые ряды.

На основании проведенных расчетов для рассматриваемой модели получены следующие значения оценочных характеристик: $MPE = 11{,}8\ \%$, $\upsilon = 0{,}09$. По результатам проведенных расчетов можно сделать вывод о применимости полученной модели к прогнозированию потребления электроэнергии.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Андерсон Т.* – Статистический анализ временных рядов. – М.: Мир, 1980.
2. *Лукашов А.В.* Риск-менеджмент // Управление корпоративными финансами. – 2005. – № 5. – С. 58-64.
3. *Мильштейн Г.Н.* Численное интегрирование стохастических дифференциальных уравнений. – Уральский государственный университет, 1988.
4. *Sauer T.* Numerical Analysis. Addison-Wesley. – Boston, 2006.
5. *Sauer T.* Numerical Solution of Stochastic Differential Equations in Finance / Department of Mathematics George Mason University, 2009.
6. *Turner Wayne C.*, *Doty S.*, 1942 – Energy management handbook / Library of Congress Cataloging-in-Publication Data. – 6th ed., 2007. – 924 p.

Статью рекомендовал к опубликованию д.ф.-м.н., профессор А.И. Жорник.

Кузнецова Инна Юрьевна – Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Южный федеральный университет»; e-mail: kuznet.i.u@gmail.com; 347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44; тел.: +79185954091; аспирантка.

Kuznetsova Inna Urevna – Federal State-Owned Autonomy Educational Establishment of Higher Vocational Education "Southern Federal University"; e-mail: kuznet.i.u@gmail.com; 44, Nekrasovskiy, Taganrog, 347928, Russia; phone: +79185954091; postgraduate student.

УДК 681.513

Н.К. Полуянович, Ю.П. Волощенко, И.И. Шушанов

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТЯГОВОГО ЭЛЕКТРОПРИВОДА С ШИРОТНО-ИМПУЛЬСНЫМ УПРАВЛЕНИЕМ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ РЕЖИМА ПУСКА*

Рассматривается задача оптимизации системы управления тягового электропривода постоянного тока электроподвижного состава с импульсным управлением, определения области синхронной динамики при переменных скоростях движения и мощностях электроподвижного состава. Показан способ формирования импульсной последовательности из непрерывного сигнала рассогласования для исследования режима пуска тягового электропривода постоянного тока. Определены условия минимизации длительности переходных процессов и их апериодического характера. В работе приводятся результаты численных экспериментов, подтверждающих работоспособность предложенных алгоритмов.

Тяговый электропривод электроподвижного состава; импульсное регулирование.

N.K. Poluyanovich, Yu.P. Voloshenko, I.I. Shushanov

MATHEMATICAL MODEL OF THE TRACTION ELECTRIC DRIVE WITH PULSE-WIDTH MANAGEMENT FOR RESEARCH OF THE MODE OF START-UP

The problem of optimization of a control system of the traction electric drive of a direct current of an electrorolling stock with pulse management, definitions of area of synchronous dynamics is considered at variable speeds of movement and capacities of an electrorolling stock. The

* Работа поддержана грантом РФФИ №12-08-13112 офи_м_РЖД «Разработка методов оптимизации энергопотребления электропоездов в динамических режимах на базе комплексной системы управления движением и энергоснабжением».