

Meshcheryakova Julia Alexandrovna – e-mail: life-super@yandex.ru; phone: +79043464554; the department of high mathematic; graduate.

Rumilova Svetlana Yur'evna – e-mail: svechqa@gmail.com; phone: +79525821572; the department of high mathematic; graduate.

УДК 519.86

А.Е. Чистяков, Д.С. Хачунц

ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ДВУМЕРНОЙ ЗАДАЧИ ДВИЖЕНИЯ ВОЗДУШНОЙ СРЕДЫ

Работа посвящена построению двумерной математической модели движения воздушной среды, а также написанию программного комплекса, реализующего разработанные алгоритмы. Для адекватного математического описания процессов, происходящих в атмосфере, требуется решить проблему построения ее физической модели, поскольку она существенным образом влияет на построение поля ветра и на описание переноса, происходящего в воздушной среде. Физические свойства атмосферного воздуха (температура, влажность, подвижность, атмосферное давление) нестабильны и связаны с климатическими особенностями географического региона. В работе представлена аппроксимация задачи по временной переменной, построена двумерная модель аэродинамики и приведены результаты численных экспериментов.

Воздушная среда; двумерная математическая модель; аппроксимация; аэродинамика.

A.E. Chistyakov, D.S. Khachunts

PROGRAM REALIZATION OF AIR MOTION TWO-DIMENSIONAL TASK

This work is dedicated to two-dimensional mathematic model constructing and creating of program complex for the developed algorithms realization. In order to adequately make mathematical description of processes occurring in the atmosphere the problem of constructing a physical model of atmosphere should be solved since it significantly affects the construction of the wind field and transfer description occurring in the air. Physical features of air (temperature, humidity, changeability, atmosphere pressure) are unstable and connected with climatic characteristics of geographical region. In this work the approximation of the time variable problem is presented, two-dimensional aerodynamic model is constructed and the results of numerical experiments are given.

Air; two-dimensional mathematical model; approximation; aerodynamics.

Введение. В общем перечне актуальных задач, решаемых с помощью математического моделирования, состояние воздушной среды занимает особое место. Естественным средством объективного анализа возникающих проблем являются методы, основанные на построении и совместном изучении математических моделей природных систем. Использование математического моделирования и проведение вычислительного эксперимента позволяют оценить все аспекты реализации проектов, связанных с воздействием на природную среду. Одним из наиболее значимых исследования методов климата и динамики атмосферы является проведение численных экспериментов. Современные численные методы позволяют осуществить моделирование объектов, поведение которых описывается весьма сложными системами дифференциальных уравнений.

1. Постановка задачи. Основными уравнениями динамики воздушной среды являются [1–8]:

– система уравнений Навье–Стокса

$$\begin{aligned} u'_t + uu'_x + vv'_y &= -\frac{1}{\rho} P'_x + (\mu u'_x)'_x + (\mu v'_y)'_y, \\ v'_t + uv'_x + vv'_y &= -\frac{1}{\rho} P'_y + (\mu v'_x)'_x + (\mu v'_y)'_y, \end{aligned} \quad (1)$$

– уравнение неразрывности

$$\rho'_t + (\rho u)'_x + (\rho v)'_y = 0, \quad (2)$$

– уравнение состояния

$$P = \frac{\rho}{M} RT. \quad (3)$$

Система уравнений (1)–(2) рассматривается при следующих граничных условиях:

- ◆ на непроницаемой границе: $\rho_v \eta u'_n = \tau_{x,b}(t)$, $\rho_v \eta v'_n = \tau_{y,b}(t)$, $\bar{V}_n = 0$, $P'_n = 0$,
- ◆ на боковых проницаемых границах: $u'_n = 0$, $v'_n = 0$, $P'_n = 0$,
- ◆ на источнике: $u = U$, $v = V$, $P'_n = 0$,

где $\bar{V} = \{u, v\}$ – значение компонент вектора скорости; P – давление; ρ – плотность; μ – коэффициент турбулентного обмена; M – молярная масса; τ_x, τ_y – составляющие тангенциального напряжения; T – температура; R – универсальная газовая постоянная; U, V – компоненты вектора скорости на источнике.

2. Аппроксимация задачи по временной переменной. Согласно методу поправки к давлению, исходная модель гидродинамики (1)–(2) разбивается на три подзадачи. Первая подзадача представлена уравнением диффузии – конвекции – реакции, на основе которого вычисляются компоненты поля скорости на промежуточном временном слое:

$$\frac{\tilde{u} - u}{h_t} + u\tilde{u}'_x + v\tilde{u}'_y = (\mu\tilde{u}'_x)'_x + (\mu\tilde{u}'_y)'_y, \quad \frac{\tilde{v} - v}{h_t} + u\tilde{v}'_x + v\tilde{v}'_y = (\mu\tilde{v}'_x)'_x + (\mu\tilde{v}'_y)'_y. \quad (4)$$

Для аппроксимации по временной переменной уравнения диффузии – конвекции – реакции использованы схемы с весами. Здесь $\bar{u} = \sigma\tilde{u} + (1 - \sigma)u$, $\sigma \in [0, 1]$

– вес схемы.

Система уравнений (4) рассматривается при следующих граничных условиях:

- ◆ на непроницаемой границе: $\rho_v \eta u'_n = \tau_{x,b}(t)$, $\rho_v \eta v'_n = \tau_{y,b}(t)$,
- ◆ на боковых проницаемых границах: $u'_n = 0$, $v'_n = 0$,
- ◆ на источнике: $u = U$, $v = V$, $P'_n = 0$.

Уравнение для расчета распределения давлений можно записать в следующем виде:

$$P''_{xx} + P''_{yy} = \frac{\hat{p} - \rho}{h_t^2} + \frac{(\bar{\rho}\tilde{u})'_x}{h_t} + \frac{(\bar{\rho}\tilde{v})'_y}{h_t}$$

или

$$\frac{\hat{P} - P}{h_t} + (\bar{P}\tilde{u})'_x + (\bar{P}\tilde{v})'_y = kh_t (P''_{xx} + P''_{yy}), \quad (5)$$

где $k = RT / M$.

Третья подзадача позволяет по явным формулам определить распределение скоростей на верхнем временном слое

$$\bar{P} \frac{\hat{u} - \tilde{u}}{h_t} = -k\bar{P}_x, \quad \bar{P} \frac{\hat{v} - \tilde{v}}{h_t} = -k\bar{P}_y, \quad (6)$$

где τ – шаг по временной координате; u – значение поля скорости на предыдущем временном слое; \tilde{u} – значение поля скорости на промежуточном временном слое; \hat{u} – на текущем временном слое.

3. Построение двумерной модели аэродинамики. Расчетная область вписана в прямоугольник. Покроем область равномерной прямоугольной расчетной сеткой $\omega = \omega_t \times \omega_x \times \omega_y$:

$$\begin{aligned} \omega_t &= \{t^n = nh_t, 0 \leq n \leq N_t - 1, l_t = h_t (N_t - 1)\}, \\ \omega_x &= \{x_i = ih_x, 0 \leq i \leq N_x - 1, l_x = h_x (N_x - 1)\}, \\ \omega_y &= \{y_j = jh_y, 0 \leq j \leq N_y - 1, l_y = h_y (N_y - 1)\}, \end{aligned}$$

где n, i, j – индексы по временной координате и пространственным координатным направлениям Ox, Oy соответственно;

h_t, h_x, h_y – шаги по временной координате и пространственным координатным направлениям Ox, Oy соответственно;

N_t, N_x, N_y – количество узлов по временной координате и пространственным координатным направлениям Ox, Oy соответственно;

l_t, l_x, l_y – длина расчетной области по временной координате и пространственным координатным направлениям Ox, Oy соответственно.

Дискретные аналоги операторов конвективного и диффузионного переноса, полученные при помощи интегроинтерполяционного метода, в случае частичной заполненности ячеек могут быть записаны в следующем виде:

$$\begin{aligned} (q_0)_{i,j} u c'_x &\approx (q_1)_{i,j} u_{i+1/2,j} \frac{c_{i+1,j} - c_{i,j}}{2h_x} + (q_2)_{i,j} u_{i-1/2,j} \frac{c_{i,j} - c_{i-1,j}}{2h_x}, \\ (q_0)_{i,j} (\mu c'_x)'_x &\approx (q_1)_{i,j} \mu_{i+1/2,j} \frac{c_{i+1,j} - c_{i,j}}{h_x^2} - (q_2)_{i,j} \mu_{i-1/2,j} \frac{c_{i,j} - c_{i-1,j}}{h_x^2} - \\ &\quad - \left| (q_1)_{i,j} - (q_2)_{i,j} \right| \mu_{i,j} \frac{\alpha_x c_{i,j} + \beta_x}{h_x}, \end{aligned}$$

где q_0, q_1, q_2 – коэффициенты заполненности контрольных областей [12–16].

Аппроксимация первого уравнения системы (5) имеет вид

$$\begin{aligned} (q_0)_{i,j} \frac{\tilde{u}_{i,j} - u_{i,j}}{h_t} &+ (q_1)_{i,j} u_{i+1/2,j} \frac{\bar{u}_{i+1,j} - \bar{u}_{i,j}}{2h_x} + (q_2)_{i,j} u_{i-1/2,j} \frac{\bar{u}_{i,j} - \bar{u}_{i-1,j}}{2h_x} + \\ + (q_3)_{i,j} u_{i,j+1/2} \frac{\bar{u}_{i,j+1} - \bar{u}_{i,j}}{2h_y} &+ (q_4)_{i,j} u_{i,j-1/2} \frac{\bar{u}_{i,j} - \bar{u}_{i,j-1}}{2h_y} = (q_1)_{i,j} \mu_{i+1/2,j} \frac{\bar{u}_{i+1,j} - \bar{u}_{i,j}}{h_x^2} - \\ - (q_2)_{i,j} \mu_{i-1/2,j} \frac{\bar{u}_{i,j} - \bar{u}_{i-1,j}}{h_x^2} &+ (q_3)_{i,j} \mu_{i,j+1/2} \frac{\bar{u}_{i,j+1} - \bar{u}_{i,j}}{h_y^2} - \\ - (q_4)_{i,j} \mu_{i,j-1/2} \frac{\bar{u}_{i,j} - \bar{u}_{i,j-1}}{h_y^2} &+ \left((q_3)_{i,j} - (q_4)_{i,j} \right) \frac{\tau_x}{\rho h_y} (m_1)_{i,j}, \end{aligned} \quad (7)$$

где $\bar{c} = \sigma \hat{c} + (1 - \sigma) c$, $\sigma \in [0, 1]$ – вес схемы [13].

Параметр m_1 принимает значение 1 в случае, если узел (i, j) принадлежит множеству граничных узлов, находящихся в придонной области, в противном случае $m_1 = 0$. Аппроксимация второго слагаемого уравнения системы (4) запишется аналогичным образом.

Аппроксимация уравнения (5) имеет вид

$$\begin{aligned} & (q_0)_{i,j} \frac{\hat{P}_{i,j} - P_{i,j}}{h_t} + (q_1)_{i,j} \frac{(\bar{P}\tilde{u})_{i+1,j} - (\bar{P}\tilde{u})_{i,j}}{2h_x} + (q_2)_{i,j} \frac{(\bar{P}\tilde{u})_{i,j} - (\bar{P}\tilde{u})_{i-1,j}}{2h_x} + \\ & + (q_3)_{i,j} \frac{(\bar{P}\tilde{v})_{i,j+1} - (\bar{P}\tilde{v})_{i,j}}{2h_y} + (q_4)_{i,j} \frac{(\bar{P}\tilde{v})_{i,j} - (\bar{P}\tilde{v})_{i,j-1}}{2h_y} = (q_1)_{i,j} kh_t \frac{\bar{P}_{i+1,j} - \bar{P}_{i,j}}{h_x^2} - \quad (8) \\ & - (q_2)_{i,j} kh_t \frac{\bar{P}_{i,j} - \bar{P}_{i-1,j}}{h_x^2} + (q_3)_{i,j} kh_t \frac{\bar{P}_{i,j+1} - \bar{P}_{i,j}}{h_y^2} - (q_4)_{i,j} kh_t \frac{\bar{P}_{i,j} - \bar{P}_{i,j-1}}{h_y^2} + \\ & + ((q_2)_{i,j} - (q_1)_{i,j}) \frac{\tilde{u}_{i,j} - U_{i,j}}{h_x} \bar{P}_{i,j} (m_2)_{i,j} + ((q_4)_{i,j} - (q_3)_{i,j}) \frac{\tilde{v}_{i,j} - V_{i,j}}{h_y} \bar{P}_{i,j} (m_2)_{i,j}. \end{aligned}$$

Параметр $m_2 = 1$ в случае, если узел (i, j) принадлежит входной границе, в противном случае $m_2 = 0$.

Аппроксимация первого уравнения системы (8) примет вид

$$(q_0)_{i,j} \bar{P}_{i,j} \frac{\hat{u}_{i,j} - \tilde{u}_{i,j}}{h_t} = -k(q_1)_{i,j} \frac{\bar{P}_{i+1,j} - \bar{P}_{i,j}}{2h_x} - k(q_2)_{i,j} \frac{\bar{P}_{i,j} - \bar{P}_{i-1,j}}{2h_x}. \quad (9)$$

Для решения сеточных уравнений используем адаптивный попеременно-треугольный итерационный метод [8–11].

4. Результаты численных экспериментов. На основе построенных алгоритмов был создан комплекс программ, предназначенный для численного моделирования движения воздушной среды при обтекании твердых тел и обеспечивающий выполнение следующих функций:

- ◆ расчет поля скорости на промежуточном временном слое;
- ◆ расчет давления;
- ◆ уточнение поля вектора скорости по давлению.

На основе построенного комплекса программ также можно моделировать задачи транспорта веществ. На рис. 1–3 приведены результаты численных экспериментов по моделированию движения воздушной среды при обтекании твердых тел. Палитрой показана интенсивность скорости движения воздушной среды.

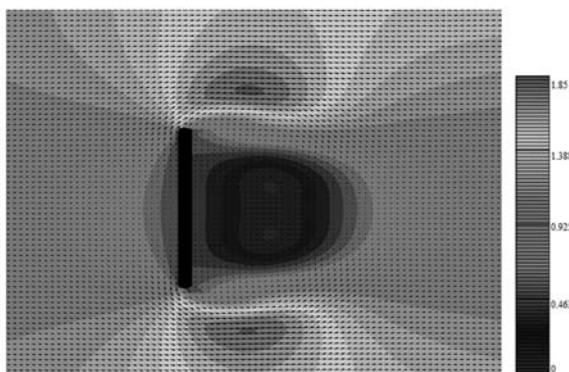


Рис. 1. Распределение поля скоростей при обтекании пластины

Пластина, помещенная в поток под углом 90° , создает довольно резкое изменение направления движения потока, а именно торможение потока перед пластиной, поджатие струек у ее краев и образование за краем пластины больших вихрей, которые заполняют всю область за ней.

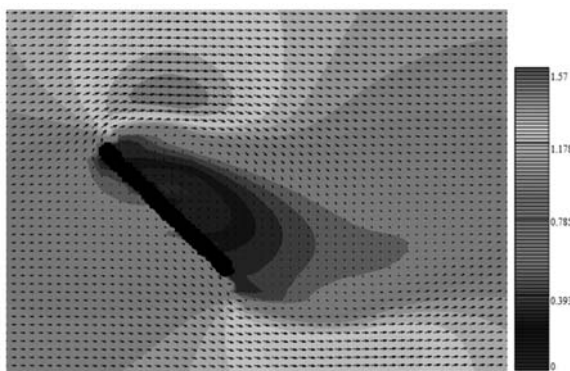


Рис. 2. Распределение поля скоростей при обтекании пластины

При обтекании шара зона вихрей будет существенно меньше, так как воздуху “проще” обтекать закругленные поверхности.

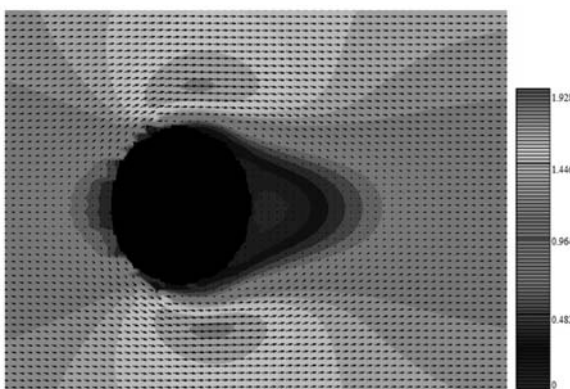


Рис. 3. Распределение поля скоростей при обтекании шара

Приведенные численные эксперименты показывают работоспособность разработанного комплекса программ. Построенные картины течений согласуются с реальными аэродинамическими процессами.

Вывод. В работе разработана двумерная математическая модель движения воздушной среды, приведены результаты численных экспериментов по моделированию движения воздушной среды. Построены картины течений при обтекании воздушной средой объектов сложной геометрической формы. Разработанный комплекс программ может быть использован при моделировании распространения загрязняющих веществ в воздушной среде. В работе также показана эффективность методики построения дискретных математических моделей, учитывающих степень заполненности контрольных ячеек, при решении задач аэродинамики. Стоит также отметить, что разработанный программный комплекс допускает внедрение в него новых программных блоков, на основе которых происходит описание процессов, происходящих внутри движущейся воздушной среды.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Сушинов А.И., Чистяков А.Е., Хачуц Д.С.* Математическое моделирование движения многокомпонентной воздушной среды и транспорта загрязняющих веществ // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2011. – № 8 (121). – С. 73-79.
2. *Алоян А.Е.* Динамика и кинетика газовых примесей и аэрозолей в атмосфере: Курс лекций. – М.: ИВМ РАН, 2002. – 201 с.
3. *Алексеевко Е.В., Сидоренко Б.В., Колгунова О.В., Чистяков А.Е.* Сравнительный анализ классических и неклассических моделей гидродинамики водоемов с турбулентным обменом // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2009. – № 8 (97). – С. 6-18.
4. *Володин Е.М.* Математическое моделирование общей циркуляции атмосферы: Курс лекций. – М.: ИВМ РАН, 2007. – 87 с.
5. *Чистяков А.Е., Алексеевко Е.В., Колгунова О.В.* Вычислительные эксперименты с математическими моделями турбулентного обмена в мелководных водоемах // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2008. – № 10 (87). – С. 171-175.
6. *Чистяков А.Е.* Трехмерная модель движения водной среды в Азовском море с учетом транспорта солей и тепла // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2009. – № 8 (97). – С. 75-82.
7. *Чистяков А.Е., Алексеевко Е.В., Колгунова О.В.* Вычислительные эксперименты с математическими моделями турбулентного обмена в мелководных водоемах // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2009. – № 10 (87). – С. 171-175.
8. *Сушинов А.И., Чистяков А.Е., Алексеевко Е.В.* Численная реализация трехмерной модели гидродинамики для мелководных водоемов на супервычислительной системе // Математическое моделирование. – 2011. – Т. 23, № 3. – С. 3-21.
9. *Чистяков А.Е.* Теоретические оценки ускорения и эффективности параллельной реализации ПТМ скорейшего спуска // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2010. – № 6 (107). – С. 237-249.
10. *Сушинов А.И., Чистяков А.Е.* Адаптивный модифицированный попеременно-треугольный итерационный метод для решения сеточных уравнений с несамосопряженным оператором // Математическое моделирование. – 2012. – Т. 24, № 1. – С. 3-21.
11. *Сушинов А.И., Чистяков А.Е.* Параллельная реализация трехмерной модели гидродинамики мелководных водоемов на супервычислительной системе // Вычислительные методы и программирование: Новые вычислительные технологии. – 2012. – Т. 13. – С. 290-297.
12. *Чистяков А.Е.* Об аппроксимации граничных условий трехмерной модели движения водной среды // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2010. – № 6 (107). – С. 66-77.
13. *Сушинов А.И., Чистяков А.Е., Бондаренко Ю.С.* Оценка погрешности решения уравнения диффузии на основе схем с весами // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2011. – № 8 (121). – С. 6-13.
14. *Сушинов А.И., Тимофеева Е.Ф., Чистяков А.Е.* Построение и исследование дискретной математической модели расчета прибрежных волновых процессов // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2011. – № 8 (121). – С. 22-32.
15. *Сушинов А.И., Чистяков А.Е., Проценко Е.А.* Построение дискретной двумерной математической модели транспорта наносов // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2011. – № 8 (121). – С. 32-44.
16. *Сушинов А.И., Чистяков А.Е., Проценко Е.А.* Двумерная гидродинамическая модель, учитывающая динамическое перестроение геометрии дна мелководных водоемов // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2011. – № 8 (121). – С. 159-167.
17. *Дегтярева Е.Е., Чистяков А.Е.* Моделирование транспорта наносов по данным экспериментальных исследований в Азовском море // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2012. – № 2 (127). – С. 112-118.

Статью рекомендовал к опубликованию д.т.н., профессор Я.Е. Ромм.

Чистяков Александр Евгеньевич – Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Южный федеральный университет»; e-mail: cheese_05@mail.ru; 347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44; тел.: 88634371606; кафедра высшей математики; доцент.

Хачунц Дианна Самвеловна – e-mail: diana-hachunts@mail.ru; тел.: 89287786737; кафедра высшей математики; аспирант.

Chistyakov Alexander Evgenjevich – Federal State-Owned Autonomy Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”; e-mail: cheese_05@mail.ru; 44, Nekrasovskiy, Taganrog, 347928, Russia; phone: +78634371606; the department of higher mathematics; associate professor.

Khachunts Dianna Samvelovna – e-mail: diana-hachunts@mail.ru; phone: +79287786737; the department of higher mathematics; postgraduate graduate.

УДК 532.5.031

А.Е. Чистяков, А.А. Семенякина

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ИНТЕРПОЛЯЦИИ ДЛЯ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ДОННОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Предложен математический алгоритм, предназначенный для восстановления рельефа дна акватории на основе гидрографической информации (глубины водоема в отдельных точках или изолиний уровня), и выполнена его численная реализация. На основе полученного метода решения задачи получено наглядное изображение рельефа дна на примере Азовского моря. Отметим, что разработанный алгоритм обладает достаточной степенью гладкости в точках склейки функций и меньшими выбросами в одномерном случае по сравнению с кубической функцией, использованной в расчетах. Также на основе полученной функции была разработана схема повышенного порядка аппроксимации для решения поставленной в данной работе задачи.

Донная поверхность; глубина; схемы повышенного порядка точности; интерполяция.

A.E. Chistyakov, A.A. Semenyakina

USE OF INTERPOLATION METHODS FOR RECOVERY BOTTOM SURFACE

A mathematical algorithm designed to restore the sea floor topography based hydrographic information (depth of the water at specific points or contour level) and was performed its numerical implementation. Based on this method of solving the problem is obtained visual representation of the bottom contour on the example of the Azov Sea. Note that the developed algorithm has a sufficient degree of smoothness in the gluing points of functions and has fewer emissions in the one case than in the cubic function used in the calculations. Also on the basis of the functions was developed a scheme of high order approximation for the solution of the problem in this paper.

Bottom surface; depth; schemes of high order; interpolation.

Введение. Для реконструкции сценария экологической катастрофы, а также для моделирования возможных вариантов биологической реабилитации водоема был создан ряд высокоточных математических моделей гидрофизических процессов в мелководных водоемах [1]. Данные модели описывают движение водной среды с учетом следующих факторов: ветровые течения и трение о дно, стоки рек, испарение, сила Кориолиса, турбулентный обмен, сгонно-нагонные явления, сложная геометрия дна и береговой линии. Другое актуальное назначение высокоточных математических моделей гидрофизических процессов связано со своевременным предсказанием различных природных катаклизмов, связанных с изменением уровня воды: затоплением прибрежных районов, обмелением судоходных каналов и др. Прогнозирование процесса подъема уровня в Азовском море является актуальной задачей на данный момент.