Раздел IV. Математическое моделирование и обработка данных

УДК 681.51.01

А.В. Семенов, А.Р. Гайдук

БИНОМИАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ КОМПЕНСАЦИИ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ

В работе сформулирована и доказана теорема об условиях астатизма произвольного порядка дискретных систем управления по отношению к задающему воздействию. Полученные условия относятся к коэффициентам числителя и знаменателя передаточной функции по этому воздействию. Условия получены методом коэффициентов ошибок и включают биномиальные коэффициенты, определяемые треугольником Паскаля. В работе представлена как аналитическая, так и графическая формы полученных условий астатизма. В графической форме используется широко известный треугольник Паскаля. Приведены примеры условий астатизма различных порядков.

Полученные условия астатизма позволяют конструировать желаемые передаточные функции дискретных систем с высоким (произвольным) порядком астатизма при небольшом перерегулировании, колебательности и желаемой длительности переходных процессов.

Астатизм; условия астатизма; дискретная система; биномиальные коэффициенты; треугольник Паскаля.

A.V. Semenov, A.R. Gaiduk

BINOMINAL CONDITION OF POLYNOMIAL DISTURBANCES COMPENSATION

In the given paper arbitrary order astaticism conditions of discrete control systems with respect to the reference disturbance is stated and proven. Obtained conditions are the coefficients of numerator and denominator of the transfer function of this disturbance. Conditions are obtained by the error ratio method. They include the binomial coefficients which determined by the Pascal triangle. The paper provides both analytic and graphical presentation form of obtained astaticism conditions. Pascal triangle was applied in the graphic form. Examples astaticism conditions of different orders are described.

Obtained astaticism conditions allow to design desired transfer functions of discrete systems with high (arbitrary) order of astaticism with small overshoot, vibration and the desired duration of the transition.

Aastaticism; astaticism conditions; discrete system; binomial coefficients; Pascal triangle.

Введение. Одним из основных критериев качества процесса регулирования является точность систем автоматического управления (САУ) как непрерывных, так и дискретных. Астатические системы воспроизводят входные и подавляют возмущающие полиномиальные воздействия с ошибкой, равной нулю. Астатическими обычно создаются следящие системы, для которых важным является отработка без ошибок задающих полиномиальных воздействий заданной степени [1]. При проектировании мехатронных следящих систем актуальными являются задачи обеспечения нулевых ошибок по положению, скорости, ускорению и т.д., т.е. разработка управления с астатизмом первого, второго, третьего порядка и более высоких порядков [1, 2, 3]. Особенно актуальными эти задачи являются в настоящее время в связи с широким распространением цифровых средств управления (микроЭВМ, микроконтроллеры, ПЛИС).

При синтезе цифровых регуляторов некоторым методам необходимы, в частности, желаемые дискретные передаточные функции (ПФ) замкнутых систем, обладающих заданными показателями качества [4]. Эти функции удобно формировать на основе стандартных ПФ непрерывных систем с помощью известного Z_T – преобразования [5]. Однако в этом случае преобразованная функция сохраняет лишь показатели качества и свойство астатизма первого порядка. Свойства астатизма более высоких порядков – теряются [4].

Поэтому в данной работе ставится задача получения условий астатизма высоких порядков для дискретных систем, которые могли бы использоваться для конструирования соответствующих дискретных передаточных функций.

Постановка задачи. ПФ ДС в замкнутом состоянии $\mathrm{W_{yg}}(z)$ по задающему воздействию g(k) имеет следующий вид:

$$\mathrm{W_{yg}}(z)=\frac{\eta_0+\eta_1 z+\eta_2 z^2+\cdots+\eta_{m-1}z^{m-1}+\eta_m z^m}{\delta_0+\delta_1 z+\delta_2 z^2+\cdots+\delta_{n-1}z^{n-1}+\delta_n z^n}. \tag{1}$$

В этом выражении по условиям физической реализуемости $m \le n$ [1, 5].

Точность дискетных систем определяется величиной ошибок, с которой система воспроизводит задающие и подавляет возмущающие воздействия. Для определения ошибок ДС, вызванных полиномиальными воздействиями, удобнее всего применять метод коэффициентов ошибок [1, 5]. Вызванная некоторым задающим полиномиальным воздействием g(k) степени r_{g} ошибка системы с ПФ (1), в соответствии с методом коэффициентов ошибок, определяется выражением

$$\delta_{\mathrm{g}}(r_{\mathrm{g}}) = \left|\mathrm{C_{0g}}\mathrm{g}_k + \textstyle\sum_{i=1}^{r_{\mathrm{g}}} \mathrm{C}_{i\mathrm{g}}\, \Delta^i \mathrm{g}_k\right|, \tag{2}$$

где $\Delta^i \mathrm{g}_k$– i-я разность воздействия g_k, C_{ig} – i-й коэффициент ошибки по этому воздействию; $|*|$ – обозначение модуля [5].

Чтобы проектируемая система обладала астатизмом ν_{g}-го порядка по отношению к задающему воздействию g(k), необходимо, чтобы ошибка, вызванная полиномиальным воздействием g(k) степени $r_{\mathrm{g}} = (\nu_{\mathrm{g}} - 1)$ или меньше, была равна нулю, а ошибка, вызванная полиномиальным воздействием g(k) степени $r_{\mathrm{g}} = \nu_{\mathrm{g}}$ не была равна нулю, но была постоянной. Выражение (2) для системы, которая имеет астатизм ν_{g}-го порядка, можно представить в виде

$$\delta_{\mathrm{g}} = \left|\mathrm{C_{0g}}\mathrm{g}_k + \textstyle\sum_{i=1}^{\nu_g-1} \mathrm{C}_{i\mathrm{g}}\, \Delta^i \mathrm{g}_k\right| = 0, \quad r_{\mathrm{g}} \le \nu_g - 1; \tag{3}$$

$$\delta_g = \left|\mathrm{C}_{\nu_{\mathrm{g}}\mathrm{g}}\Delta^{\nu_{\mathrm{g}}}\mathrm{g}_k\right| = const \ne 0, \;\; r_{\mathrm{g}} = \nu_g. \tag{4}$$

Для случая, когда степень полиномиального воздействия g(k) равна $r_{\mathrm{g}} = \nu_{\mathrm{g}}$ и $\nu_{\mathrm{g}} \le n$, из (3) и (4) следует, что значения коэффициентов ошибок системы с астатизмом ν_{g}-го порядка должны быть равны:

$$\mathrm{C}_{(\nu-1)\mathrm{g}} = 0, \text{при } \nu = \overline{1,\nu_g}\,;\; \mathrm{C}_{\nu_{\mathrm{g}}\mathrm{g}} \ne 0. \tag{5}$$

Следовательно, чтобы система обладала астатизмом ν_{g}-го порядка, необходимо и достаточно, чтобы первые $\nu_{\mathrm{g}} - 1$ коэффициентов ошибок этой системы были равны нулю, а коэффициент ошибки с индексом ν_{g} не был равен нулю [1, 5].

В ряде работ приводятся алгебраические условия астатизма в виде условий на коэффициенты ПФ ДС в замкнутом состоянии либо только для астатизма первого порядка [5], либо в форме, неудобной для практического применения [1]. Позднее в работах [6, 7] были получены алгебраические условия астатизма произвольного порядка, которые для астатизма первого порядка и второго порядка совпадают с приведёнными в [1, 5]. Сформулируем теорему об алгебраических условиях астатизма произвольного порядка ν_g по задающему воздействию g(k), которым должны удовлетворять коэффициенты ПФ (1).

Теорема 1 (Об условиях астатизма дискретных систем). Дискретная система управления с ПФ (1) имеет астатизм ν_g-го порядка по отношению к задающему полиномиальному воздействию g(k) степени $r_g = \nu_g$, если коэффициенты этой ПФ удовлетворяют следующим условиям:

$$\sum_{i=\nu-1}^{m}\binom{i}{\nu-1}\eta_i = \sum_{i=\nu-1}^{n}\binom{i}{\nu-1}\delta_i, \quad \nu = \overline{1,\nu_g}; \tag{6}$$

$$\sum_{i=\nu_g}^{m}\binom{i}{\nu_g}\eta_i \neq \sum_{i=\nu_g}^{n}\binom{i}{\nu_g}\delta_i, \tag{7}$$

где $\binom{i}{k}$ – биномиальные коэффициенты, определяемые формулой $\binom{i}{k} = i!/k!\,(i-k)!$.

Доказательство. Передаточная функция по ошибке линейной системы с ПФ (1), вызванной задающим воздействием, определяется по формуле [1,5]:

$$W_{\varepsilon g}(z)=1 - W_{yg}(z). \tag{8}$$

Признаком астатизма ν_g-го порядка ДС к задающему воздействию g(k) является возможность представления её ПФ $W_{\varepsilon g}(z)$ (8) в виде

$$W_{\varepsilon g}(z)=\overline{W}_{\varepsilon g}(z)(z-1)^{\nu_g}, \tag{9}$$

где $\overline{W}_{\varepsilon g}(z)$ – некоторая рациональная дробь, все нули знаменателя которой по модулю строго меньше единицы.

Как известно [5], коэффициенты ошибки C_{ig} ДС определяются путем разложения правой части выражения (9) в ряд по степеням двучлена $(z-1)$, т.е.

$$W_{\varepsilon g}(z)=C_{0g} + C_{1g}(z-1) + C_{2g}(z-1)^2 + \cdots + C_{\nu g}(z-1)^{\nu} + \cdots. \tag{10}$$

Проведя в выражении (10) замену z на $\lambda+1$, т.е. $z=\lambda+1$, получим

$$\widetilde{W}_{\varepsilon g}(\lambda)=C_{0g} + C_{1g}\lambda + C_{2g}\lambda^2 + \cdots + C_{\nu g}\lambda^{\nu} + \cdots. \tag{11}$$

С другой стороны, из выражений (1) и (8) следует равенство

$$W_{\varepsilon g}(z)=\frac{e_0+e_1z+\cdots+e_{m-1}z^{m-1}+e_mz^m+\cdots+e_{n-1}z^{n-1}+e_nz^n}{\delta_0+\delta_1z+\delta_2z^2+\cdots+\delta_{n-1}z^{n-1}+\delta_nz^n}, \tag{12}$$

где e_i – коэффициенты, определяемые по формуле:

$$e_i=\begin{cases}(\delta_i-\eta_i) \text{ при } i \le m,\\ \delta_i \text{ при } m < i \le n.\end{cases} \tag{13}$$

Полагая в выражении (12) $z=\lambda+1$, раскрывая скобки вида $(\lambda+1)^i$ по формуле бинома Ньютона, приведем подобные. В результате будем иметь:

$$\widetilde{W}_{\varepsilon g}(\lambda)=\frac{\tilde{e}_0+\tilde{e}_1\lambda+\tilde{e}_2\lambda^2+\cdots+\tilde{e}_n\lambda^n}{\tilde{\delta}_0+\tilde{\delta}_1\lambda+\tilde{\delta}_2\lambda^2+\cdots+\tilde{\delta}_n\lambda^n}, \tag{14}$$

где

$$\tilde{e}_k = \sum_{i=k}^{n}\binom{i}{k}e_i, \qquad \tilde{\delta}_k = \sum_{i=k}^{n}\binom{i}{k}\delta_i, \quad k=\overline{0,n}. \tag{15}$$

Приравнивая (11) и (14), последовательно найдем выражения для коэффициентов ошибок системы с ПФ (1)

$$C_{0g} = \frac{\tilde{e}_0}{\tilde{\delta}_0}; \ C_{1g} = \frac{\tilde{e}_1-\tilde{\delta}_1C_{0g}}{\tilde{\delta}_0}; \ C_{2g} = \frac{\tilde{e}_2-\tilde{\delta}_1C_{1g}-\tilde{\delta}_2C_{0g}}{\tilde{\delta}_0}; \ldots \tag{16}$$

Подчеркнем, что коэффициенты $\tilde{e}_i$ и $\tilde{\delta}_i$ связаны с коэффициентами η_i и δ_i ПФ (1) формулами (13) и (15). Поэтому для определения коэффициентов $\tilde{e}_i$ воспользуемся условиями (6) и (7). Перенеся сумму левых частей выражений (6) и (7) вправо, соответственно получим

$$\sum_{i=\nu-1}^{n}\binom{i}{\nu-1}\delta_i - \sum_{i=\nu-1}^{m}\binom{i}{\nu-1}\eta_i = 0, \quad \nu=\overline{1,\nu_g}; \tag{17}$$

$$\sum_{i=\nu_g}^{n}\binom{i}{\nu_g}\delta_i - \sum_{i=\nu_g}^{m}\binom{i}{\nu_g}\eta_i \neq 0. \tag{18}$$

Преобразуем суммы коэффициентов в левых частях выражений (17) и (18) следующим образом:

$$\sum_{i=\nu-1}^{m}\binom{i}{\nu-1}(\delta_i-\eta_i) - \sum_{i=m+1}^{n}\binom{i}{\nu-1}\delta_i = 0, \quad \nu=\overline{1,\nu_g}; \tag{19}$$

$$\sum_{i=\nu_g}^{m}\binom{i}{\nu_g}(\delta_i-\eta_i)-\sum_{i=m+1}^{n}\binom{i}{\nu_g}\delta_i \neq 0. \qquad (20)$$

С учетом (13) из выражений (19) и (20) получаем

$$\sum_{i=\nu-1}^{n}\binom{i}{\nu-1}e_i = 0, \quad \nu=\overline{1,\nu_g}; \;\; \sum_{i=\nu_g}^{n}\binom{i}{\nu_g}e_i \neq 0. \qquad (21)$$

Сравнивая суммы в выражении (21) и первом выражении (15), видим, что они равны при $k=\nu-1$. Перепишем выражения (21) с учетом обозначений (15) для $\tilde{e}_k$. В результате получим

$$\tilde{e}_{\nu-1}=0, \quad \nu=\overline{1,\nu_g}; \;\; \tilde{e}_{\nu_g}\neq 0. \qquad (22)$$

Подставляя значения $\tilde{e}_{\nu-1}$ и $\tilde{e}_{\nu_g}$, полученные в (22), в формулы (16), найдем, что $C_{\nu_g-1,g}=\dots=C_{1g}=C_{0g}=0$ $C_{\nu_g g}\neq 0$. Отсюда, согласно (5), следует, что если коэффициенты ПФ ДС, удовлетворяют условиям (6), (7) теоремы, то она имеет астатизм ν_g-го порядка. ***Доказательство окончено.***

Подчеркнем, что число равенств типа (6) равно порядку астатизма ν_g. Отметим также, что выражения (6) можно использовать и для случая $m=n$. При этом $m,n \geq \nu_g$.

Примеры условий астатизма. Приведем ряд условий, при которых система с ПФ (1) имеет заданный порядок астатизма. Если $\nu_g=1$, из выражения (6) следует условие вида $\sum_{i=0}^{m}\eta_i=\sum_{i=0}^{n}\delta_i$, которое совпадает с приведенным в [1,5]. Если $\nu_g=2$, то условия (6) соответствуют двум равенствам: $\sum_{i=0}^{m}\eta_i=\sum_{i=0}^{n}\delta_i$; $\sum_{i=1}^{m}i\eta_i=\sum_{i=1}^{n}i\delta_i$, которые совпадают с приведенными в [5]. Если $\nu_g=3$, то условия (6) соответствуют трем равенствам: $\sum_{i=0}^{m}\eta_i=\sum_{i=0}^{n}\delta_i$; $\sum_{i=1}^{m}i\eta_i=\sum_{i=1}^{n}i\delta_i$; $\sum_{i=2}^{m}\binom{i}{2}\eta_i=\sum_{i=2}^{n}\binom{i}{2}\delta_i$. Таким образом, используя биномиальные соотношения (6), можно записать алгебраические условия астатизма произвольного порядка дискретных систем с ПФ (1).

Биномиальные условия астатизма на основе треугольника Паскаля. Заметим, что в выражениях (6) и (7) «весовые множители» перед коэффициентами δ_i и η_i ПФ $W_{yg}(z)$ могут быть достаточно просто найдены по треугольнику Паскаля, предлагаемый вид которого приведен на рис. 1.

По сравнению с классическим видом треугольника Паскаля, принятого в математике, здесь добавлены параметры ν_g, m, n систем управления, определенные в соответствии с выражениями (1) и (6), (7). Вдоль «правого ребра» треугольника располагаются значения ν от 1 до ν_g. Вдоль «левого ребра» треугольника располагается индекс i весовых множителей. Фактически весовые множители ν-го условия астатизма образуют в треугольнике Паскаля ν-ю «левую диагональ», которая параллельна «левому ребру» треугольника.

Каждый весовой множитель $\binom{i}{\nu-1}$ находится на пересечении ν-й «левой диагонали» треугольника с i-й строкой. Например, весовой множитель $\binom{7}{3-1}$ из 3-го равенства (6) находится на пересечении 3-й «левой диагонали» треугольника с 7-й строкой и равен 21; а весовой множитель $\binom{6}{4-1}$ из 4-го равенства (6) находится на пересечении 4-й «левой диагонали» треугольника с 6-й строкой и равен 20 (см. пример 1 на рис. 1).

Рассмотрим пример получения алгебраических условий астатизма 6-го порядка для системы управления с ПФ вида (1) при $m=6$, $n=7$ по треугольнику Паскаля. В соответствии с заданием, поставим маркеры $m=6$, $n=7$, $\nu_g=6$ и отметим на треугольнике Паскаля границы поиска весовых множителей: «левая диагональ» с номером $\nu=\nu_g=6$, строка с номером $i=n=7$. Поскольку $\nu_g=6$, то и условия будут состоять из шести равенств вида (6), которые примут вид:

$$\delta_0+\delta_1+\delta_2+\delta_3+\delta_4+\delta_5+\delta_6+\delta_7=\eta_0+\eta_1+\eta_2+\eta_3+\eta_4+\eta_5+\eta_6;$$
$$\delta_1+2\delta_2+3\delta_3+4\delta_4+5\delta_5+6\delta_6+7\delta_7=\eta_1+2\eta_2+3\eta_3+4\eta_4+5\eta_5+6\eta_6;$$
$$\delta_2+3\delta_3+6\delta_4+10\delta_5+15\delta_6+21\delta_7=\eta_2+3\eta_3+6\eta_4+10\eta_5+15\eta_6;$$
$$\delta_3+4\delta_4+10\delta_5+20\delta_6+35\delta_7=\eta_3+4\eta_4+10\eta_5+20\eta_6;$$
$$\delta_4+5\delta_5+15\delta_6+35\delta_7=\eta_4+5\eta_5+15\eta_6;$$
$$\delta_5+6\delta_6+21\delta_7=\eta_5+6\eta_6.$$

Заметим, что коэффициенты пятого равенства полученных условий взяты из пятой «левой диагонали» треугольника (см. пример 2 на рис. 1).

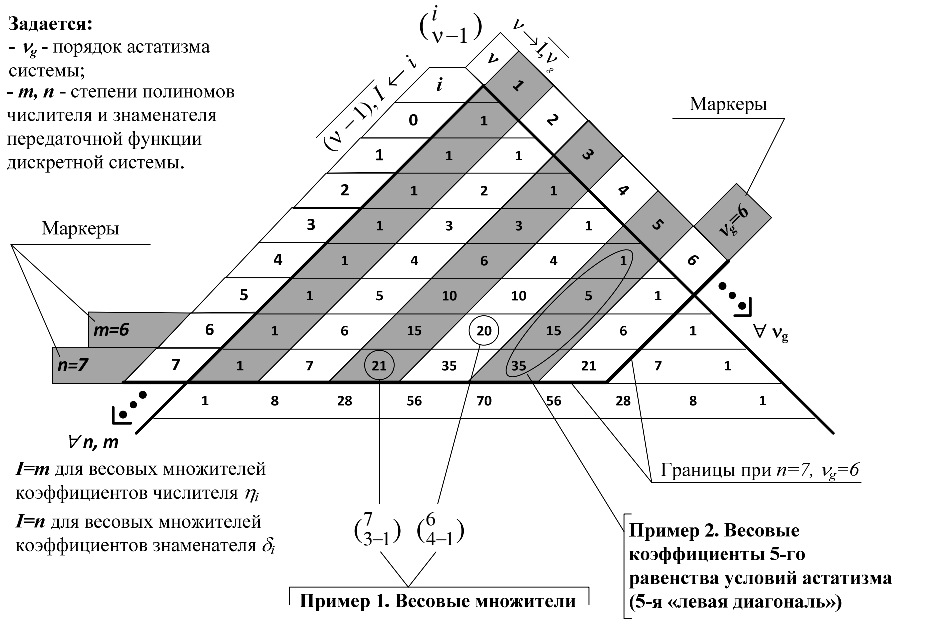

Рис. 1. Диаграмма получения алгебраических условий астатизма дискретных систем управления

Подчеркнём, что для выполнения требований к порядку астатизма коэффициенты ПФ $W_{yg}(z)$ (1) должны удовлетворять одновременно всем полученным равенствам.

Заключение. Полученные в работе биномиальные условия компенсации полиномиальных воздействий позволяют: определить порядок астатизма ДС с заданной ПФ; сконструировать ПФ ДС, которая должна обладать заданным порядком астатизма. Последнее можно выполнить, например, путем изменения коэффициентов числителя таким образом, чтобы выполнялись условия приведенной выше теоремы об астатизме.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Красовский А.А., Поспелов Г.С.* Основы автоматики и технической кибернетики. – М.–Л.: Госэнергоиздат, 1962.
2. *Семенов А.В., Гeложе Ю.А.* Моделирование системы слежения с астатизмом второго порядка // Материалы 4-й Международной научно-технической и научно-методической конференции «Проблемы современной системотехники». – Таганрог, 2010. – С. 58-62.
3. *Семенов А.В., Гeложе Ю.А., Чуйков В.М., Семерников А.А.* Автоматическая следящая система с астатизмом третьего порядка и цифровым управлением. Мехатроника, автоматизация, управление (МАУ-2009) // Материалы Международной научно-технической конференции. – Таганрог: Изд-во ТТИ ЮФУ, 2009. – С. 39-42.

4. *Семенов А.В., Гайдук А.Р.* Метод построения желаемых передаточных функций дискретных систем с высоким порядком астатизма // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2013. – № 2 (139). – С. 14-20.
5. *Гайдук А.Р.* Теория автоматического управления: Учебник. – М.: Высшая школа, 2010.
6. *Семенов А.В., Гайдук А.Р.* Алгебраические условия астатизма дискретных систем. Радиоэлектронные средства передачи и приёма сигналов и визуализации информации // Материалы Второй Всероссийской конференции. – М.–Таганрог: Изд-во ТТИ ЮФУ, 2012. – С. 81-84.
7. *Семенов А.В.* Условия астатизма произвольного порядка дискретных систем управления на основе треугольника Паскаля // Математические проблемы современной теории управления системами и процессами: Материалы Международной молодежной конференции. – Воронеж: ИПЦ Научная книга, 2012. – С. 52-57.

Статью рекомендовал к опубликованию д.т.н., профессор Р.А. Нейдорф.

Гайдук Анатолий Романович – Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Южный федеральный университет»; e-mail: gaiduk_2003@mail.ru; 347904, г. Таганрог, ул. Слесарная 26, кв. 2; тел.: 88634626287; кафедра систем автоматического управления; д.т.н.; профессор.

Семенов Александр Валерьевич – e-mail: semenov-av@rambler.ru; 347922, г. Таганрог, ул. Шевченко, 2; тел.: 88634312350; ведущий конструктор.

Gaiduk Anatoly Romanovich – « Taganrog Institute of Technology – Federal State-Owned Autonomy Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”; e-mail: gaiduk_2003@mail.ru; 26, Slesarnaya street, app. 2, Taganrog, 347904, Russia; phone: +78634626287; the department of automatic control systems; dr. of eng. sc.; professor.

Semenov Alexander Valerevich – e-mail: semenov-av@rambler.ru; 2, Shevchenko street, Taganrog, 347922, Russia; leading designer .

УДК 504.064.36

С.С. Алхасов, Л.П. Милешко, А.А. Целых

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОНЦЕНТРАЦИЙ ИОНОВ ТЯЖЁЛЫХ МЕТАЛЛОВ ПОСРЕДСТВОМ БЛОКА ОБРАБОТКИ ДАННЫХ МУЛЬТИСЕНСОРНОЙ СИСТЕМЫ ДЛЯ МОНИТОРИНГА ВОДНЫХ СРЕД

Рассматриваются мультисенсорные системы (МСС), которые уже начинают находить широкое применение в экологическом мониторинге. В МСС для мониторинга водных сред наиболее часто в качестве сенсоров используют ионоселективные электроды (ИСЭ). Блок обработки данных – программный компонент МСС. Он состоит из двух модулей. Первый разделяет вектор-столбцы разностей потенциалов на кластеры посредством сети Кохонена. Второй модуль выполняет количественную идентификацию с помощью радиальных базисных сетей. Обучающий массив концентраций формируется генератором псевдослучайных чисел. Для анализа точности вычислений созданы дополнительные скрипт-программы. Показано, что точность вычисления концентраций ионов зависит от величины коэффициента селективности ИСЭ. Даны рекомендации по подбору ИСЭ для МСС.

Мультисенсорная система; экологический мониторинг; тяжёлые металлы; ионоселективные электроды; искусственные нейронные сети; сети Кохонена; радиальные базисные сети.