**Коберси Искандар Сулейман –** e-mail: iskobersi@gmail.com; 347900, г. Таганрог, ул. Петровская, 17; тел.: 89518382131; кафедра систем автоматического управления; к.т.н.; доцент.

**Финаев Валерий Иванович** – e-mail: fin_val_iv@tsure.ru; 347928, г. Таганрог, ул. Энгельса, 1; тел.: 88634371689; кафедра систем автоматического управления; зав. кафедрой; д.т.н.; профессор.

**Beloglazov Denis Alexandrovich –** Federal State-Owned Autonomy Educational Establishment of Higher Vocational Education "Southern Federal University"; e-mail: fin_val_iv@tsure.ru; 44, Nekrasovskiy, Taganrog, 347928, Russia; phone: +78634371689; the department of automatic control systems; assistant.

**Kobersi Iskandar Suleiman –** e-mail: iskobersi@gmail.com; 17, Petrovskaya street, Taganrog, 347900, Russia; phone: +79518382131; the department of automatic control systems; cand. of eng. sc.; associate professor.

**Finaev Valeri Ivanovich** – e-mail: fin_val_iv@tsure.ru; 1, Engelsa street, Taganrog, 347928, Russia; phone: +78634371689; the department of automatic control systems; head of department; dr. of eng. sc.; professor.

УДК 519.216.2

**И.Ю. Кузнецова**

## ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ФИНАНСАХ

*Представлен обзор численных методов решения стохастических дифференциальных уравнений, включая метод Мильштейна, методы Тейлора и Рунге-Кутта различных порядков. Так же для более понятного описания данных методов приведены основные определения из теории стохастических дифференциальных уравнений. В статье даны определение основной концепции, описание простейших численных методов, а также понятие сходимости и порядка аппроксимации решений стохастических дифференциальных уравнений. Решениями являются непрерывные вероятностные процессы, что может быть использовано при моделировании финансовых систем, что показано на примере уравнения Блэка-Шоулза.*

*Стохастические дифференциальные уравнения; численные методы; сходимость; порядок аппроксимации.*

**I.Y. Kuznetsova**

## NUMERICAL SOLUTION OF STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATIONS IN FINANCE

*This chapter is an introduction and survey of numerical solution methods for stochastic differential equations, including the Milstein method, Taylor and Runge-Kutta methods of various orders. In the article described basic definitions of theory of stochastic differential equations. It includes a review of fundamental concepts, a description of elementary numerical methods and the concepts of convergence and order for stochastic differential equation solvers. The solutions will be continuous stochastic processes that represent diffusive dynamics, a common modeling assumption for financial systems, for examples, Black–Scholes Option Pricing Model.*

*Stochastic differential equations; numerical methods; convergence; order for solvers.*

**1. Стохастические дифференциальные уравнения.** СДУ стали стандартными моделями финансовых величин, таких как цены активов, процентная ставка, и их деривативов. В отличие от детерминированных моделей, таких как обыкновенные дифференциальные уравнения, которые имеют единственное решение для каждого соответствующего начального условия, СДУ имеют решения, являющиеся стохастическими процессами с непрерывным временем. Методы численного решения СДУ основаны схожей техникой решения обыкновенных дифференциальных уравнений, но обобщены для обеспечения стохастической динамики.

Начнем с быстрого обзора наиболее общих понятий стохастического исчисления, которые необходимы в процессе нашего описания численных методов.

Множество случайных величин $X_t$, где индекс $t \geq 0$ – действительные числа, называется *стохастическим процессом с непрерывным временем*. Каждый пример или *реализация* стохастического процесса есть выбор из случайных величин $X_t$ для каждого $t$, поэтому его можно считать функцией от $t$.

Всякая (детерминистическая) функция $f(t)$, очевидно, может быть рассмотрена как стохастический процесс с дисперсией $V(f(t)) = 0$. Основным примером стохастического процесса, повсеместно встречающегося в моделях физики, химии и финансов, является Винеровский процесс, т.е. стохастический процесс с непрерывным временем, удовлетворяющий трем свойствам:

*Свойство 1*. Для каждого $t$, случайная величина $W_t$ есть нормально распределенная случайная величина с нулевым математическим ожиданием и дисперсией, равной $t$.

*Свойство 2*. Для любых $t_1 < t_2$, нормальные случайные величины $W_{t_1}$ и $W_{t_2} - W_{t_1}$ независимы, что фактически означает независимость все приращений $\Delta W_t$ при $0 \leq t \leq t_1$.

*Свойство 3*. Винеровский процесс $W_t$ может быть представлен непрерывными траекториями.

Винеровский процесс, названный так в честь Норберта Винера, является математической концепцией, формализирующей случайное поведение, охарактеризованное ботаником Робертом Броуном в 1827 году, обычно называемое броуновским движением. Это движение может быть строго определено, как размер предельной области случайного блуждания с размером шага и временным интервалом, стремящимся к нулю. Броуновское движение имеет ключевое значение для моделирования стохастических процессов, так как представляет собой интеграл от некоторого идеализированного шума, не зависящего от частоты и называемого белым шумом. Часто винеровский процесс используется для представления случайного внешнего воздействия на другую детерминистическую систему, или более обще, динамические изменения, которые по ряду причин не могут быть представлены детерминистически.

Типичный *диффузионный процесс* в финансах моделируется как дифференциальное уравнение, включающее в себя детерминистический член или *дрейф* и стохастический или *диффузионный* члены, последний представляется Винеровским процессом, как в следующем уравнении:

$$dX = a(t, X)dt + b(t, X)dW_t. \tag{1}$$

Отметим, что СДУ (1) задано в дифференциальной форме, в отличие от ОДУ, задаваемых в форме производной. Это происходит потому, что многие интересующие нас стохастические процессы такие, как Броуновское движение, являются непрерывными, но не дифференцируемы, поэтому СДУ (1) по определению является интегральным уравнением:

$$X(t) = X(0) + \int_0^t a(s, y)ds + \int_0^t b(s, y)dW_s,$$

где смысл последнего интеграла, называемого интегралом Ито, будет определен позднее.

Пусть $c = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = d$ точки отрезка $[c, d]$. Интеграл Римана определяется как предел сумм

$$\int_c^d f(x)dx = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{i=1}^n f(t_i')\Delta t_i,$$

где $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ и $t_{i-1} \le t_i' \le t_i$. Аналогично, *интеграл Ито* есть предел

$$\int_c^d f(t)dW_t = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{i=1}^n f(t_{i-1})\Delta W_i,$$

где $\Delta W_i = W_i - W_{i-1}$ – шаг Броуновского движения. Отметим главное отличие: тогда как в качестве точки $t_i'$ в интеграле Римана может быть выбрана любая точка интервала $(t_{i-1}, t_i)$, а соответствующей точкой для интеграла Ито является левая граница рассматриваемого интервала.

Дифференциал $dW_t$ Броуновского движения $W_t$ называется *белым шумом*. Типичным решением является комбинация дрейфа и диффузии Броуновского движения.

Для того чтобы решить СДУ аналитически, необходимо ввести правило для стохастических дифференциалов, называемое *формулой Ито*:

Если $Y = f(t, X)$, тогда

$$dY = \frac{\partial f}{\partial t}(t, X)dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t, X)dx + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, X)dxdx, \tag{2}$$

где $dxdx$ определяется с использованием следующих тождеств:

$$\begin{aligned} &dtdt = 0, \\ &dtdW_t = dW_t dt = 0, \\ &dW_t dW_t = dt. \end{aligned} \tag{3}$$

Формула Ито является стохастическим аналогом правила для обыкновенного исчисления. Несмотря на то, что формула Ито записывается в дифференциальной форме для простоты понимания, ее значение эквивалентно интегралу Ито от обеих частей равенства.

Некоторые важные свойства типичных стохастических дифференциальных уравнений могут быть проиллюстрированы, используя следующий исторически важный пример их сферы финансов, часто называемый диффузионным уравнением Блэка-Шоулза:

$$\begin{cases} dX = \mu X dt + \sigma X dW_t, \\ X(0) = 0 \end{cases} \tag{4}$$

с постоянными $\mu$ и $\sigma$. Хотя уравнение сравнительно простое, тот факт, что оно может быть точно решено делает его исключительно важным для вывода формулы определения цен простых опционов на ограниченном временном пространстве.

Решением стохастического дифференциального уравнения Блэка-Шоулза является геометрическое броуновское движение

$$X(t) = X_0 e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t}. \quad (5)$$

Проверим это, запишем

$$X = f(t, Y) = X_0 e^Y,$$

где $Y = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t$. По формуле Ито

$$dX = X_0 e^Y dY + \frac{1}{2} e^Y dYdY,$$

где $Y = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t$. Используя дифференциальные тождества формулы Ито,

$$dYdY = \sigma^2 dt,$$

получим

$$dX = X_0 e^Y \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)dt + X_0 e^Y \sigma dW_t + \frac{1}{2}\sigma^2 e^Y dt = X_0 e^Y \mu dt + X_0 e^Y \sigma dW_t =$$
$$= \mu X dt + \sigma X dW_t,$$

что и требовалось.

Рис. 1 показывает реализацию геометрического броуновского движения с постоянными коэффициентами дрейфа $\mu$ и диффузии $\sigma$. Подобно случаю обыкновенных дифференциальных уравнений, относительно небольшое число стохастических дифференциальных уравнений имеют решение в замкнутом виде. Часто необходимо использовать методы численной аппроксимации.

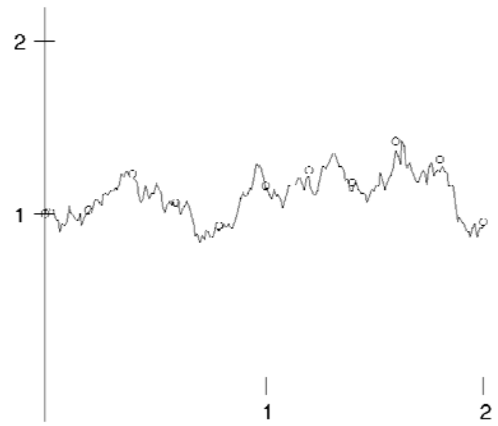


*Рис. 1. Решение стохастического дифференциального уравнения Блэка-Шоулза (4)*

**2. Численные методы для СДУ.** Простейшим эффективным численным методом аппроксимации обыкновенных дифференциальных уравнений является метод Эйлера. Метод Эйлера-Маруяма является аналогом метода Эйлера для обыкновенных дифференциальных уравнений. Определим приближенное решение на сетке

$$c = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = d$$

и зададим приближенные значения $y$

$$\omega_0 < \omega_1 < \omega_2 < \ldots < \omega_n$$

в соответствующих точках $t$. Учитывая СДУ начальной задачи

$$\begin{cases} dX(t) = a(t, X)dt + b(t, X)dW_t \\ X(c) = X_c \end{cases} \tag{6}$$

вычислим решение приближенно:

**Метод Эйлера-Маруяма**

$$\begin{aligned} &\omega_0 = X_0 \\ &\omega_{i+1} = \omega_i + a(t_i, \omega_i)\Delta t_{i+1} + b(t_i, \omega_i)\Delta W_{i+1}, \end{aligned} \tag{7}$$

где

$$\begin{aligned} &\Delta t_{i+1} = t_{i+1} - t_i, \\ &\Delta W_{i+1} = W(t_{i+1}) - W(t_i). \end{aligned} \tag{8}$$

Ключевой вопрос: как моделировать броуновское движение $\Delta W_i$. Определим $N(0,1)$ как нормально распределенную случайную величину с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией. Каждое случайное значение $\Delta W_i$ вычисляется как

$$\Delta W_i = z_i \sqrt{\Delta t_i}\ , \tag{9}$$

где $z_i$ выбирается из $N(0,1)$. Обратите внимание на отличие от случая детерминированного обыкновенного дифференциального уравнения. Каждая последовательность $\{\omega_0, \ldots, \omega_n\}$, полученная методом Эйлера–Маруямы, является приближенной реализацией решения стохастического процесса $X(t)$, зависящего от выбранных случайных чисел $z_i$. Так как $W_t$ — стохастический процесс, то каждая реализация будет отличаться, а следовательно, и наше приближение.

В качестве первого примера покажем, как применяется метод Эйлера-Маруямы к СДУ Блэка-Шоулза (4). Равенства (7) имеют вид

$$\begin{aligned} &\omega_0 = y_0, \\ &\omega_{i+1} = \omega_i + \mu\omega_i\Delta t_i + \sigma\omega_i\Delta W_i. \end{aligned} \tag{10}$$

Точная реализация (полученная из решения (5)) совместно с соответствующей аппроксимацией Эйлера-Маруямы показаны на рис. 1. Соответственно, мы предполагаем, что приближенное решение использует некоторую реализацию броуновского движения в качестве точного решения. Обратите внимание на совпадение между точным решением и точками приближенного решения, изображенных кружочками с шагом по времени 0,2.

Непрерывной кривой изображено решение (5), кругами отмечены решения, полученные с использованием аппроксимации Эйлера-Маруяма. Установлены следующие параметры: $\mu = 0.2$, $\sigma = 0.4$, $\Delta t = 0.2$

В качестве другого примера рассмотрим *уравнение Лангевина*

$$dX(t) = -\mu X(t)dt + \sigma dW_t, \tag{11}$$

где $\mu$ и $\sigma$ – положительные константы. В этом случае невозможно аналитически получить решение этого уравнения в терминах простых процессов. Решением уравнения Ленгевина является стохастический процесс, называемый *процессом Орштейна–Уленбека*. Рис. 2 показывает одну реализацию приближенного решения. Решение было получено с помощью аппроксимации Эйлера–Маруямы, используя следующие шаги:

$$\begin{aligned} &\omega_0 = X_0, \\ &\omega_{i+1} = \omega_i - \mu\omega_i \Delta t_i + \sigma\omega_i \Delta W_i \end{aligned} \tag{12}$$

для $i = 1, \ldots, n$. Это стохастическое дифференциальное уравнение применяется при моделировании систем, имеющих тенденцию возвращения к конкретному состоянию, в нашем случае к состоянию $X = 0$, в присутствии шумового фона. В частности, модели процентной ставки зачастую содержат предположения о возвращении к среднему.

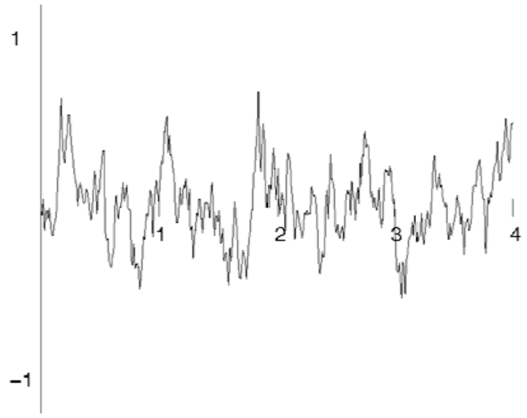


*Рис. 2. Решение уравнения Лангевина (11)*

Выше изображено приближенное решение с параметрами $\mu$ = 10, $\sigma$ = 1, вычисленное по методу Эйлера-Марнямы

**3. Сильная сходимость решений СДУ.** Определение сходимости сходно с понятием сходимости решений обыкновенных дифференциальных уравнений, различия вызваны тем, что решение СДУ является случайным процессом и каждая вычисленная траектория является лишь одной возможной реализацией этого процесса. Каждая вычисленная траектория решения $\omega(t)$, полученная, например, методом Эйлера–Маруямы, дает случайное значение в точке *T*, таким образом, $\omega(T)$ также является случайной величиной. Разница между значениями в момент времени *T*, $e(T) = X(T) - \omega(T)$, также является случайной величиной.

Говорят, что численное решение $\omega_h$ с шагом по времени *h* сильно сходится к точному решению $X(t)$ в момент времени *T*, если

$$\lim_{h \to 0} E\left\{\left|X(T) - \omega_h(T)\right|\right\} = 0,$$

где *E* обозначает математическое ожидание. В дальнейшем мы будем определять скорость сильной сходимости приближенного решения через понятие порядка. *Решение СДУ сходится сильно с порядком m*, если математическое ожидание ошибки имеет *m*-й порядок от шага, т.е. для любого момента времени *T*,

$$E\left\{\left|X(T) - \omega_h(T)\right|\right\} = O\left(h^m\right)$$

для достаточно малого размера шага *h*. Это определение обобщает стандартные критерии сходимости для обыкновенных дифференциальных уравнений, и сводится к обычному определению, когда стохастическая часть уравнения обращается в нуль.

Хотя метод Эйлера для обыкновенных дифференциальных уравнений имеет первый порядок, метод Эйлера–Маруямы для стохастических дифференциальных уравнений имеет порядок 0,5. Этот факт доказан Гикхманом и Скороходовым в 1972 г., при наложении соответствующих условий на функции $a$ и $b$ в (6).

Для того чтобы получить сильный метод 1-го порядка для СДУ, к методу должны быть добавлены «стохастические ряды Тейлора». Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение

$$\begin{cases} dX(t) = a(X,t)dt + b(X,t)dW_t, \\ X(0) = 0. \end{cases} \tag{13}$$

**Метод Милштейна**

$$\begin{aligned} &\omega_0 = X_0, \\ &\omega_{i+1} = \omega_i + a(\omega_i,t_i)\Delta t_i + b(\omega_i,t_i)\Delta W_i + \\ &+\frac{1}{2}b(\omega_i,t_i)\frac{\partial b}{\partial x}(\omega_i,t_i)\left((\Delta W_i)^2 - \Delta t_i\right). \end{aligned} \tag{14}$$

Метод Милштейна имеет первый порядок. Отметим, что метод Милштейна идентичен методу Эйлера–Маруямы, если диффузионная часть $b(X,t)$ не зависит от $X$. В данном случае метод Милштейна в целом будет сходиться быстрее к точному решению, чем метод Эйлера-Маруямы, при шаге $\Delta t_i \to 0$.

Для сравнения методов Эйлера–Маруямы и Милштейна применим их к стохастическому дифференциальному уравнению Блэка-Шоулза

$$dX = \mu X dt + \sigma X dW_t. \tag{15}$$

Аппроксимацию Эйлера–Маруямы мы рассмотрели выше. Остановимся на методе Милштейна

$$\begin{aligned} &\omega_0 = X_0, \\ &\omega_{i+1} = \omega_i + \mu\omega_i\Delta t_i + \sigma\omega_i\Delta W_i + \frac{1}{2}\sigma\left((\Delta W_i)^2 - \Delta t_i\right). \end{aligned} \tag{16}$$

Применение методов Эйлера-Маруямы и Милштейна с уменьшением шага $h$ приводит к последовательному улучшению приближенного решения.

Метод Милштейна является методом Тейлора, это означает, что данный метод – часть разложения решения в стохастический ряд Тейлора. Во многих случаях это является недостатком, так как в приближенном решении присутствует частная производная, которая должна быть явно определена пользователем. Этот метод аналогичен методу Тейлора для решения обыкновенных дифференциальных уравнений, который редко используется на практике по этой же причине. Для решения этой проблемы были разработаны методы Рунге–Кутта для ОДУ, которые заменяют дополнительные частные производные в разложении Тейлора функцией оценки исходного уравнения.

В контексте стохастического дифференциального уравнения, для сильного метода Милштейна может быть произведена замена, требующая оценки функции $b(X)$ в двух точках на каждой итерации. Эвристический вывод может быть осуществлен путем замены

$$b_x(\omega_i) \approx \frac{b(\omega_i + b(\omega_i)\sqrt{\Delta t_i}) - b(\omega_i)}{b(\omega_i)\sqrt{\Delta t_i}}$$

в формуле Милштейна (14), что приводит к следующим методам.

**Сильный метод Рунге–Кутта 1-го порядка**

$$\omega_0 = X_0,$$
$$\omega_{i+1} = \omega_i + a(\omega_i)\Delta t_i + b(\omega_i\Delta W_i +$$
$$+\frac{1}{2}\Big(b(\omega_i + b(\omega_i)\sqrt{\Delta t_i}) - b(\omega_i)\Big)\Big((\Delta W_i)^2 - \Delta t_i\Big).$$

Порядок представленных здесь методов решения СДУ, $1/2$ для метода Эйлера–Маруямы и 1 – для методов Милштейна и Рунге–Кутта, считается низким по стандартам ОДУ. Могут быть построены методы более высокого порядка для СДУ, но они становятся гораздо более сложными с возрастанием порядка. В качестве примера рассмотрим сильный метод 1,5 порядка для СДУ (13), предложенный Платеном и Вагнером:

**Сильный метод Тейлора порядка 1.5**

$$\omega_0 = X_0,$$
$$\omega_{i+1} = \omega_i + a\Delta t_i + b\Delta W_i + \frac{1}{2}bb_x\Big((\Delta W_i)^2 - \Delta t_i\Big) + a_y\sigma\Delta Z_i +$$
$$+\frac{1}{2}\left(aa_x + \frac{1}{2}b^2a_{xx}\right)(\Delta t_i)^2 + \left(ab_x + \frac{1}{2}b^2b_{xx}\right)(\Delta W_i\Delta t_i - \Delta Z_i) + \qquad (17)$$
$$+\frac{1}{2}b\Big(bb_{xx} + b_x^2\Big)\left(\frac{1}{3}(\Delta W_i)^2 - \Delta t_i\right)\Delta W_i,$$

где частные производные обозначены индексами, случайная величина $\Delta Z_i$ распределена по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием, дисперсией $E\Big((\Delta Z_i)^2\Big) = \frac{1}{3}(\Delta t_i)^3$ и коррелирует с $\Delta W_i$ с ковариацией

$$E(\Delta Z_i\Delta W_i) = \frac{1}{2}(\Delta t_i)^2\cdot$$

Отметим, что $\Delta Z_i$ может быть получена как

$$\Delta Z_i = \frac{1}{2}\Delta t_i\Big(\Delta W_i + \Delta V_i\big/\sqrt{3}\Big),$$

где $\Delta V_i$ выбрана независимо от $\sqrt{\Delta t_i}N(0,1)$.

Выбор одного из методов высшего порядка требуемого для решения определенной задачи зависит от того, как будут использоваться полученные приближенные решения. В случае обыкновенных дифференциальных уравнений обычно предполагается, что начальное условие и уравнение известны с определенной точностью. Тогда имеет смысл искать решение, как можно более близкое к этой точности, для этого и требуются методы высшего порядка. В контексте стохастических дифференциальных уравнений, в частности, если начальные условия выбраны из распределения вероятности, преимущества методов высокого порядка часто являются менее убедительными и их применение неоправданно, если приводит к увеличению объема вычислительных операций.

**4. Слабая сходимость методов решения СДУ.** Сильная сходимость позволяет вычислять точные приближенные решения на основе отдельной реализации. Для некоторых приложений требуется подробная информация. В других случаях цель состоит в нахождении распределения вероятностей решения $X(T)$, и отдельные реализации не имеют определяющего значения.

Слабые решатели существуют для удовлетворения этой потребности. Они могут быть проще соответствующих сильных методов, так как их цель заключается только в моделировании распределения вероятности. Полезны следующие дополнительные определения.

Говорят, что разностная аппроксимация $\omega_h$ с шагом по времени *h слабо сходится* к точному решению $X(T)$, если

$$\lim_{h \to 0} E\left\{ f(\omega_h(T)) \right\} = E\left\{ f(X(T)) \right\}$$

для всех многочленов *f(x)*.

Согласно этому определению все моменты сходятся, если $h \to 0$. Если стохастическая часть уравнения равна нулю и начальное условие детерминированно, то данное определение согласуется с определением сильной сходимости и стандартным определением для обыкновенного дифференциального уравнения.

Для слабо сходящихся методов также может быть установлен порядок сходимости. Мы говорим, что метод сходится слабо с порядком *m*, если ошибка в момент времени *T* имеет *m*-й порядок от шага, или

$$\left| E\left\{ f(X(T)) \right\} - E\left\{ f(\omega_h(T)) \right\} \right| = O(h^m)$$

для достаточно малого шага *h*.

В целом, скорости слабой и сильной сходимости различны. В отличие от случая обыкновенных дифференциальных уравнений, где метод Эйлера имеет 1-й порядок, метод Эйлера–Маруямы для СДУ имеет порядок $m = 1/2$ Однако, метод Эйлера–Маруямы гарантированно слабо сходится с 1-м порядком.

Слабые методы высшего порядка могут быть гораздо проще соответствующих сильных методов и доступны в различных формах. Наиболее прямой подход заключается в использовании разложения Тейлора–Ито, стохастический аналог разложения Тейлора для детерминистических функций. Например, слабо сходящийся метод для 2-го порядка для СДУ заключается в следующем:

**Слабый метод Тейлора 2-го порядка**

$$\omega_0 = X_0,$$

$$\begin{aligned} \omega_{i+1} &= \omega_i + a\Delta t_i + b\Delta W_i + \frac{1}{2} bb_x \left( (\Delta W_i)^2 - \Delta t_i \right) + a_x b \Delta Z_i + \\ &+ \frac{1}{2}\left( aa_x + \frac{1}{2} a_{xx} b^2 \right)(\Delta t_i)^2 + \left( ab_x + \frac{1}{2} b_{xx} b^2 \right)(\Delta W_i \Delta t_i - \Delta Z_i), \end{aligned} \tag{18}$$

где $\Delta W_i$ выбрана из $\sqrt{\Delta t_i} N(0,1)$ и $\Delta Z_i$ распределена так же, как и в рассмотренном выше сильном методе Тейлора 1.5 порядка.

Следующий подход заключается в имитации методов Рунге–Кутта для обыкновенных дифференциальных уравнений. Эти методы заменяют явные производные старших порядков в разложении Тейлора-Ито на оценки функции во внутренних точках текущего интервала решения. Платен [32] предложил следующий слабый метод типа Рунге–Кутта 2-го порядка:

**Слабый метод Рунге–Кутта 2-го порядка**

$$\omega_0 = X_0,$$

$$\begin{aligned} \omega_{i+1} &= \omega_i + \frac{1}{2}\left( a(k_1) + a(\omega_i) \right)\Delta t_i + \frac{1}{4}\left( b(k_2) + b(k_3) + 2b(\omega_i) \right)\Delta W_i + \\ &+ \frac{1}{4}\left( b(k_2) - b(k_3) \right)\left( (\Delta W_i)^2 - \Delta t \right) \Big/ \sqrt{\Delta t_i}, \end{aligned} \tag{19}$$

где

$$k_1 = \omega_i + a\Delta t_i + b\Delta W_i,$$

$$k_2 = \omega_i + a\Delta t_i + b\sqrt{\Delta t_i},$$

$$k_3 = \omega_i + a\Delta t_i + b\sqrt{\Delta t_i}.$$

Могут быть построены слабые методы Тейлора любого порядка, а также аналоги методов Рунге–Кутта, которые сокращают или исключают расчеты производной.

Зачастую слабые методы решения подходят для финансовых моделей, когда целью является изучение закона распределения вероятностей цены актива или процентной ставки, или когда используется выборочный метод Монте–Карло оценки сложного деривативa. Для таких случаев характерна, главным образом, заинтересованность в нахождении одного из статистических моментов стохастически определенной величины, и слабые методы могут быть более простыми и достаточными для выбранной цели.

**Вывод.** Численные методы решения стохастических дифференциальных уравнений играют важную роль при анализе случайных процессов. Сильные методы необходимы при изучении системных характеристик, зависящих от свойств на уровне траектории. Существует несколько подходов для сильных методов, в частности, методы типа Тейлора и Рунге-Кутта, хотя оба значительно усложняются для порядков, больших первого.

Во многих финансовых приложениях основной акцент делается на нахождение распределения вероятности решений и, в частности, математического ожидания и дисперсии распределения. В таких случаях слабых методов может быть достаточно, и они имеют преимущество в сравнительно меньших накладных расходах, что может иметь решающее значение при моделировании методом Монте-Карло.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Андерсон Т.* Статистический анализ временных рядов. – М.: Мир, 1980.
2. *Мильштейн Г.Н.* Численное интегрирование стохастических дифференциальных уравнений. – Уральский государственный университет, 1988.
3. *Sauer T.* Numerical Analysis. Addison-Wesley, Boston, 2006.
4. *Turner Wayne C.*, *Doty S.*, 1942 – Energy management handbook / Library of Congress Cataloging-in-Publication Data. – 6th ed., 2007. – 924 p.

Статью рекомендовал к опубликованию д.ф.-м.н., профессор А.И. Жорник.

**Кузнецова Инна Юрьевна** – Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Южный федеральный университет»; e-mail: kuznet.i.u@gmail.com; 347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44; тел.: 89185954091; аспирантка.

**Kuznetsova Inna Yurevna** – Federal State-Owned Autonomy Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”; e-mail: kuznet.i.u@gmail.com; 44, Nekrasovskiy, Taganrog, 347928, Russia; phone: +79185954091; postgraduate student.