Раздел V. Методы решения задач математической физики

УДК 519.6:532.5

А.И. Сухинов, А.Е. Чистяков, А.В. Шишеня

МОДИФИКАЦИЯ МЕТОДА МИНИМАЛЬНЫХ ПОПРАВОК ДЛЯ РЕШЕНИЯ СЕТОЧНЫХ УРАВНЕНИЙ С НЕСАМОСОПРЯЖЕННЫМ ОПЕРАТОРОМ

Рассматриваются вариант метода минимальных поправок и оценки скорости его сходимости для сеточных уравнений с несамосопряженным оператором. Основная идея получения оценки заключается в разделении предобусловленного оператора на симметричную и кососимметрическую части. Полученная оценка может быть использована для построения итерационного метода с адаптивным выбором параметра ω предобуславливателя. Разработанный метод может быть применен для решения задач для сеточных уравнений диффузии-конвекции-реакции, которые возникают в задачах моделирования гидродинамики, тепломассопереноса, геофильтрации, динамики популяций и других процессов.

Сеточные уравнения с несамосопряженным оператором; метод минимальных поправок; скорость сходимости.

A.I. Sukhinov, A.E. Chistyakov, A.V. Shishenya

MODIFICATION OF MINIMAL RESIDUALS ITERATIVE METHOD FOR SOLVING GRID EQUATIONS WITH NONSELFADJOINT OPERATORS

The work is dedicated to the development of Krilov-type methods for solving finite-difference equations with nonselfadjoint operators and obtaining the estimation of the convergence rate of the method. The idea to obtain the estimation is to split up the preconditioned operator into selfadjoint and skew-symmetric parts. The given estimation can be used for developing an adaptive algorithm for finding parameter ω of preconditioner. The created method can be applied for solving convection-diffusion-reaction mesh equations that arise when modeling hydrodynamics, heat and mass transport, filtration in soils, bio cycles and so on.

Grid equations with nonselfadjoint operator; adaptive SSOR with preconditioning; parallel algorithm; domain decomposition.

Введение. Часто в прикладных задачах, например при математическом моделировании гидродинамики, тепломассопереноса, геофильтрации, динамики популяций и других процессов, возникает необходимость решать уравнения вида конвекции-диффузии. В случае использования неявных схем и схем с весами такие задачи приводят к линейным алгебраическим уравнениям с несамосопряженным оператором. Одним из подходов к решению подобных задач является метод симметризации по Гауссу [3]. Недостатком данного метода является увеличение в квадрат раз числа обусловленности оператора задачи.

В данной работе разработан вариант метода минимальных поправок для решения сеточных уравнений с несамосопряженным оператором и выполнены оценки скорости сходимости.

1. Двухслойный итерационный метод

В конечномерном гильбертовом пространстве H рассматривается задача об отыскании решения операторного уравнения:

$$Ax = f, \quad A : H \to H, \tag{1}$$

где A – линейный, положительно определенный оператор ($A > 0$). Для нахождения задачи (1) будем использовать неявный итерационный процесс

$$B\frac{x^{m+1} - x^m}{\tau} + Ax^m = f, \quad B : H \to H. \tag{2}$$

В уравнении (2) m – номер итерации, $\tau > 0$ – итерационный параметр, а B – некоторый обратимый оператор. Обращение оператора B в (2) должно быть существенно проще, чем непосредственное обращение исходного оператора A в (1).

2. Вариационная оптимизация двухслойных итерационных методов

В нестационарном итерационном методе вариационного типа

$$B\frac{x^{m+1} - x^m}{\tau_{m+1}} + Ax^m = f \tag{3}$$

итерационные параметры τ_{m+1} выбираются из соображений минимизации [1], [4]:

$$(Dz^{m+1}, z^{m+1}) \to \min, \quad D = D^* > 0. \tag{4}$$

Критерий (4) вместе с $z^{m+1} = z^m - \tau_{m+1}B^{-1}Az^m$ дает

$$(Dz^m - \tau_{m+1}DB^{-1}Az^m, z^m - \tau_{m+1}B^{-1}Az^m) \to \min \tag{5}$$

или

$$(Dz^m, z^m) - \tau_{m+1}(DB^{-1}Az^m, z^m) - \tau_{m+1}(Dz^m, B^{-1}Az^m) + \tau_{m+1}^2(DB^{-1}Az^m, B^{-1}Az^m) \to \min.$$

Минимум достигается при решении уравнения

$$\tau_{m+1} = \frac{(DB^{-1}Az^m, z^m) + (Dz^m, B^{-1}Az^m)}{2(DB^{-1}Az^m, B^{-1}Az^m)}. \tag{6}$$

Итерационные методы вариационного типа (4), (6), для которых $D = A^*B^{-1}A$ дают следующее решение:

$$\tau_{m+1} = \frac{(A^*B^{-1}AB^{-1}Az^m, z^m) + (A^*B^{-1}Az^m, B^{-1}Az^m)}{2(A^*B^{-1}AB^{-1}Az^m, B^{-1}Az^m)} =$$

$$= \frac{(AB^{-1}Az^m, B^{-1}Az^m) + (A^*B^{-1}Az^m, B^{-1}Az^m)}{2(B^{-1}AB^{-1}Az^m, AB^{-1}Az^m)} =$$

$$= \frac{(AB^{-1}Az^m, B^{-1}Az^m) + (AB^{-1}Az^m, B^{-1}Az^m)}{2(B^{-1}AB^{-1}Az^m, AB^{-1}Az^m)} = \frac{(AB^{-1}Az^m, B^{-1}Az^m)}{(B^{-1}AB^{-1}Az^m, AB^{-1}Az^m)}$$

Тогда итерационные параметры для метода минимальных поправок вычисляются по формуле

$$\tau_{m+1} = \frac{\left(Aw^m, w^m\right)}{\left(B^{-1}Aw^m, Aw^m\right)}, \quad Bw^m = Ax^m - f \quad m = 0,1,.... \tag{7}$$

В случае $A = A^* > 0$, итерационные параметры τ_{m+1} можно рассчитывать согласно методу скорейшего спуска ($D = A$):

$$\tau_{m+1} = \frac{\left(w^m, r^m\right)}{\left(Aw^m, w^m\right)}, \quad m = 0,1,....$$

3. Сходимость метода минимальных поправок

Если $x^m - x = z^m$ – вектор погрешности, $w^m = B^{-1}Az^m$ – вектор поправки, то из уравнений (1), (2) получаем

$$Bz^{m+1} = Bz^m - \tau_{m+1}Az^m, \tag{8}$$

Данное выражение можно записать в следующем виде:

$$w^{m+1} = w^m - \tau_{m+1}B^{-1}Aw^m,$$

используя замену $v^m = B^{1/2}w^m, C = B^{-1/2}AB^{-1/2}$,

получим

$$B^{-1/2}v^{m+1} = B^{-1/2}v^m - \tau_{m+1}B^{-1}AB^{-1/2}v^m$$

или

$$v^{m+1} = v^m - \tau_{m+1}Cv^m = \left(E - \tau_{m+1}C\right)v^m. \tag{9}$$

Оценим $\left\|v^{m+1}\right\|$:

$$\left\|v^{m+1}\right\| = \left\|\left(E - \tau_{m+1}C\right)v^m\right\| = \left\|\left(\left(\theta_{m+1}E - \tau_{m+1}C_0\right) + \left(\left(1-\theta_{m+1}\right)E - \tau_{m+1}C_1\right)\right)v^m\right\|,$$

где $C = C_0 + C_1$, $C_0 = C_0^{\ *}$, $C_1 = -C_1^{\ *}$.

Воспользуемся неравенством треугольника:

$$\left\|v^{m+1}\right\| \le \theta_{m+1}\left\|\left(E - \frac{\tau_{m+1}}{\theta_{m+1}}C_0\right)v^m\right\| + \left\|\left(\left(1-\theta_{m+1}\right)E - \tau_{m+1}C_1\right)v^m\right\|. \tag{10}$$

Оценим первое слагаемое в правой части неравенства (10):

$$\left\|\left(E-\frac{\tau_{m+1}}{\theta_{m+1}}C_0\right)v^m\right\|^2 = \left\|\left(E-\frac{\tau_{m+1}}{\theta_{m+1}}C_0\right)B^{1/2}w^m\right\|^2 = \left(\left(B^{1/2}-\frac{\tau_{m+1}}{\theta_{m+1}}B^{-1/2}A_0\right)w^m, \left(B^{1/2}-\frac{\tau_{m+1}}{\theta_{m+1}}B^{-1/2}A_0\right)w^m\right) =$$

$$= \left(B^{1/2}w^m, B^{1/2}w^m\right) - 2\frac{\tau_{m+1}}{\theta_{m+1}}\left(A_0w^m, w^m\right) + \left(\frac{\tau_{m+1}}{\theta_{m+1}}\right)^2\left(A_0w^m, B^{-1}A_0w^m\right)$$

с учетом того, что минимум отношения τ_{m+1}/θ_{m+1} достигается при

$$\frac{\tau_{m+1}}{\theta_{m+1}} = \frac{\left(A_0w^m, w^m\right)}{\left(B^{-1}A_0w^m, A_0w^m\right)},$$

получим вариант метода минимальных поправок и оценка запишется:

$$\left\|\left(E - \frac{\tau_{m+1}}{\theta_{m+1}}C_0\right)v^m\right\|^2 = \left(B^{1/2}w^m, B^{1/2}w^m\right) - 2\frac{\left(A_0w^m, w^m\right)}{\left(B^{-1}A_0w^m, A_0w^m\right)}\left(A_0w^m, w^m\right) +$$

$$+\left(\frac{\left(A_0w^m, w^m\right)}{\left(B^{-1}A_0w^m, A_0w^m\right)}\right)^2\left(A_0w^m, B^{-1}A_0w^m\right) = \left(B^{1/2}w^m, B^{1/2}w^m\right) - \frac{\left(A_0w^m, w^m\right)^2}{\left(B^{-1}A_0w^m, A_0w^m\right)} =$$

$$=\left(v^m,v^m\right)-\frac{\left(A_0B^{-1/2}v^m,B^{-1/2}v^m\right)^2}{\left(B^{-1}A_0B^{-1/2}v^m,A_0B^{-1/2}v^m\right)}=\left(v^m,v^m\right)-\frac{\left(B^{-1/2}A_0B^{-1/2}v^m,v^m\right)^2}{\left(B^{-1/2}A_0B^{-1/2}v^m,B^{-1/2}A_0B^{-1/2}v^m\right)}=$$

$$=\left(v^m,v^m\right)-\frac{\left(C_0v^m,v^m\right)^2}{\left(C_0v^m,C_0v^m\right)}=\left(1-\frac{\left(C_0v^m,v^m\right)^2}{\left(C_0v^m,C_0v^m\right)\left(v^m,v^m\right)}\right)\left\|v^m\right\|^2.$$

Здесь $A=A_0+A_1$, $A_0=A_0^*$, $A_1=-A_1^*$. Оценка первого слагаемого, стоящего в правой части неравенства (10), запишется в следующем:

$$\left\|\left(E-\frac{\tau_{m+1}}{\theta_{m+1}}C_0\right)v^m\right\|=\sqrt{1-\frac{\left(C_0v^m,v^m\right)^2}{\left(C_0v^m,C_0v^m\right)\left(v^m,v^m\right)}}\left\|v^m\right\|. \qquad (11)$$

Для второго слагаемого (11) с учетом $\left(C_1v^m,v^m\right)=0$ имеем:

$$\left\|\left(\left(1-\theta_{m+1}\right)E-\tau_{m+1}C_1\right)v^m\right\|^2=\left(\left(1-\theta_{m+1}\right)v^m,\left(1-\theta_{m+1}\right)v^m\right)-\left(\tau_{m+1}C_1v^m,\left(1-\theta_{m+1}\right)v^m\right)+$$

$$+\left(\tau_{m+1}C_1v^m,\tau_{m+1}C_1v^m\right)=\left(1-\theta_{m+1}\right)^2\left(v^m,v^m\right)+\theta_{m+1}^2\left(\frac{\tau_{m+1}}{\theta_{m+1}}C_1v^m,\frac{\tau_{m+1}}{\theta_{m+1}}C_1v^m\right). \qquad (12)$$

Подстановка (11), (12) в (10) дает:

$$\left\|v^{m+1}\right\|\le\theta_{m+1}\left\|\left(E-\frac{\tau_{m+1}}{\theta_{m+1}}C_0\right)v^m\right\|+\left\|\left(\left(1-\theta_{m+1}\right)E-\tau_{m+1}C_1\right)v^m\right\|=$$

$$=\theta_{m+1}\sqrt{\left(1-\frac{\left(C_0v^m,v^m\right)^2}{\left(C_0v^m,C_0v^m\right)\left(v^m,v^m\right)}\right)}\left\|v^m\right\|+\sqrt{\left(1-\theta_{m+1}\right)^2\left(v^m,v^m\right)+\theta_{m+1}^2\left(\frac{\tau_{m+1}}{\theta_{m+1}}C_1v^m,\frac{\tau_{m+1}}{\theta_{m+1}}C_1v^m\right)}=$$

$$=\theta_{m+1}^2\sqrt{\left(1-\frac{\left(C_0v^m,v^m\right)^2}{\left(C_0v^m,C_0v^m\right)\left(v^m,v^m\right)}\right)}\left\|v^m\right\|+\sqrt{\left(1-\theta_{m+1}\right)^2+\theta_{m+1}^2\frac{\left(\frac{\tau_{m+1}}{\theta_{m+1}}C_1v^m,\frac{\tau_{m+1}}{\theta_{m+1}}C_1v^m\right)}{\left(v^m,v^m\right)}}\left\|v^m\right\|.$$

Для удобства введем обозначения:

$$s_{m+1}=\sqrt{\left(1-\frac{\left(C_0v^m,v^m\right)^2}{\left(C_0v^m,C_0v^m\right)\left(v^m,v^m\right)}\right)},\quad \gamma_{m+1}=\frac{\left(\frac{\tau_{m+1}}{\theta_{m+1}}C_1v^m,\frac{\tau_{m+1}}{\theta_{m+1}}C_1v^m\right)}{\left(v^m,v^m\right)},$$

$$\tau_{m+1}=\frac{\left(A_0\omega^m,\omega^m\right)\theta_{m+1}}{\left(B^{-1}A_0\omega^m,A_0\omega^m\right)}. \qquad (13)$$

Оценка $\left\|v^{m+1}\right\|$ с учетом (13) примет вид:

$$\left\|v^{m+1}\right\|\le\left(\theta_{m+1}s_{m+1}+\sqrt{\left(1-\theta_{m+1}\right)^2+\theta_{m+1}^2\gamma_{m+1}}\right)\left\|v^m\right\|=\left(\theta_{m+1}s_{m+1}+\sqrt{1-2\theta_{m+1}+\theta_{m+1}^2\left(1+\gamma_{m+1}\right)}\right)\left\|v^m\right\|.$$

Введем замену переменных $\theta_{m+1}=\dfrac{1-\eta_{m+1}}{1+\gamma_{m+1}}$:

$$\left\|v^{m+1}\right\| \le \left(\frac{1-\eta_{m+1}}{1+\gamma_{m+1}} s_{m+1} + \sqrt{\frac{1+\gamma_{m+1} - 2 + 2\eta_{m+1} + \left(1-\eta_{m+1}\right)^2}{1+\gamma_{m+1}}} \right) \left\|v^m\right\| =$$

$$= \left(\frac{1-\eta_{m+1}}{1+\gamma_{m+1}} s_{m+1} + \sqrt{\frac{1+\gamma_{m+1} - 2 + 2\eta_{m+1} + 1 - 2\eta_{m+1} + \eta_{m+1}^2}{1+\gamma_{m+1}}} \right) \left\|v^m\right\|,$$

$$\left\|v^{m+1}\right\| \le \left(\frac{1-\eta_{m+1}}{1+\gamma_{m+1}} s_{m+1} + \sqrt{\frac{\gamma_{m+1} + \eta_{m+1}^2}{1+\gamma_{m+1}}} \right) \left\|v^m\right\|. \quad (14)$$

Найдем оптимальный параметр η_{m+1}, для этого возьмем производную правой части (14):

$$\left(\frac{1-\eta_{m+1}}{1+\gamma_{m+1}} s_{m+1} + \sqrt{\frac{\gamma_{m+1} + \eta_{m+1}^2}{1+\gamma_{m+1}}} \right)'_{\eta_{m+1}} = -\frac{s_{m+1}}{1+\gamma_{m+1}} + \frac{\eta_{m+1}}{\sqrt{\left(1+\gamma_{m+1}\right)\left(\gamma_{m+1} + \eta_{m+1}^2\right)}} = 0 \,. \quad (15)$$

Оптимальный η_{m+1} равен:

$$\eta_{m+1} = \sqrt{\frac{s_{m+1}^2 \gamma_{m+1}}{\left(1+\gamma_{m+1} - s_{m+1}^2\right)}} \quad (16)$$

в силу (15) и $\left(\frac{1-\gamma_{m+1}}{1+k_{m+1}} s_{m+1} + \sqrt{\frac{\gamma_{m+1} + \eta_{m+1}^2}{1+\gamma_{m+1}}} \right)''_{\eta_{m+1}^2} > 0$.

Подставим (16) в (14):

$$\left\|v^{m+1}\right\| \le \left(\frac{1-\sqrt{\frac{s_{m+1}^2 \gamma_{m+1}}{1+\gamma_{m+1} - s_{m+1}^2}}}{1+\gamma_{m+1}} s_{m+1} + \sqrt{\frac{\gamma_{m+1} + \frac{s_{m+1}^2 \gamma_{m+1}}{1+\gamma_{m+1} - s_{m+1}^2}}{1+\gamma_{m+1}}} \right) \left\|v^m\right\| =$$

$$= \left(\frac{1-\sqrt{\frac{s_{m+1}^2 \gamma_{m+1}}{1+\gamma_{m+1} - s_{m+1}^2}}}{1+\gamma_{m+1}} s_{m+1} + \sqrt{\frac{\gamma_{m+1}\left(1+\gamma_{m+1} - s_{m+1}^2\right) + s_{m+1}^2 \gamma_{m+1}}{\left(1+\gamma_{m+1}\right)\left(1+\gamma_{m+1} - s_{m+1}^2\right)}} \right) \left\|v^m\right\| =$$

$$= \left(\frac{s_{m+1} - s_{m+1}^2 \sqrt{\frac{\gamma_{m+1}}{1+\gamma_{m+1} - s_{m+1}^2}}}{1+\gamma_{m+1}} + \sqrt{\frac{\gamma_{m+1}}{1+\gamma_{m+1} - s_{m+1}^2}} \right) \left\|v^m\right\| =$$

$$=\left(\frac{s_{m+1}+\left(1+\gamma_{m+1}-s_{m+1}^2\right)\sqrt{\dfrac{\gamma_{m+1}}{1+\gamma_{m+1}-s_{m+1}^2}}}{1+\gamma_{m+1}}\right)\left\|v^m\right\|=\left(\frac{s_{m+1}+\sqrt{\gamma_{m+1}\left(1+\gamma_{m+1}-s_{m+1}^2\right)}}{1+\gamma_{m+1}}\right)\left\|v^m\right\|.$$

Таким образом, получим оценку сходимости:

$$\rho\le\left(\frac{s_{m+1}+\sqrt{\gamma_{m+1}\left(1+\gamma_{m+1}-s_{m+1}^2\right)}}{1+\gamma_{m+1}}\right). \tag{17}$$

Скорость сходимости метода минимальных поправок зависит от:

$$s_{m+1}=\sqrt{\left(1-\frac{\left(C_0v^m,v^m\right)^2}{\left(C_0v^m,C_0v^m\right)\left(v^m,v^m\right)}\right)}=\sqrt{\left(1-\frac{\left(A_0w^m,w^m\right)^2}{\left(A_0B^{-1}A_0w^m,w^m\right)\left(Bw^m,w^m\right)}\right)}.$$

Воспользуемся неравенством $xy\le\left(ax+y/a\right)^2/4$. Данное неравенство выполняется для всех a.

$$s_{m+1}^2\le1-\frac{4\left(A_0w^m,w^m\right)^2}{\left(a\left(A_0B^{-1}A_0w^m,w^m\right)+\left(Bw^m,w^m\right)/a\right)^2}=$$

$$=1-\frac{4}{\left(a\left(C_0v^m,C_0v^m\right)/\left(C_0v^m,v^m\right)+\left(v^m,v^m\right)/a\left(C_0v^m,v^m\right)\right)^2}\le$$

$$\le1-\frac{4}{\left(a\lambda_{\max}\left(C_0\right)+1/a\lambda_{\min}\left(C_0\right)\right)^2},$$

где $\lambda_{\min}\left(C_0\right),\lambda_{\max}\left(C_0\right)$ – минимальное и максимальное собственные числа оператора C_0.

Возьмем в качестве $a=\sqrt{\lambda_{\min}\left(C_0\right)/\lambda_{\max}\left(C_0\right)}$, при этом нетрудно убедиться, что выражение, стоящее в правой части (17), меньше единицы при $s_{m+1}<1$. Для s_{m+1} и γ_{m+1} имеют место оценки:

$$s_{m+1}\le\sqrt{1-\frac{4}{\left(\nu^{1/2}+\nu^{-1/2}\right)^2}}=\frac{\nu-1}{\nu+1}=s_{\max}; \tag{18}$$

$$\gamma_{m+1}=\frac{\left(B^{-1}A_1w^m,A_1w^m\right)}{\left(B^{-1}A_0w^m,A_0w^m\right)}\left(1-s_{m+1}^2\right)\le\frac{\left(B^{-1}A_1w^m,A_1w^m\right)}{\left(B^{-1}A_0w^m,A_0w^m\right)},$$

где ν – число обусловленности оператора C_0.

Введем обозначение

$$k_{m+1}=\frac{\left(B^{-1}A_1w^m,A_1w^m\right)}{\left(B^{-1}A_0w^m,A_0w^m\right)},\ \gamma_{m+1}=k_{m+1}\left(1-s_{m+1}^2\right). \tag{19}$$

Возьмем производную по s_{m+1} от правой части (17) с учетом (19):

$$\left(\frac{s_{m+1}+\left(1-s_{m+1}^2\right)\sqrt{k_{m+1}\left(k_{m+1}+1\right)}}{1+k_{m+1}\left(1-s_{m+1}^2\right)}\right)'_{s_{m+1}} =$$

$$=\frac{\left(1+k_{m+1}\right)-2s_{m+1}\sqrt{k_{m+1}\left(k_{m+1}+1\right)}+k_{m+1}s_{m+1}^2}{\left(1+k_{m+1}\left(1-s_{m+1}^2\right)\right)^2}\geq 0\,. \tag{20}$$

Оценка (17) с учетом (20) запишется в виде

$$\rho\leq\left(\frac{s_{\max}+\sqrt{\gamma_{m+1}\left(1+\gamma_{m+1}-s_{\max}^2\right)}}{1+\gamma_{m+1}}\right). \tag{21}$$

Умножим числитель и знаменатель выражения (21) на $\left(s_{\max}\gamma_{m+1}+\sqrt{\gamma_{m+1}\left(1+\gamma_{m+1}-s_{\max}^2\right)}\right)\Big/\left(1+\gamma_{m+1}\right)$, в результате получим:

$$\rho\leq\frac{\left(s_{\max}+\sqrt{\gamma_{m+1}\left(1+\gamma_{m+1}-s_{\max}^2\right)}\right)\left(s_{\max}\gamma_{m+1}+\sqrt{\gamma_{m+1}\left(1+\gamma_{m+1}-s_{\max}^2\right)}\right)\Big/\left(1+\gamma_{m+1}\right)}{s_{\max}\gamma_{m+1}+\sqrt{\gamma_{m+1}\left(1+\gamma_{m+1}-s_{\max}^2\right)}}=$$

$$=\frac{\left(s_{\max}^2\gamma_{m+1}+s_{\max}\left(\gamma_{m+1}+1\right)\sqrt{\gamma_{m+1}\left(1+\gamma_{m+1}-s_{\max}^2\right)}+\gamma_{m+1}\left(1+\gamma_{m+1}-s_{\max}^2\right)\right)\Big/\left(1+\gamma_{m+1}\right)}{s_{\max}\gamma_{m+1}+\sqrt{\gamma_{m+1}\left(1+\gamma_{m+1}-s_{\max}^2\right)}}=$$

$$=\frac{\left(\gamma_{m+1}\left(1+\gamma_{m+1}\right)+s_{\max}\left(\gamma_{m+1}+1\right)\sqrt{\gamma_{m+1}\left(1+\gamma_{m+1}-s_{\max}^2\right)}\right)\Big/\left(1+\gamma_{m+1}\right)}{s_{\max}\gamma_{m+1}+\sqrt{\gamma_{m+1}\left(1+\gamma_{m+1}-s_{\max}^2\right)}}$$

или

$$\rho\leq s_{\max}\frac{\gamma_{m+1}/s_{\max}+\sqrt{\gamma_{m+1}\left(1+\gamma_{m+1}-s_{\max}^2\right)}}{s_{\max}\gamma_{m+1}+\sqrt{\gamma_{m+1}\left(1+\gamma_{m+1}-s_{\max}^2\right)}}\,.$$

В силу (18) получим:

$$\rho\leq\left(\nu\frac{\sqrt{\gamma_{m+1}\left(1+\gamma_{m+1}-s_{\max}^2\right)}+\gamma_{m+1}}{\sqrt{\gamma_{m+1}\left(1+\gamma_{m+1}-s_{\max}^2\right)}-\gamma_{m+1}}-1\right)\Bigg/\left(\nu\frac{\sqrt{\gamma_{m+1}\left(1+\gamma_{m+1}-s_{\max}^2\right)}+\gamma_{m+1}}{\sqrt{\gamma_{m+1}\left(1+\gamma_{m+1}-s_{\max}^2\right)}-\gamma_{m+1}}+1\right)$$

или

$$\rho\leq\frac{\nu^*-1}{\nu^*+1}\,, \tag{22}$$

где

$$\nu^* = \nu \frac{\sqrt{\gamma_{m+1}\left(1+\gamma_{m+1}-s_{\max}^2\right)}+\gamma_{m+1}}{\sqrt{\gamma_{m+1}\left(1+\gamma_{m+1}-s_{\max}^2\right)}-\gamma_{m+1}}. \tag{23}$$

Выражение (23) с учетом (19),(20) примет вид:

$$\nu^* = \nu \frac{\sqrt{k_{m+1}\left(1-s_{m+1}^2\right)\left(1+k_{m+1}\left(1-s_{m+1}^2\right)-s_{\max}^2\right)}+k_{m+1}\left(1-s_{m+1}^2\right)}{\sqrt{k_{m+1}\left(1-s_{m+1}^2\right)\left(1+k_{m+1}\left(1-s_{m+1}^2\right)-s_{\max}^2\right)}-k_{m+1}\left(1-s_{m+1}^2\right)} =$$

$$= \nu \frac{\sqrt{k_{m+1}\left(1+k_{m+1}\right)}+k_{m+1}}{\sqrt{k_{m+1}\left(1+k_{m+1}\right)}-k_{m+1}} = \nu \frac{\left(\sqrt{k_{m+1}\left(1+k_{m+1}\right)}+k_{m+1}\right)^2}{k_{m+1}} = \nu\left(\sqrt{1+k_{m+1}}+\sqrt{k_{m+1}}\right)^2.$$

Таким образом, оценка скорости сходимости метода минимальных поправок запишется в следующем виде:

$$\nu^* = \nu\left(\sqrt{1+k_{m+1}}+\sqrt{k_{m+1}}\right)^2, \tag{24}$$

где ν – число обусловленности матрицы C_0.

Следует отметить, что k_{m+1} характеризует отношение нормы кососимметричной части оператора A к симметричной:

$$k_{m+1} = \frac{\left\|A_1 w^m\right\|_{B^{-1}}^2}{\left\|A_0 w^m\right\|_{B^{-1}}^2} \le \left(\max_{|y|>0} \frac{\left\|C_1 y\right\|}{\left\|C_0 y\right\|}\right)^2.$$

Будем называть $N_c = \left\|C_0^{-1/2} C_1 C_0^{-1/2}\right\|$ – числом «кососимметричности» оператора.

Оценку скорости сходимости метода минимальных поправок можно записать в следующем виде:

$$\nu^* = \nu\left(\sqrt{1+N_c^{\,2}}+N_c\right)^2.$$

Алгоритм расчета сеточных уравнений запишется в виде:

$$w^m = B^{-1}\left(Ax^m - f\right), \tag{25}$$

$$s_{m+1}^2 = 1 - \frac{\left(A_0 w^m, w^m\right)^2}{\left(B^{-1}A_0 w^m, A_0 w^m\right)\left(Bw^m, w^m\right)}, \tag{26}$$

$$k_{m+1} = \frac{\left(B^{-1}A_1 w^m, A_1 w^m\right)}{\left(B^{-1}A_0 w^m, A_0 w^m\right)}, \tag{27}$$

$$\theta_{m+1} = \left(1-\sqrt{\frac{s_{m+1}^2 k_{m+1}}{\left(1+k_{m+1}\right)}}\right) \Big/ \left(1+k_{m+1}\left(1-s_{m+1}^2\right)\right), \tag{28}$$

$$\tau_{m+1} = \theta_{m+1} \frac{\left(A_0 w^m, w^m\right)}{\left(B^{-1} A_0 w^m, A_0 w^m\right)}, \tag{29}$$

$$x^{m+1} = x^m - \tau_{m+1} w^m . \tag{30}$$

Выводы. В работе построен вариант метода минимальных поправок для решения сеточных уравнений с несамосопряженным оператором и выполнены оценки скорости сходимости. Отметим, что разработанный вариант метода минимальных поправок (29) совпадает с классическим вариантом данного метода (7) в самосопряженном случае. Разработанный метод позволяет решить задачу построения оператора переобуславливателя *B* так, чтобы минимизировать число обусловленности самосопряженного оператора C_0. Данная задача существенно проще по сравнению задачей минимизации числа обусловленности несамосопряженного оператора C, которая возникает при использовании классического варианта метода минимальных поправок.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. – М.: Наука, 1989.
2. *Коновалов А.Н.* К теории попеременно-треугольного итерационного метода // Сибирский математический журнал. – 2002. – № 43:3. – С. 552-572.
3. *Самарский А.А., Вабищевич П.Н.* Численные методы решения задач конвекции-диффузии. – М.: Эдиториал УРСС, 1999.
4. *Самарский А.А., Николаев Е.С.* Методы решения сеточных уравнений. – М.: Наука, 1978.
5. *Чистяков А.Е.* Теоретические оценки ускорения и эффективности параллельной реализации ПТМ скорейшего спуска // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2010. – № 6 (107). – С. 237-249.
6. *Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Алексеенко Е.В.* Численная реализация трехмерной модели гидродинамики для мелководных водоемов на супервычислительной системе // Математическое моделирование. – 2011. – № 23:3. – С. 3-21.

Статью рекомендовал к опубликованию д.т.н., профессор Я.Е. Ромм.

Сухинов Александр Иванович – Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Южный федеральный университет»; e-mail: sukhinov@gmail.com; 347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44; тел.: 89281021106; д.ф.-м.н.; профессор.

Чистяков Александр Евгеньевич – e-mail: cheese_05@mail.ru; тел.: 88634371606; кафедра высшей математики; доцент.

Шишеня Александр Владимирович – e-mail: primat-55-alex@yandex.ru; тел.: +79081761837; кафедра высшей математики; аспирант.

Sukhinov Alexander Ivanovich – Federal State-Owned Autonomy Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”; e-mail: sukhinov@gmail.com; 44, Nekrasovskiy, Taganrog, 347928, Russia; phone: +79281021106; dr. of phis.-math. sc.; professor.

Chistyakov Alexander Evgenjevich – Federal State-Owned Autonomy Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”; e-mail: cheese_05@mail.ru; 44, Nekrasovskiy, Taganrog, 347928, Russia; phone: +78634371606; the department of higher mathematics; associate professor.

Shishenya Alexandr Vladimirovich – e-mail: primat-55-alex@yandex.ru; phone: +79081761837; the department of higher mathematics; postgraduate student.