УДК 519.651.5

В.И. Шмойлов, Г.А. Кириченко

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЗНАЧЕНИЙ РАСХОДЯЩИХСЯ НЕПРЕРЫВНЫХ ДРОБЕЙ И РЯДОВ

Рассматривается иное, нежели традиционное, определение сходимости непрерывных дробей. Новый метод суммирования используется при определении значений расходящихся в классическом смысле непрерывных дробей и рядов. Метод суммирования применим не только к обыкновенным непрерывным дробям, но и к непрерывным дробям иных классов, например, к непрерывным дробям Хессенберга. Предложенный алгоритм суммирования расходящихся непрерывных дробей может быть использован при решении разнообразных задач вычислительной математики, в частности, для построения эффективных итерационных алгоритмов решения СЛАУ. Рассматриваемый в статье метод суммирования позволяет найти не только действительные, но и комплексные решения бесконечных систем линейных алгебраических уравнений, если они имеются, что не обеспечивают известные алгоритмы решения БСЛАУ.

Непрерывные дроби; расходящиеся ряды; сходимость непрерывных дробей; r/φ-алгоритм.

V.I. Shmoylov, G.A. Kirichenko

DETERMINATION OF THE VALUES OF DIVERGENT CONTINUOUS FRACTIONS AND SERIES

Is considered other than traditional definition of convergence of the continuing rise of the fractions. A new method of summation is used in determining the values of forking in the classical sense of continued fractions and series. Summation method is applicable not only to ordinary continued fractions, but also to the continued fractions of other classes, for example, to the continued fractions Heisenberg. The offered algorithm of summation of divergent continued fractions can be used in solving various problems of computational mathematics, in particular, to build efficient iterative algorithms for solving SLAE. The article summation method allows you to find not only real, but also complete solutions of infinite systems of linear algebraic equations, if they are available, which do not provide the known algorithms of solution of BSLAE.

Continuous fractions; divergent series; convergence continuous fractions; r/φ-algorithm.

Введение. Широкое использования непрерывных дробей в вычислительной математике в значительной степени обуславливается тем, что непрерывные дроби в большинстве случаев дают гораздо более общие представления трансцендентных функций, чем степенные ряды. Непрерывные дроби могут быть с большим эффектом использованы для ускорения сходимости медленно сходящихся рядов. Более того, преобразуя расходящиеся ряды в соответствующие непрерывные дроби, нередко можно просуммировать, расходящиеся ряды. Известно, что непрерывные дроби тесно связаны с аппроксимациями Паде, которые, как отмечается в [1], стали главным вычислительным средством в задачах статической механики и физики твердого тела. Поэтому существенные результаты, полученные в теории непрерывных дробей, в частности, в вопросах сходимости, могут быть использованы и в аппроксимациях Паде.

Бесконечной цепной дробью, или непрерывной дробью, называют выражение вида

$$b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \vdots + \cfrac{a_n}{b_n + \vdots}}},$$

где a_i и b_i , $i = 1, 2, \ldots$ – в общем случае независимые переменные.

Часто непрерывную дробь записывают компактно в форме Гершеля:

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \ldots + \frac{a_n}{b_n} + \ldots .$$

Непрерывная дробь называется сходящейся, если последовательность ее подходящих дробей имеет конечный предел. Непрерывная дробь называется расходящейся, если последовательность ее подходящих дробей предела не имеет. Имеется большое количество признаков сходимости, при помощи которых можно сказать, что существует предел последовательности подходящих дробей или нет. Наиболее широкое применение, пожалуй, получил достаточный признак Ворпицкого. По признаку Ворпицкого непрерывная дробь

$$\frac{a_1}{1} + \frac{a_2}{1} + \ldots + \frac{a_n}{1+} \ldots$$

сходится, если $|a_n| \le 1/4,\ n = 2,3\ldots$.

В статье будет рассмотрено несколько задач из разных разделов вычислительной математики, решенных при помощи так называемого *r/φ* – алгоритма, – нового метода суммирования расходящихся непрерывных дробей. Этот алгоритм формируется следующим образом:

Непрерывная дробь сходится и имеет своим значением в общем случае комплексное число $z = r_0 e^{i\varphi_0}$, если существуют пределы

$$\lim_{s\to\infty} \sqrt[s]{\prod_{i=1}^{s} |\, P_i / Q_i \,|} = r_0 , \tag{1}$$

$$\pi \lim_{s\to\infty} \frac{k_s}{s} = |\varphi_0| \tag{2}$$

где P_i/Q_i – значения i-й подходящей дроби из совокупности, включающей s подходящих дробей; k_s – число отрицательных подходящих дробей из s подходящих дробей.

Этот алгоритм применим как к обыкновенным непрерывным дробям, так и к непрерывным дробям с графами иных типов, например, к непрерывным дробям Хессенберга и ветвящимся непрерывным дробям.

В случае непрерывных дробей, сходящихся в классическом смысле, аргумент φ_0 примет значения 0 или π . Если φ_0 = 0, то значение сходящейся непрерывной дроби будет совпадать со значением модуля r_0 :

$$z = r_0 e^{i0} = r_0 .$$

Если $\varphi_0 = \pi$, то значение сходящейся непрерывной дроби будет отрицательное число:

$$z = r_0 e^{i\pi} = -r_0 .$$

Проиллюстрируем эффективность предложенного способа суммирования расходящихся в классическом смысле непрерывных дробей решением ряда задач.

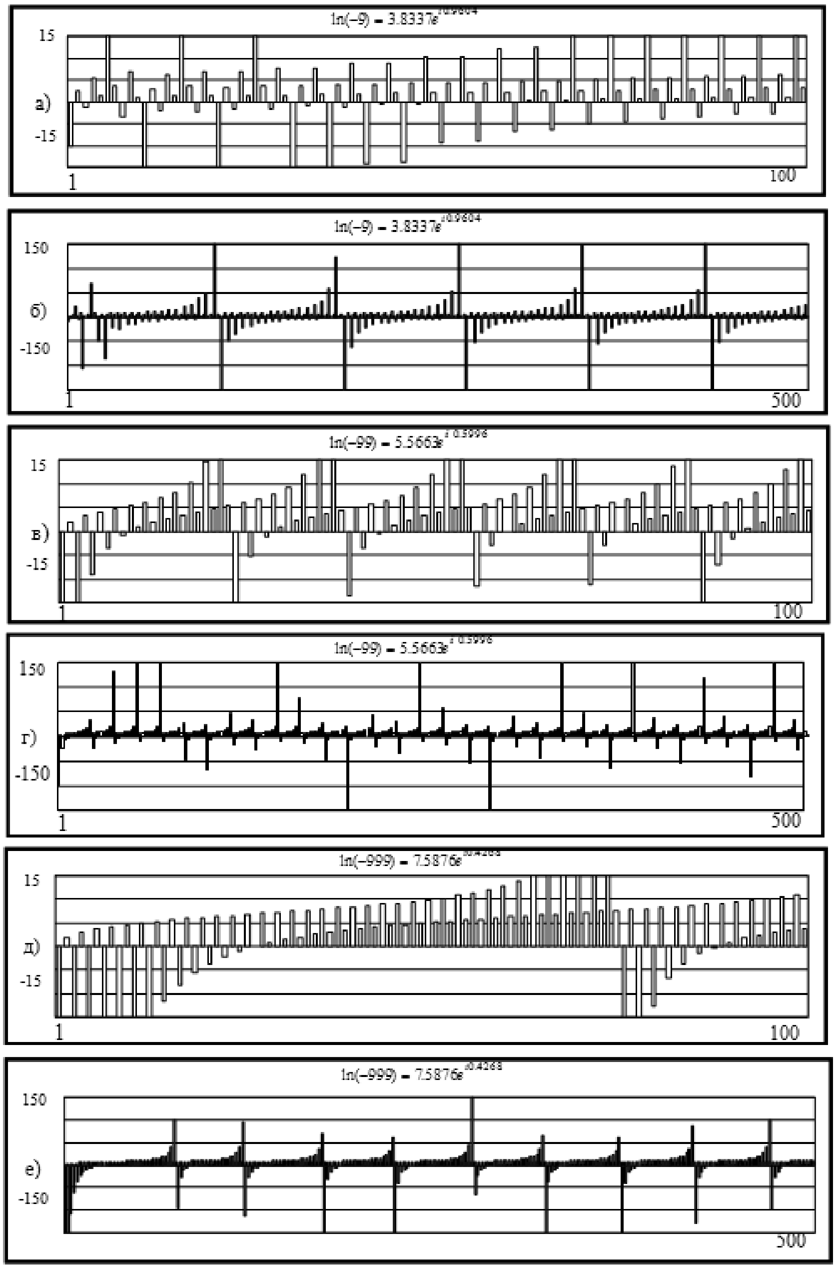

Рис. 1. Распределение значений подходящих непрерывной дроби логарифмической функции

2. Суммирование расходящихся непрерывных дробей и рядов. Известно, что непрерывные дроби целесообразнее использовать для аппроксимации функций, нежели степенные ряды, так как непрерывные дроби зачастую сходятся в более широкой области. Например, ряд Меркатора

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$$

представляет логарифмическую функцию в единичном круге, в то время как непрерывная дробь Лагранжа

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1+} \frac{x}{2+} \frac{x}{3+} \frac{2x}{2+} \frac{2x}{5+} \ldots + \frac{nx}{2+} \frac{nx}{2n+1+} \ldots \tag{3}$$

сходится к функции $\ln(1+x)$ на всей плоскости комплексного переменного, за исключением выреза от -1 до $-\infty$ [2].

При отрицательных значениях аргумента логарифмическая функция имеет комплексное значение и, естественно, что непрерывные дроби, получающиеся из непрерывной дроби Лагранжа при $x < -1$ будут расходящимися в классическом смысле.

На рис. 1 (а,б,в,г,д,е) показано распределение подходящих значений непрерывной дроби Лагранжа (3) при x = -10, -100, -1000 на начальных участках $(n = 1 \div 100$ и $n = 1 \div 500)$.

В табл. 1 показаны результаты суммирования расходящейся непрерывной дроби

$$\ln(-2) = -\frac{3}{1-} \frac{3}{2-} \frac{3}{3-} \frac{6}{2-} \frac{6}{5-} \ldots - \frac{3n}{2} - \frac{3n}{2n+1-} \ldots \; . \tag{4}$$

Таблица 1

Определение значения расходящейся непрерывной дроби (4)

$$r_0 = 3.2171505117.. \quad \varphi_0 = 1.3536398454...$$

№ звена дроби	Значение подходящей дроби	Модуль комплексного числа, r_n	Погрешность, $\varepsilon_r = \lvert r_0 - r_n \rvert$	min ε_r	Аргумент комплексного числа, φ_n	Погрешность, $\varepsilon_\varphi = \lvert \varphi_0 - \varphi_n \rvert$	min ε_φ
1	2	3	4	5	6	7	8
1	-3,0000000	3,0000000000	0,2171505117		3,1415926535	1,7879528081	m
2	6,0000000	4,2426406871	1,0254901754		1,5707963267	0,2171564813	m
4	-3,0000000	3,0000000000	0,2171505117		1,5707963267	0,2171564813	
8	-97,5000000	4,9614481602	1,7442976485		1,5707963267	0,2171564813	
16	1,4880473	3,5474336503	0,3302831386		1,3744467859	0,0208069405	m
32	3,1985122	3,6050160485	0,3878655367		1,3744467859	0,0208069405	
64	62,8693924	3,3885474566	0,1713969449	m	1,3744467859	0,0208069405	
128	0,9165216	3,1810462758	0,0361042359	m	1,3499030933	0,0037367521	m
256	1,7095765	3,2148854739	0,0022650377	m	1,3621749396	0,0085350941	
512	3,9037050	3,2112688498	0,0058816618		1,3499030933	0,0037367521	
1024	-15,4772571	3,2219262392	0,0047757275		1,3560390164	0,0023991710	m
2048	2,6358581	3,2194825453	0,0023320336		1,3529710549	0,0006687905	m
4096	11,1007665	3,2127253440	0,0044251676		1,3529710549	0,0006687905	
8192	-0,6961262	3,2169015620	0,0002489496	m	1,3533545501	0,0002852953	m
16384	-1,7591587	3,2167104407	0,0004400709		1,3533545501	0,0002852953	
32768	-6,4347291	3,2170964982	0,0000540134		1,3536421715	0,0000023260	m
65536	5,5879135	3,2171496506	0,0000008610		1,3536421715	0,0000023260	
131072	-3,9038315	3,2171884212	0,0000379094		1,3536182030	0,0000216423	
262144	16,0431708	3,2171480639	0,0000024477		1,3535942346	0,0000456108	
524288	-0,0551483	3,2171287791	0,0000217325		1,3536421715	0,0000023260	
1048576	-0,2709104	3,2171427009	0,0000078107		1,3536361793	0,0000036660	
2097152	-0,7308612	3,2171496552	0,0000008564	m	1,3536361793	0,0000036660	
4194304	-1,8537413	3,2171502478	0,0000002638	m	1,3536391754	0,0000006699	m
8388608	-7,2124648	3,2171495794	0,0000009323		1,3536399244	0,0000000790	m

При отрицательном аргументе логарифмическая функция имеет комплексное значение

$$\ln(-2) = 3{,}2171505117\, e^{i1{,}3536398454},$$

которое, естественно, не может приближаться непрерывной дробью с вещественными элементами и, тем не менее, суммирование при помощи r/φ – алгоритма позволяет установить значение дроби (4).

В первой колонке таблицы даны номера n подходящих дробей разложения (4). Номера подходящих дробей составляют степень 2: $n = 2^i$, $i = 1 \div 23$. Значения подходящих дробей с этими номерами приведены в соседней колонке 2. Как и следовало ожидать, значения подходящих дробей $\{P_n/Q_n\}$ с ростом n не стремятся к какому-либо пределу. Для чисел же, расположенных в колонке 3, напротив, стремление к пределу можно без труда обнаружить, – значения приближаются к величине 3.2171505117..., т.е. к модулю комплексного числа $\ln(-2)$. Даже беглого взгляда на колонки 6 и 7 достаточно, чтобы убедиться, что с ростом количества подходящих дробей разложения (4) все более точно устанавливается значение аргумента искомого комплексного числа.

Найдены представления элементарных и некоторых специальных функции в виде непрерывных дробей Хессенберга [3]. Например,

$$\frac{1}{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)} = \frac{\begin{vmatrix} x/1! & x/2! & x/3! & x/4! & x/5! & \dots \\ -1 & x/1! & x/2! & x/3! & x/4! & \dots \\ 0 & -1 & x/1! & x/2! & x/3! & \dots \\ 0 & 0 & -1 & x/1! & x/2! & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & x/1! & \dots \\ . & . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x/1! & x/2! & x/3! & x/4! & \dots \\ -1 & x/1! & x/2! & x/3! & \dots \\ 0 & -1 & x/1! & x/2! & \dots \\ 0 & 0 & -1 & x/1! & \dots \\ . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}}. \tag{5}$$

Непрерывная дробь (5) определяет логарифмическую функцию на всей плоскости комплексного переменного с разрезом от 0 до -1. Комплексное значение логарифмической функции на разрезе определяется из (5) суммированием по формулам (1) и (2). В качестве подходящих дробей (5) будем брать последовательность отношений определителей:

$$\frac{P_0}{Q_0} = \frac{x/1!}{1},\quad \frac{P_1}{Q_1} = \frac{\begin{vmatrix} x/1! & x/2! \\ -1 & x/1! \end{vmatrix}}{x/1!},\quad \frac{P_2}{Q_2} = \frac{\begin{vmatrix} x/1! & x/2! & x/3! \\ -1 & x/1! & x/2! \\ 0 & -1 & x/1! \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x/1! & x/2! \\ -1 & x/1! \end{vmatrix}}, \dots .$$

В табл. 2 приведены результаты вычисления комплексного числа 1/ln(-2) при помощи функциональной непрерывной дроби Хессенберга (5) и алгоритма суммирования расходящихся непрерывных дробей.

Таблица 2

Определение значения непрерывной дроби (5) при $x=-1/3$.

$$x=-1/3,\quad r_0=0.3108340739...,\qquad \varphi_0=-1.3536398454...\ .$$

№ звена дроби	Значение подходящей дроби	Модуль комплексного числа, r_n	Погрешность, $\varepsilon_r=\lvert r_0-r_n\rvert$	min ε_r	Аргумент Комплексного числа, φ_n	Погрешность, $\varepsilon_\varphi=\lvert\varphi_0-\varphi_n\rvert$	min ε_φ
1	2	3	4	5	6	7	8
20	0,85127256	0,99198117	0,68114710	m	-1,41371669	0,06007684	m
21	0,02044264	0,82455439	0,51372032	m	-1,34639685	0,00724299	m
42	-0,02832422	0,50977666	0,19894259	m	-1,42119667	0,06755683	
84	-0,14445825	0,40513373	0,09429965	m	-1,38379676	0,03015691	
168	-0,75441728	0,35654051	0,04570644	m	-1,36509680	0,01145696	
336	0,32678464	0,33285231	0,02201823	m	-1,35574682	0,00210698	m
672	2,01078357	0,32176153	0,01092745	m	-1,35574682	0,00210698	
1344	-0,03019484	0,31569144	0,00485737	m	-1,35574682	0,00210698	
2688	-0,14954713	0,31342156	0,00258748	m	-1,35457808	0,00093823	m
5376	-0,81466750	0,31217034	0,00133626	m	-1,35399370	0,00035386	m
10752	0,30407891	0,31149855	0,00066447	m	-1,35370152	0,00006167	m
21504	1,28357034	0,31116989	0,00033582	m	-1,35370152	0,00006167	
43008	-0,09454281	0,31099243	0,00015836	m	-1,35370152	0,00006167	
86016	-0,38364272	0,31091665	0,00008257	m	-1,35366499	0,00002515	m
172032	0,81555456	0,31087600	0,00004193	m	-1,35364673	0,00000689	m
344064	-0,22761506	0,31085447	0,00002039	m	-1,35364673	0,00000689	
688128	-10,07498787	0,31084454	0,00001047	m	-1,35364217	0,00000232	m
1376256	0,08515530	0,31083902	0,00000495	m	-1,35363988	0,00000004	m
2752512	0,10347124	0,31083657	0,00000249	m	-1,35363988	0,00000004	
5505024	0,14104327	0,31083533	0,00000126	m	-1,35363988	0,00000004	
11010048	0,22449739	0,31083471	0,00000064	m	-1,35363988	0,00000004	

Приведём ещё пример нахождения значения расходящейся в классическом смысле непрерывной дроби при помощи описанного выше алгоритма суммирования.

Известна непрерывная дробь Лагранжа для степенной функции [2]:

$$(1+x)^{\nu}=1+\frac{\nu x}{1\ +}\,\frac{(1-\nu)x}{2}\ +\ \frac{(1+\nu)x}{3}\ +\ldots+\ \frac{(m-\nu)x}{2}\ +\ \frac{(m+\nu)x}{2m+1+\ldots}. \qquad (6)$$

Непрерывная дробь (6) сходится на всей плоскости комплексного переменного, разрезанной по вещественной оси от -1 до $-\infty$. При $x<-1$ подкоренное выражение функции $y=(1+x)^{\nu}$ становится отрицательным, следовательно, значение функции $(1+x)^{\nu}$ при $x<-1$ становится комплексной величиной , которая, очевидно, не может приближаться вещественной последовательностью подходящих дробей разложения (6).

В табл. 3 приведены результаты вычисления значения расходящейся непрерывной дроби для $\sqrt[3]{-9}$ при помощи r/φ-алгоритма.

Таблица 3

Определение значения расходящейся непрерывной дроби

$$\sqrt[3]{-9} = 1 - \frac{10}{3\,-}\,\frac{2\cdot 10}{2\,-}\,\frac{4\cdot 10}{9\,-}\,\frac{5\cdot 10}{2\,-}\ldots-\frac{(3n-1)10}{2\,-}\,\frac{(3n+1)10}{3(2n+1)\,-}\ldots.$$

$$r_0 = 2.080083\ldots, \qquad \varphi_0 = 1.047197\ldots.$$

Номер звена дроби	Значение подходящей дроби	Модуль комплексного числа, r_n	Погрешность, $\varepsilon_r = \lvert r_0 - r_n \rvert$	min ε_r	Аргумент комплексного числа, φ_n	Погрешность, $\varepsilon_\varphi = \lvert \varphi_0 - \varphi_n \rvert$	min ε_φ
1	2	3	4	5	6	7	8
2	2,4285714	8,095238095238	6,015154272186	m	0,000000000000	1,047197551196	m
4	7,9230769	1,892578548704	0,187505274347	m	0,000000000000	1,047197551196	
8	0,0083609	0,946908431432	1,133175391618		0,785398163397	0,261799387799	m
16	2,3793179	1,514212477498	0,565871345553		0,785398163397	0,261799387799	
32	3,4334933	1,931910874242	0,148172948809	m	0,687223392972	0,359974158223	
64	-6,6957404	2,285828469458	0,205744646406		0,932660319034	0,114537232162	m
128	1,8056646	2,171608471371	0,091524648319	m	0,957204011640	0,089993539555	m
256	2,7046939	2,095947975804	0,015864152753	m	1,043106935762	0,004090615434	m
512	14,0355053	2,077080542151	0,003003280900	m	1,043106935762	0,004090615434	
1024	0,4131559	2,063579787259	0,016504035792		1,046174897338	0,001022653858	m
2048	-0,5703198	2,085479528230	0,005395705178		1,044640916550	0,002556634646	
4096	-33,5321135	2,082858835017	0,002775011965	m	1,046174897338	0,001022653858	
8192	1,1197769	2,079900863342	0,000182959709	m	1,048092373322	0,000894822126	m
16384	1,0914866	2,080396700069	0,000312877017		1,047133635330	0,000063915866	m
32768	1,0349376	2,080307362394	0,000223539343		1,047229509129	0,000031957933	m
65536	0,9216825	2,079865087605	0,000218735446		1,047229509129	0,000031957933	
131072	0,6914169	2,080106476321	0,000022653270	m	1,047205540679	0,000007989483	m
262144	0,1869493	2,079930141859	0,000153681192		1,047193556454	0,000003994741	m
524288	-1,4500205	2,080071498760	0,000012324291	m	1,047199548567	0,000001997370	m
1048576	5,5741164	2,080081877069	0,000001945982	m	1,047190560398	0,000006990797	
2097152	-0,8763266	2,080075907132	0,000007915919		1,047195054483	0,000002496713	
4194304	15,7595707	2,080077041783	0,000006781268		1,047199548567	0,000001997370	
8388608	0,4758782	2,080083260804	0,000000562247	m	1,047197301525	0,000000249671	m

Следует отметить, что при использовании r/φ -алгоритма необходимо иметь эффективные алгоритмы для построения так называемых соответствующих непрерывных дробей и для вычисления длинных серий значений подходящих дробей. Использование для счёта классического рекуррентного алгоритма (FR - алгоритм) приводит к быстрому переполнению разрядной сетки компьютера, а применение естественной процедуры вычисления непрерывной дроби “снизу – вверх” (BR – алгоритм) невозможно из-за недопустимо больших временных затрат при определении серий значений подходящих дробей. В [4] были детально рассмотрены алгоритмы для вычисления длинных серий значений подходящих дробей. В [5] изложены различные методы построения соответствующих непрерывных дробей.

Расходящиеся ряды нередко суммируются через соответствующие непрерывные дроби [6]. Для степенного ряда

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n + \ldots \tag{7}$$

можно построить непрерывную дробь

$$\omega_0 + \frac{\omega_1 x}{1\,-}\,\frac{\omega_2 x}{1\,+}\,\frac{\omega_3 x}{1\,-}\ldots+\frac{\omega_{2n-1} x}{1\,-}\,\frac{\omega_{2n} x}{1\,+}\ldots, \tag{8}$$

такую, что разложение n-й подходящей непрерывной дроби будет совпадать с исходным рядом (7) вплоть до члена $c_n x^n$ включительно:

$$\frac{P_n(x)}{Q_n(x)} = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n + \gamma_{n+1} x^{n+1} + \ldots \; .$$

Такую непрерывную дробь называют соответствующей ряду или соответствующей непрерывной дробью.

Используя коэффициенты c_i степенного ряда (7), можно построить соответствующую непрерывную дробь (8) по формулам Хейлерманна–Стилтьеса [7]:

$$\omega_0 = c_0, \quad \omega_1 = c_1,$$

$$\omega_{2n} = \frac{\varphi_{n-1}\psi_{n+1}}{\varphi_n \psi_n}, \qquad \omega_{2n+1} = -\frac{\varphi_{n+1}\psi_n}{\varphi_n \psi_{n+1}};$$

$$\varphi_n = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & \ldots & c_n \\ c_2 & c_3 & \ldots & c_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_n & c_{n+1} & \ldots & c_{2n-1} \end{vmatrix}, \qquad \psi_n = \begin{vmatrix} c_2 & c_3 & \ldots & c_n \\ c_3 & c_4 & \ldots & c_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_n & c_{n+1} & \ldots & c_{2n-2} \end{vmatrix}, \quad (9)$$

$$\varphi_0 = 1, \quad \psi_1 = 1.$$

Прежде чем рассматривать расходящиеся ряды, приведём пример ускорения медленно сходящихся рядов при помощи соответствующих непрерывных дробей. Предложено много алгоритмов ускорения сходимости рядов и последовательностей. Как показывает практика, пожалуй, самым эффективным и надёжным способом ускорения сходимости медленно сходящихся рядов является их суммирование через соответствующие непрерывные дроби. В табл. 4 приведены результаты вычисления ln2 с использованием ряда Меркатора.

Таблица 4

Определение значения ряда Меркатора

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots \, .$$

Число членов ряда	Значение частичных сумм ряда	Погрешность аппроксимации
2	0,50000000000000	0,19314718055994
10	0,64563492063492	0,04751225992502
100	0,68817217931020	0,00497500124974
1000	0,69264743055982	0,00049975000012
10000	0,69309718305996	0,00004999749998
100000	0,69314218058498	0,00000499997496
1000000	0,69314668056025	0,00000049999969
10000000	0,69314713056010	0,00000004999984
100000000	0,69314717556042	0,00000000499952

В табл. 5 константа ln2 определена при помощи цепной дроби Лагранжа.

Таким образом, использование непрерывной дроби, содержащей 19 звеньев, обеспечивает точность вычисления $\ln 2$ с 14 десятичными разрядами. Для сравнения: применение для определения $\ln 2$ ряда Меркатора, включающего 100 миллионов членов, позволяет вычислить $\ln 2$ с точностью всего 8 десятичных знаков. Разница в эффективности аппроксимации фантастическая.

Таблица 5

Определение значения непрерывной дроби Лагранжа

$$\ln 2 = \frac{1}{1+}\frac{1}{2+}\frac{1}{3+}\frac{2}{2+}\frac{2}{5+}\ldots+\frac{n}{2+}\frac{n}{2n+1+}\ldots\ .$$

Число звеньев	Значение подходящих дробей	Погрешность аппроксимации
2	0,66666666666666	0,02648051389328
3	0,70000000000000	0,00685281944005
4	0,69230769230769	0,00083948825225
5	0,69333333333333	0,00018615277339
6	0,69312169312169	0,00002548743825
7	0,69315245478036	0,00000527422042
8	0,69314641744548	0,00000076311446
9	0,69314733235438	0,00000015179444
10	0,69314715785304	0,00000002270690
11	0,69314718496213	0,00000000440219
12	0,69314717988653	0,00000000067341
13	0,69314718068816	0,00000000012822
14	0,69314718054001	0,00000000001993
15	0,69314718056369	0,00000000000375
16	0,69314718055936	0,00000000000058
17	0,69314718056005	0,00000000000012
18	0,69314718055993	0,00000000000001
19	0,69314718055995	0,00000000000001

Области сходимости степенного ряда (7) и соответствующей непрерывной дроби (8) для одной и той же функции могут быть различны. Например, расходящийся ряд Эйлера

$$1-1!\,x+2!\,x^2-3!\,x^3+4!\,x^4-\ldots \tag{10}$$

имеет соответствующую непрерывную дробь

$$\frac{1}{1+}\frac{1x}{1+}\frac{1x}{1+}\frac{2x}{1+}\frac{2x}{1+}\ldots+\frac{nx}{1+}\frac{nx}{1+}\ldots\ . \tag{11}$$

Ряд (8) представляет функцию $\int\limits_0^\infty \frac{e^{-t}}{1+xt}dt$, которая связана с интегральной показательной функцией $Ei(x)$ [8].

Числовой ряд

$$c_0+c_1+c_2+\ldots+c_n+\ldots \tag{12}$$

суммируется через значение непрерывной дроби (8) при x=1, если ряд (12) рассматривать как степенной ряд (7) при $x = 1$.

Расходящийся всюду, кроме $x=0$, ряд Эйлера при $x=1$ принимает вид

$$1-1!+2!-3!+4!-\ldots\ . \tag{13}$$

Определяя значение расходящегося ряда (13) через соответствующую непрерывную дробь (11) при $x = 1$, получим:

$$1-1!+2!-3!+4!-\ldots=\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{2}{1+}\frac{2}{1+}\ldots+\frac{n}{1+}\frac{n}{1+}\ldots=$$
$$=0{,}5963473623231945\ldots \qquad (14)$$

Выше уже отмечалось, что ряд Эйлера (10) связан с интегральной показательной функцией $Ei(x)$.Действительно известен быстро сходящийся ряд:

$$-eEi(-1)=-e\left(C-1+\frac{1}{2\cdot 2!}-\frac{1}{3\cdot 3!}+\ldots\right)=0{,}5963473623231945\ldots,$$

где e – неперово число, равное 2.718281… ,

С - постоянная Эйлера, имеющая значение 0,577215… .

Определив по расходящимся рядам соответствующие непрерывные дроби, можем найти значения других расходящихся рядов. Например,

$$1+1-1+2-5+14-42+132-\ldots=$$
$$=1+\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\ldots+\frac{1}{1+}\ldots=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=1{,}618033\ldots. \qquad (15)$$

$$1-1+1\cdot 3-1\cdot 3\cdot 5+1\cdot 3\cdot 5\cdot 7-1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9+\ldots=\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{2}{1+}\frac{3}{1+}\ldots+\frac{n}{1+}\ldots=0.655679 \qquad (16)$$

Расходящийся ряд (15) имеет своим значением “отношение золотого сечения”, а расходящийся ряд (16) связан с неполной гамма-функцией, так как

$$\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{2}{1+}\frac{3}{1+}\ldots+\frac{n}{1+}\ldots=\sqrt{\frac{e}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\frac{\pi e}{2}}erfc\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=0.6556795424\ldots.$$

Расходящимся рядам могут соответствовать конечные непрерывные дроби, т.е. эти ряды связаны с рациональными функциями:

$$1-1+1-1+1-\ldots=1-\frac{1}{1+}\frac{1}{1}=\frac{1}{2},$$

$$1+2+4+8+16+\ldots=1+\frac{2}{1-}\frac{2}{1}=-1,$$

$$1-2+3-4+5-\ldots=1-\frac{2}{1-}\frac{3}{2-}\frac{1}{3+}\frac{2}{1}=\frac{1}{4}.$$

Нередки случаи, когда соответствующая непрерывная дробь, построенная для расходящегося ряда, не сходится в классическом смысле.

Построим для ряда

$$1+1!+2!+3!+4!+\ldots \qquad (17)$$

соответствующую непрерывную дробь. По формулам (9) получим:

$$1+1!+2!+3!+4!+\ldots=\frac{1}{1-}\frac{1}{1-}\frac{1}{1-}\frac{2}{1-}\frac{2}{1-}\ldots-\frac{n}{1-}\frac{n}{1-}\ldots. \qquad (18)$$

Непрерывная дробь (18), в отличие от непрерывной дроби (14), имеет отрицательные частные числители. Непрерывная дробь (18) по признаку Ворпицкого является расходящейся непрерывной дробью. В самом деле, значения подходящих дробей разложения (18) не стремятся ни к какому пределу, т.е., непрерывная дробь (18) является в классическом смысле расходящейся.

Найдём значение расходящейся непрерывной дроби (18) при помощи r/φ-алгоритма. В табл. 6 приведены результаты вычислений непрерывной дроби (18), представляющей Ei(1).

$$Ei(1) = e\left(\frac{1}{1-}\frac{1}{1-}\frac{1}{1-}\frac{2}{1-}\frac{2}{1-}\frac{3}{1-}\frac{3}{1-}\ldots-\frac{n}{1-}\frac{n}{1-}\ldots\right)$$
$$= 3.6689338967\, e^{i1.0280017377}$$

Таблица 6

Определение значения расходящейся непрерывной дроби

$r_0 = 3.6689338967..$, $\varphi_0 = 1.028001737...$

№ звена дроби	Значение подходящей дроби	Модуль комплексного числа, r_n	Погрешность, $\varepsilon_r = \lvert r_0 - r_n \rvert$	Аргумент комплексного числа, φ_n	Погрешность, $\varepsilon_\varphi = \lvert \varphi_0 - \varphi_n \rvert$
1	2	3	4	5	6
4	5,43656365	3,23260009	0,43633380	0,00000000	1,02800173
6	1,08731273	3,84423102	0,17529713	0,39269908	0,63530265
16	1,26199375	4,12365173	0,44717838	0,78539816	0,24260357
32	-3,22229391	3,21557146	0,45336243	0,88357293	0,14442880
64	-5,44198600	3,40441763	0,26451626	0,98174770	0,04625403
128	3,40902451	3,44911711	0,21981677	1,03063508	0,00283335
256	2,26696092	3,60976107	0,05917282	1,04310693	0,01510519
512	2,46414684	3,65055907	0,01837481	1,04310693	0,01510519
1024	1,67450019	3,69927410	0,03034020	1,02163120	0,00637053
2048	5,89710924	3,70773799	0,03880409	1,02623314	0,00176889
4096	1,76596456	3,69848222	0,02954832	1,03236907	0,00436733
8192	-2,16761507	3,67756787	0,00863398	1,03428654	0,00628480
16384	-5,45891725	3,66492493	0,00400896	1,02968460	0,00168286
32768	-1,02199219	3,66736597	0,00156791	1,02728775	0,00071397
65536	1,98286910	3,67009386	0,00115907	1,02968460	0,00168286
131072	5,57106207	3,66798677	0,00094711	1,02721585	0,00078588
262144	-8,97247936	3,66782858	0,00110530	1,02751545	0,00048627
524288	6,23221177	3,66849563	0,00043826	1,02756938	0,00043234
1048576	5,89027864	3,66844670	0,00048718	1,02773716	0,00026457
2097152	8,12082269	3,66953895	0,00060305	1,02787255	0,00017918
4194304	7,05859556	3,66906517	0,00013127	1,02781431	0,00018742
8388608	2,28589509	3,66933307	0,00039917	1,02805737	0,00005563

Таким образом, удалось просуммировать расходящийся ряд (17), связанный с интегральной показательной функцией:

$$\frac{1}{e}Ei(1) = 1+1!+2!+3!+4!+\ldots = \frac{1}{1-}\frac{1}{1-}\frac{1}{1-}\frac{2}{1-}\frac{2}{1-}\frac{3}{1-}\frac{3}{1-}\ldots-\frac{n}{1-}\frac{n}{1-}\ldots = . \quad (19)$$
$$= 1,34970e^{i1.02800}$$

Аналогичным образом, преобразуя ряды в соответствующие непрерывные дроби с помощью формул (9), а затем находя значения расходящихся в классическом смысле непрерывных дробей при помощи r/φ-алгоритма, т.е. формул (1) и (2), можно просуммировать и другие расходящиеся ряды. Например,

$$1+1+1+2+5+14+42+132+\ldots = 1-\frac{1}{1-}\frac{1}{1-}\ldots-\frac{1}{1-}\ldots = e^{i\frac{\pi}{3}}, \quad (20)$$

$$1+1+1\cdot 3+1\cdot 3\cdot 5+1\cdot 3\cdot 5\cdot 7+\ldots=\frac{1}{1-}\,\frac{1}{1-}\,\frac{2}{1-}\,\frac{3}{1-}\,\frac{4}{1-}\ldots\frac{n}{1-}\ldots=$$

$$1{,}050318\,e^{i0.809229}. \qquad (21)$$

Непрерывная дробь (20) представляет комплексный корень квадратного уравнения

$$x^2-2\cos\frac{\pi}{3}x+1=0.$$

Непрерывная дробь (21) связана с неполной гамма функцией:

$$\frac{1}{1-}\,\frac{1}{1-}\,\frac{2}{1-}\,\frac{3}{1-}\,\frac{4}{1-}\ldots\frac{n}{1-}\ldots=i\sqrt{\frac{1}{2e}}\Gamma\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)=i\sqrt{\frac{\pi}{2e}}erfc\left(\frac{i}{\sqrt{2}}\right)=$$

$$1{,}0503178040e^{i0.8092294339}. \qquad (22)$$

В табл. 7 приведены результаты определения значения расходящейся непрерывной дроби (22).

Таблица 7

Определение значения расходящейся непрерывной дроби

$$i\sqrt{\frac{1}{2e}}\Gamma\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)=i\sqrt{\frac{\pi}{2e}}erfc\left(\frac{i}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{1-}\,\frac{1}{1-}\,\frac{2}{1-}\,\frac{3}{1-}\,\frac{4}{1-}\ldots\frac{n}{1-}\ldots.$$

$$r_0=1.050317804055\ldots, \qquad \varphi_0=0.80922943390\ldots.$$

Номер звена дроби	Значение подходящей дроби	Модуль Комплексного числа, r_n	Погрешность, $\varepsilon_r=\lvert r_0-r_n\rvert$	min ε_r	Аргумент комплексного числа, φ_n	Погрешность, $\varepsilon_\varphi=\lvert\varphi_0-\varphi_n\rvert$	min ε_φ
1	2	3	4	5	6	7	8
8	0,909090	1,018429678599	0,031888125466	m	0,897597901025	0,088368467122	m
16	-0,255298	1,017392202149	0,032925601915		0,837758040957	0,028528607054	m
32	1,232969	1,051369832722	0,001052028657	m	0,709391889520	0,099837544382	
64	5,097151	1,188307933456	0,137990129391		0,847731350968	0,038501917065	
128	2,897390	1,137523550255	0,087205746189		0,816319350932	0,007089917029	m
256	0,485401	1,099518268902	0,049200464837		0,813118098576	0,003888664673	m
512	0,152295	1,073023887296	0,022706083231		0,786935146104	0,022294287798	
1024	0,215155	1,069492823824	0,019175019759		0,798449745780	0,010779688122	
2048	-1,789037	1,045731096537	0,004586707527		0,813406988960	0,004177555057	
4096	-1,076242	1,043640648366	0,006677155698		0,810906821695	0,001677387792	m
8192	1,238412	1,046287186312	0,004030617752		0,805821775752	0,003407658150	
16384	1,513253	1,050413791934	0,000095987869	m	0,804813792780	0,004415641123	
32768	2,634049	1,053561869047	0,003244064982		0,809583067321	0,000353633417	m
65536	-18,763236	1,050054380996	0,000263423069		0,811536156750	0,002306722846	
131072	0,007903	1,050452714611	0,000134910545		0,807694983945	0,001534449958	
262144	0,785107	1,049839458591	0,000478345473		0,810292489546	0,001063055643	
524288	-12,041543	1,050061241159	0,000256562905		0,809985345715	0,000755911812	
1048576	0,846676	1,049973494523	0,000344309541		0,809607069807	0,000377635904	
2097152	0,815962	1,050125044812	0,000192759252		0,809540770488	0,000311336585	m
4194304	0,975265	1,050106631988	0,000211172077		0,809297147852	0,000067713949	m
8388608	0,909983	1,050176943924	0,000140860141		0,809317649265	0,000088215362	
16777216	1,286952	1,050235875462	0,000081928602	m	0,809141582712	0,000087851190	

Заключение. Метод суммирования расходящихся непрерывных дробей может быть эффективно использован при решении бесконечных нерегулярных систем линейных алгебраических уравнений [9]. Под нерегулярными понимают системы алгебраических уравнений, решения которых не стремятся к пределу в классическом смысле с ростом размерности системы. Известно, что решения трёхдиагональных систем линейных алгебраических уравнений можно представить в виде непрерывных дробей. Этот способ записи решений трёхдиагональных систем эквивалентен алгоритму “прогонки”. Непрерывные дроби, представляющие решения системы, будут бесконечными, если бесконечна система линейных алгебраических уравнений. Но бесконечные непрерывные дроби могут быть сходящимися и расходящимися. При решении регулярных систем не возникает трудностей, так как вместо бесконечных систем оперируют “усечёнными” системами. Непосредственно метод “усечения”, очевидно, не срабатывает в случае нерегулярных бесконечных систем. При некоторых ограничениях решения нерегулярных бесконечных систем находятся при помощи рассмотренного выше метода суммирования расходящихся непрерывных дробей. Можно указать ещё ряд задач в вычислительной математике, эффективное решение которых обеспечивается алгоритмом суммирования расходящихся непрерывных дробей [10–12].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Бейкер Дж., Грейвис–Морис П.* Аппроксимация Паде: Пер. с англ. – М.: Мир, 1986. – 502 с.
2. *Джоунс У., Трон В.* Непрерывные дроби. Аналитическая теория и приложения: Пер. с англ.– М.: Мир, 1985. – 414 с.
3. *Шмойлов В.И.* Периодические цепные дроби. – Львов: Академический Экспресс, 1998. – 219 с.
4. *Качмар В.С., Русин Б.П., Шмойлов В.И.* Алгоритмы вычисления значений цепных дробей // Вычислительная математика. – 1998. – Т. 38, № 9. – С. 1436-1451.
5. *Шмойлов В.И.* Непрерывные дроби. В 3-х т. Т. 2. Расходящиеся непрерывные дроби. НАН Украины, Ин-т прикл. пробл. механики и математики. – Львов: Меркатор, 2004. – 558 с.
6. *Brezinski C.* History of continued fraction and Pade approximants. – Springer- Verlag, Berlin, 1991. – 547 p.
7. *Lorentzen L., Waadeland H.* Continued fractions with applications. – Amsterdam – London – New-York – Tokyo, 1992. – 606 p.
8. *Эрдейи А.* Асимптотические разложения: Пер. с. англ. – М.: ГИФМЛ, 1962. – 127 с.
9. *Шмойлов В.И.* Расходящиеся системы линейных алгебраических уравнений. – Таганрог: Изд-во ТТИ ЮФУ, 2010. – 205 с.
10. *Шмойлов В.И.* Решение алгебраических уравнений при помощи r/φ-алгоритма. – Таганрог: Изд-во ТТИ ЮФУ, 2012. – 330 с.
11. *Шмойлов В.И.* Непрерывные дроби и r/φ алгоритм. – Таганрог: Изд-во ТТИ ЮФУ, 2012. – 608 с.
12. *Шмойлов В.И., Коваленко В.Б.* Некоторое применения алгоритма суммирования расходящиеся непрерывных дробей // Вестник Южного научного центра РАН. – 2012. – Т. 8, № 4. – С. 3-13.

Статью рекомендовал к опубликованию д.т.н. И.И. Левин.

Шмойлов Владимир Ильич – Южный научный центр РАН; e-mail: Shmoylov40@at.infotectt.ru; 347902, г. Таганрог, ул. Свободы, 27-6, кв. 6; тел.: 88634318910, 88634368337, факс: 88634360376; научный сотрудник.

Кириченко Геннадий Анатольевич – Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Южный федеральный университет»; e-mail: vt_GAK@mail.ru; 347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44; тел.: 88634371428, 89064287987; аспирант

Shmoylov Vladimir Ilyich – Southern Scientific Center of Russian Academy of Sciences (SSC RAS); e-mail: Shmoylov40@at.infotectt.ru; 27-6, Svobody street, kv. 6, Taganrog, 347902, Russia; phones: +78634318910, +78634368337, fax: +78634360376; researcher.

Kirichenko Gennady Anatolievich – Federal State-Owned Autonomy Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”; e-mail: vt_GAK@mail.ru; 44, Nekrasovsky, Taganrog, 347928, Russia; phones: +78634371428, +79064287987; postgraduate student.