

**Хачунц Дианна Самвеловна** – e-mail: diana-hachunts@mail.ru; тел.: 89287786737; кафедра высшей математики; аспирант.

**Chistyakov Alexander Evgenjevich** – Federal State-Owned Autonomy Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”; e-mail: cheese\_05@mail.ru; 44, Nekrasovskiy, Taganrog, 347928, Russia; phone: +78634371606; the department of higher mathematics; associate professor.

**Khachunts Dianna Samvelovna** – e-mail: diana-hachunts@mail.ru; phone: +79287786737; the department of higher mathematics; postgraduate graduate.

УДК 532.5.031

**А.Е. Чистяков, А.А. Семенякина**

### **ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ИНТЕРПОЛЯЦИИ ДЛЯ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ДОННОЙ ПОВЕРХНОСТИ**

*Предложен математический алгоритм, предназначенный для восстановления рельефа дна акватории на основе гидрографической информации (глубины водоема в отдельных точках или изолиний уровня), и выполнена его численная реализация. На основе полученного метода решения задачи получено наглядное изображение рельефа дна на примере Азовского моря. Отметим, что разработанный алгоритм обладает достаточной степенью гладкости в точках склейки функций и меньшими выбросами в одномерном случае по сравнению с кубической функцией, использованной в расчетах. Также на основе полученной функции была разработана схема повышенного порядка аппроксимации для решения поставленной в данной работе задачи.*

*Донная поверхность; глубина; схемы повышенного порядка точности; интерполяция.*

**A.E. Chistyakov, A.A. Semenyakina**

### **USE OF INTERPOLATION METHODS FOR RECOVERY BOTTOM SURFACE**

*A mathematical algorithm designed to restore the sea floor topography based hydrographic information (depth of the water at specific points or contour level) and was performed its numerical implementation. Based on this method of solving the problem is obtained visual representation of the bottom contour on the example of the Azov Sea. Note that the developed algorithm has a sufficient degree of smoothness in the gluing points of functions and has fewer emissions in the one case than in the cubic function used in the calculations. Also on the basis of the functions was developed a scheme of high order approximation for the solution of the problem in this paper.*

*Bottom surface; depth; schemes of high order; interpolation.*

**Введение.** Для реконструкции сценария экологической катастрофы, а также для моделирования возможных вариантов биологической реабилитации Азовского моря был создан ряд высокоточных математических моделей гидрофизических процессов [1]. Данные модели описывают движение водной среды с учетом следующих факторов: ветровые течения и трение о дно, стоки рек, испарение, сила Кориолиса, турбулентный обмен, сгонно-нагонные явления, сложная геометрия дна и береговой линии. Другое назначение разработанных математических моделей гидрофизических процессов связано со своевременным предсказанием различных природных катаклизмов: затопление прибрежных районов, обмелением судоходных каналов и др. Прогнозирование процесса подъема уровня в Азовском море является актуальной задачей на данный момент.

Практически все процессы, происходящие в толще вод, отражаются в рельефе дна акватории. Кроме того, антропогенные воздействия, такие, как добыча полезных ископаемых, сброс сточных вод, строительство морских сооружений и т.д., имеющие место в придонном слое акваторий, так или иначе, определяют морфологию поверхности дна либо характер ее изменения во времени.

Экологическая система Таганрогского залива и Азовского моря является по своей сути уникальной. Залив является одним из наиболее рыбопродуктивных естественных водоемов, что объясняется благоприятными природно-климатическими условиями, малосоленостью, обилием корма. С другой стороны, из внутреннего Азовское море превратилось в оживленный международный морской перекресток. Море, в особенности залив, начинает подвергаться «новым» видам антропогенного воздействия, обусловленным строительством портов, прокладкой судоходных каналов, интенсификацией судоходства и так далее. В то же время, осуществленные без предварительного математического моделирования инженерно-геологические работы могут привести в дальнейшем к интенсивному заносу и заиливанию и, как следствие, к большим материальным затратам на поддержание каналов в "штатном" режиме. Для построения математических моделей гидрофизических процессов необходимо создания подробных сеток, что в свою очередь требует создания подробных карт глубин. Сказанное выше и обуславливает актуальность создания комплекса программ, предназначенного для восстановления геометрии донной поверхности Таганрогского залива и Азовского моря.

Одной из актуальных задач, которые возникают при математическом моделировании гидродинамики мелководных водоемов [2], является задача обработки гидрографической информации. Как правило, глубина водоема задается в отдельных точках или изолиниями уровня (как показано на рис. 1).



Рис. 1. Исходное изображение рельефа дна Азовского моря

Использование подобных карт для построения расчетных сеток нежелательно, так как появляются погрешности вычислений, связанные с «грубым» заданием геометрии расчетной области. Таким образом, для повышения точности расчетов гидродинамических процессов необходимо приблизить функцию двух переменных, описывающую рельеф дна водоема более гладкими функциями.

**Постановка задачи.** Для получения функции рельефа дна используем решение уравнения диффузии, к которому сводится уравнение Сен-Венана, описывающее транспорт наносов [3–4]. Использование данного подхода позволит избежать высоких градиентов расчетного поля. Для получения функции глубины используем уравнение Лапласа:

$$\Delta H = 0, \quad (1)$$

где  $H$  – глубина водоема.

Данный подход обладает существенным недостатком, связанным с отсутствием гладкости в точках, где задаются значения поля глубин. Для устранения данной проблемы можно использовать решения следующего уравнения:

$$\Delta^2 H = 0. \quad (2)$$

К недостаткам этого подхода относят большие выбросы (отклонение от линейной функции). При помощи первых двух подходов можно получать гладкие функции, которые не обладают выделенностью направлений, но каждый из них обладает недостатками.

Для получения гладкой функции рельефа также можно использовать решение уравнения, применяемого для получения схем повышенного порядка погрешности аппроксимации для задачи транспорта тепла:

$$\Delta H - \frac{h^2}{12} \Delta^2 H = 0. \quad (3)$$

Фундаментальной системой решений уравнения (1) является следующая функция:

$$H_1(x) = 1, H_2(x) = x, \quad (4)$$

для уравнения (2):

$$H_1(x) = 1, H_2(x) = x, H_3(x) = x^2, H_4(x) = x^3, \quad (5)$$

для уравнения (3):

$$H_1(x) = 1, H_2(x) = x, H_3(x) = ch(kx), H_4(x) = sh(kx), k = \sqrt{12}/h. \quad (6)$$

В первом случае интерполяция осуществляется отрезками прямых, проходящих через соседние точки. Во втором случае интерполяция выполняется на основе кубических сплайнов. В третьем случае – на основе сплайнов функции (6). Построим алгоритм, предназначенный для одномерной интерполяции на основе функции (6), и проведем сравнение предложенных подходов.

**Задача одномерной интерполяции функций.** Пусть на отрезке  $a \leq x \leq b$  задана сетка  $\omega = \{x_i : x_0 = a < x_1 < \dots < x_i < \dots < x_n = b\}$  и в её узлах заданы значения функции  $y(x)$ , равные  $y(x_0) = y_0, \dots, y(x_i) = y_i, \dots, y(x_n) = y_n$ . Требуется построить интерполянту – функцию  $f(x)$ , совпадающую с функцией  $y(x)$  в узлах сетки:

$$f(x_i) = y_i, i = \overline{0, n}. \quad (7)$$

Основная цель интерполяции – получить быстрый (экономичный) алгоритм вычисления значений  $f(x)$  для значений  $x$ , не содержащихся в таблице данных.

В случае интерполяции сплайном между любыми двумя соседними узлами функция его коэффициенты на каждом интервале определяются из условий сопряжения в узлах:

$$f(x_i) = y_i, f'(x_i - 0) = f'(x_i + 0), f''(x_i - 0) = f''(x_i + 0), i = \overline{1, n-1}. \quad (8)$$

Кроме того, на границе при  $x = x_0$  и  $x = x_n$  ставятся условия

$$f''(x_0) = 0, f''(x_n) = 0. \quad (9)$$

На каждом отрезке  $x \in [x_i, x_{i+1}]$ ,  $i = \overline{0, n-1}$ , будем искать интерполирующую функцию  $f(x)$  в виде линейной комбинации следующих функций:  $1, x, ch(kx), sh(kx)$ , где  $k$  – заданная постоянная. Тогда функция  $f(x)$  может быть записана в виде

$$f(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i ch(k(x - x_i)) + d_i sh(k(x - x_i)). \quad (10)$$

Из условия  $f(x_i) = y_i$  имеем

$$y_i = a_i + c_i$$

или

$$a_i = y_i - c_i, \quad i = \overline{0, n-1}. \quad (11)$$

Обозначим  $h_i = x_{i+1} - x_i$ ,  $i = \overline{0, n-1}$ , и подставим  $x = x_{i+1}$  в выражение (10), в результате чего получим:

$$y_{i+1} = a_i + b_i h_i + c_i ch(kh_i) + d_i sh(kh_i), \quad i = \overline{0, n-1}. \quad (12)$$

Подставим (11) в выражение (12):

$$y_{i+1} = y_i - c_i + b_i h_i + c_i ch(kh_i) + d_i sh(kh_i). \quad (13)$$

Вычислим производные:

$$f'(x) = b_i + kc_i sh(k(x-x_i)) + kd_i ch(k(x-x_i)),$$

$$f''(x) = k^2 c_i ch(k(x-x_i)) + k^2 d_i sh(k(x-x_i)), \quad x \in [x_i, x_{i+1}]$$

и потребуем их непрерывности при  $x = x_{i+1}$ :

$$b_i + kc_i sh(kh_i) + kd_i ch(kh_i) = b_{i+1} + kd_{i+1}, \quad i = \overline{0, n-2}, \quad (14)$$

$$c_i ch(kh_i) + d_i sh(kh_i) = c_{i+1}, \quad i = \overline{0, n-2}. \quad (15)$$

Общее число неизвестных коэффициентов, очевидно, равно  $4n$ , число уравнений (11), (12), (14) и (15) равно  $4n-2$ . Недостающие два уравнения получаем из условия (9) при  $x = x_0$  и  $x = x_n$ :

$$c_0 = 0, \quad c_{n-1} ch(kh_{n-1}) + d_{n-1} sh(kh_{n-1}) = 0.$$

Выражение из (15)  $d_i = (c_{i+1} - c_i ch(kh_i)) / sh(kh_i)$ , подставляя выражение в (13), получим:

$$b_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} + \frac{c_i - c_{i+1}}{h_i}. \quad (16)$$

Подставив теперь выражения для  $b_i, d_i, b_{i+1}, d_{i+1}$  и формулу (14), в результате чего получаем:

$$\begin{aligned} & \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} + \frac{c_i - c_{i+1}}{h_i} + kc_i sh(kh_i) + k \frac{c_{i+1} - c_i ch(kh_i)}{sh(kh_i)} ch(kh_i) = \\ & = \frac{y_{i+2} - y_{i+1}}{h_{i+1}} + \frac{c_{i+1} - c_{i+2}}{h_{i+1}} + k \frac{c_{i+2} - c_{i+1} ch(kh_{i+1})}{sh(kh_{i+1})}, \quad i = \overline{0, n-2}. \end{aligned}$$

После несложных преобразований получаем разностное уравнение второго порядка для определения  $c_i$

$$\begin{aligned} & \left( \frac{1}{h_{i-1}} - \frac{k}{sh(kh_{i-1})} \right) c_{i-1} + \left( k \frac{ch(kh_{i-1})}{sh(kh_{i-1})} + k \frac{ch(kh_i)}{sh(kh_i)} - \frac{1}{h_{i-1}} - \frac{1}{h_i} \right) c_{i+1} + \\ & + \left( \frac{1}{h_i} - \frac{k}{sh(kh_i)} \right) c_{i+1} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}}, \quad i = \overline{1, n-1}. \end{aligned} \quad (17)$$

С краевыми условиями

$$c_0 = 0, \quad c_n = 0. \quad (18)$$

Условие  $c_n = 0$  эквивалентно условию  $c_{n-1}ch(kh_{n-1}) + d_{n-1}sh(kh_{n-1}) = 0$ . Разностное уравнение (17) с условиями (18) можно решить методом прогонки.

**Пример работы разработанного алгоритма.** Построим интерполянту для функции  $f(x)$ , заданной следующим образом:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f(x)	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0

В результате интерполяции были рассчитаны следующие коэффициенты-интерполянты (параметр  $k = \sqrt{12}$ ):

$a_i$	$b_i$	$c_i$	$d_i$	отрезок
0	0,0238	0	0,001492	$0 \leq x < 1$
-0,0238	-0,1264	0,0238	-0,01444	$1 \leq x < 2$
-0,1502	1,503	0,1502	-0,1726	$2 \leq x < 3$
1,353	-1,531	-0,3527	0,3646	$3 \leq x < 4$
-0,178	-0,0209	0,178	-0,1659	$4 \leq x < 5$
-0,1989	1,399	0,1989	-0,2118	$5 \leq x < 6$
1,2	-0,0165	-0,1999	0,1888	$6 \leq x < 7$
1,183	-1,503	-0,1834	0,2038	$7 \leq x < 8$
-0,3196	1,674	0,3196	-0,3424	$8 \leq x < 9$
1,354	-1,354	-0,3541	0,3548	$9 \leq x < 10$

Результат работы приведен на рис. 2.

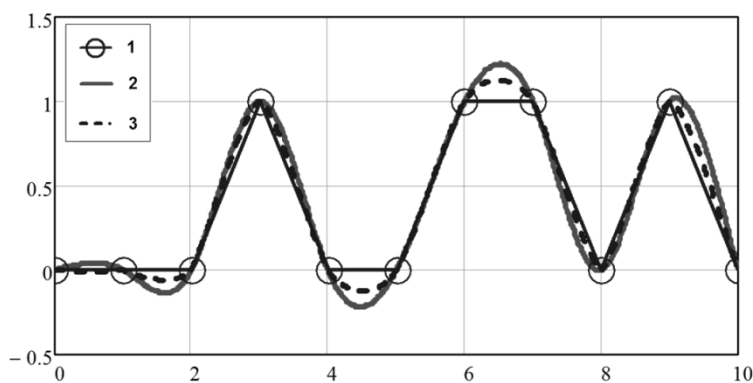


Рис. 2. Результат интерполяции: 1 – линейная интерполяция; 2– кубический сплайн; 3 – на основе предложенного алгоритма

Первый подход обладает недостатком, связанным с отсутствием гладкости в точках склейки. К недостаткам второго подхода относят большие выбросы. Для уменьшения влияния на решения вышеперечисленных изъянов методов будем использовать решение уравнения, применяемого для получения схем повышенного порядка погрешности аппроксимации для задачи транспорта тепла. Из рис. 2 видно, что интерполяция, полученная на основе предложенного алгоритма, имеет меньшее отклонение от линейной интерполяции по сравнению с кубическим сплайном и обладает достаточной степенью гладкости в точках склейки функций.

**Аппроксимация оператора второй производной.** Вводятся коэффициенты  $q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6$ , описывающие «заполненность» областей, находящихся в окрестности ячейки (контрольных областей). Значение  $q_0$  характеризует «заполненность» области  $D_0: \{x \in (x_{i-1}, x_{i+1}), y \in (y_{j-1}, y_{j+1}), z \in (z_{k-1}, z_{k+1})\}$ ,  $q_1 - D_1: \{x \in (x_i, x_{i+1}), y \in (y_{j-1}, y_{j+1}), z \in (z_{k-1}, z_{k+1})\}$ ,  $q_2 - D_2: \{x \in (x_{i-1}, x_i), y \in (y_{j-1}, y_{j+1}), z \in (z_{k-1}, z_{k+1})\}$ ,  $q_3 - D_3: \{x \in (x_{i-1}, x_{i+1}), y \in (y_j, y_{j+1}), z \in (z_{k-1}, z_{k+1})\}$ ,  $q_4 - D_4: \{x \in (x_{i-1}, x_{i+1}), y \in (y_{j-1}, y_j), z \in (z_{k-1}, z_{k+1})\}$ ,  $q_5 - D_5: \{x \in (x_{i-1}, x_{i+1}), y \in (y_{j-1}, y_{j+1}), z \in (z_k, z_{k+1})\}$ ,  $q_6 - D_6: \{x \in (x_{i-1}, x_{i+1}), y \in (y_{j-1}, y_{j+1}), z \in (z_{k-1}, z_k)\}$ .

Заполненные части областей  $D_m$  будем называть  $\Omega_m$ , где  $m = \overline{0..6}$ . В соответствии с этим коэффициенты  $q_m$  можно вычислить по формулам  $(q_m)_{i,j,k} = S_{\Omega_m} / S_{D_m}$ .

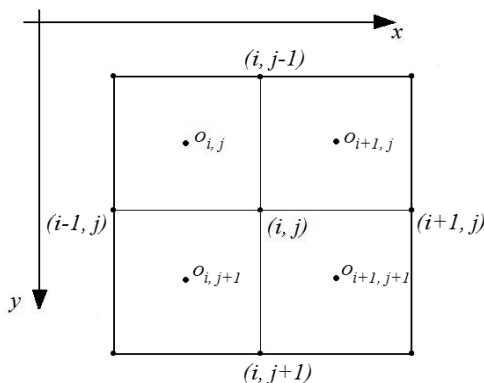


Рис. 3. Расположение узлов относительно ячеек

В случае граничных условий в форме Неймана дискретный аналог оператора диффузионного  $(\mu c'_x)'_x$  переноса, полученный при помощи интегро-интерполяционного метода [6], учитывающий частичную «заполненность» ячеек, может быть записан в следующем виде[7]:

$$(q_0)_{i,j} (\mu c'_x)'_x \approx (q_1)_{i,j} \mu_{i+1/2,j} \frac{c_{i+1,j} - c_{i,j}}{h_x^2} - (q_2)_{i,j} \mu_{i-1/2,j} \frac{c_{i,j} - c_{i-1,j}}{h_x^2}.$$

Аналогичным образом запишутся аппроксимации по оставшимся координатным направлениям.

**Схема повышенного порядка погрешности аппроксимации для оператора диффузионного переноса.** Для аппроксимации оператора второй производной  $c''$  разностной схемой, обладающей четвертым порядком погрешности аппроксимации, необходимо аппроксимировать оператор  $c'' - c^{(IV)} h^2 / 12$  вторым порядком погрешности аппроксимации:

$$(q_0)_i c''_i \approx (q_1)_i \frac{c_{i+1} - c_i}{h^2} - (q_2)_i \frac{c_i - c_{i-1}}{h^2},$$

$$(q_0)_i c_i^{(IV)} h^2 / 12 \approx \frac{(q_1)_i}{12h^2} \left( \frac{(q_1)_{i+1}}{(q_0)_{i+1}} c_{i+2} - 2c_{i+1} + \frac{(q_2)_{i+1}}{(q_0)_{i+1}} c_i \right) - \left( \frac{(q_1)_i}{12h^2} + \frac{(q_2)_i}{12h^2} \right) \left( \frac{(q_1)_i}{(q_0)_i} c_{i+1} - 2c_i + \frac{(q_2)_i}{(q_0)_i} c_{i-1} \right) + \frac{(q_2)_i}{12h^2} \left( \frac{(q_1)_{i-1}}{(q_0)_{i-1}} c_i - 2c_{i-1} + \frac{(q_2)_{i-1}}{(q_0)_{i-1}} c_{i-2} \right).$$

В итоге получим представление оператора диффузионного переноса  $c''$  разностной схемой, обладающей четвертым порядком точности. Решение полученных сеточных уравнений выполнено на основе адаптивного модифицированного ПТМ вариационного типа [8–10].

**Результаты расчетов.** Для восстановления рельефа дна акватории выполнено численная реализация разработанного математического алгоритма. На рис. 4 приведено изображение рельефа дна Азовского моря, полученное на основе предложенного метода.

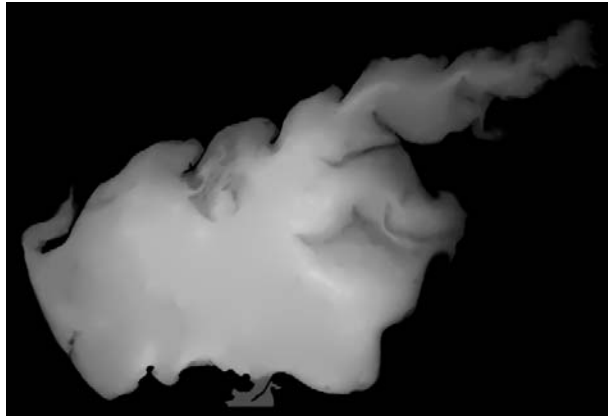


Рис. 4. Восстановленная поверхность дна Азовского моря

**Вывод.** Отметим, что предложенный алгоритм обладает достаточной степенью гладкости в точках склейки функций и обладает меньшими выбросами в одномерном случае по сравнению с кубической функцией, использованной в расчетах. Также на основе полученной функции была разработана схема повышенного порядка аппроксимации для решения поставленной в данной работе задачи.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Якушев Е.В., Сухинов А.И. Комплексные океанологические исследования Азовского моря в 28-м рейсе научно-исследовательского судна «Акванавт» // Океанология. – 2003. – Т. 43, № 1. – С. 44-53.
2. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Алексеенко Е.В. Численная реализация трехмерной модели гидродинамики для мелководных водоемов на супервычислительной системе // Математическое моделирование. – 2011. – Т. 23, № 3. – С. 3-21.
3. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Проценко Е.А. Построение дискретной двумерной математической модели транспорта наносов // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2011. – № 8 (121). – С. 32-44.
4. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Проценко Е.А. Двумерная гидродинамическая модель, учитывающая динамическое перестроение геометрии дна мелководных водоемов // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2011. – № 8 (121). – С. 159-167.
5. Чистяков А.Е. Об аппроксимации граничных условий трехмерной модели движения водной среды // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2010. – № 6 (107). – С. 66-77.

6. Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1989.
7. Сухинов А.И., Тимофеева Е.Ф., Чистяков А.Е. Построение и исследование дискретной математической модели расчета прибрежных волновых процессов // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2011. – № 8 (121). – С. 22-32.
8. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. – М.: Наука, 1978.
9. Коновалов А.Н. К теории попеременно-треугольного итерационного метода // Сибирский математический журнал. – 2002. – № 43:3. – С. 552-572.
10. Чистяков А.Е. Теоретические оценки ускорения и эффективности параллельной реализации ПТМ скорейшего спуска // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2010. – № 6 (107). – С. 237-249.

Статью рекомендовал к опубликованию д.т.н., профессор Я.Е. Ромм.

**Чистяков Александр Евгеньевич** – Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Южный федеральный университет»; e-mail: cheese\_05@mail.ru; 347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44; тел.: 88634371606; кафедра высшей математики; доцент.

**Семенякина Алена Александровна** – e-mail: j.a.s.s.y@mail.ru; кафедра высшей математики; студентка.

**Chistyakov Alexander Evgenjevich** – Federal State-Owned Autonomy Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”; e-mail: cheese\_05@mail.ru; 44, Nekrasovskiy, Taganrog, 347928, Russia; phone: +78634371606; the department of higher mathematics; associate professor.

**Semenyaykina Alena Alexandrovna** – e-mail: j.a.s.s.y@mail.ru; the department of higher mathematics; student.

УДК 532.5.031

**А.Е. Чистяков, И.Ю. Кузнецова**

#### **ЗАДАЧА РАСЧЕТА И ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ПРОЦЕССА ПОДЪЕМА УРОВНЯ ВОДЫ В МЕЛКОВОДНЫХ ВОДОЕМАХ**

*Для реконструкции сценария экологической катастрофы, а также для моделирования возможных вариантов биологической реабилитации водоема был создан ряд высокоточных математических моделей гидрофизических процессов в мелководных водоемах. Данные модели описывают движение водной среды с учетом различных факторов. Другое актуальное назначение высокоточных математических моделей гидрофизических процессов связано со своевременным предсказанием различных природных катаклизмов, связанных с изменением уровня воды: затоплением прибрежных районов, обмелением судоходных каналов и др. Прогнозирование процесса подъема уровня воды в Азовском море является актуальной задачей на данный момент.*

*Математическое моделирование; рельеф дна; прогнозирование.*

**A.E. Chistyakov, I.Y. Kuznetsova**

#### **PROBLEM OF CALCULATION AND PREDICTIN PROCESS OF LIFTING OF WATER LEVEL IN SHALLOW WATERS**

*For reconstruction of the scenario of ecological disaster, and also for modeling of possible options of biological rehabilitation of a reservoir was created high-precision mathematical models of hydrophysical processes in shallow waters. These models describe motion of the water environment taking into account various factors. Other actual purpose of high-precision mathematical*