Раздел VI. Математическое моделирование в исследовании биологических объектов

УДК 532.516

А.В. Никитина, Т.В. Камышникова, И.С. Семенов

РАСЩЕПЛЕНИЕ ПО ФИЗИЧЕСКИМ ПРОЦЕССАМ ДЛЯ РАСЧЕТА ЗАДАЧ БИОЛОГИЧЕСКОЙ КИНЕТИКИ В ТРЕХМЕРНЫХ ОБЛАСТЯХ СЛОЖНОЙ ФОРМЫ

Для исследования задач биологической кинетики на примере задачи динамики фитопланктонной популяции в трехмерных областях со сложной границей предлагается численный метод, основанный на идее расщепления по физическим процессам и по пространственным направлениям. Расщепление проводится в два этапа (конвективный и диффузионный переносы) для системы уравнений, записанной в физических переменных, затем для каждого уравнения системы проводим расщепление по пространственным переменным. Показана оценка скорости сходимости дискретной задачи и показана погрешность суммарной аппроксимации локально-одномерных схем с центральными разностями.

Расщепление по физическим процессам; математическая модель; устойчивость; скорость сходимости.

A.V. Nikitina, T.V. Kamishnikova, I.C. Semenov

SPLITTING ON PHYSICAL PROCESSES FOR CALCULATION OF PROBLEMS OF BIOLOGICAL KINETICS IN THREE-DIMENSIONAL AREAS OF THE DIFFICULT FORM

For research of the problems of biological kinetics on the example of the problems of dynamics of phytoplankton population in three-dimensional domains with a complicated boundary of the numerical method, based on the idea of splitting by physical processes and spatial directions. Splitting is carried out in two stages (convection and diffusion transfers) is carried out for the system of equations, which is recorded in physical variables, then for each equation of the system carry out splitting by spatial variable. Shows the estimate of the rate of convergence of the discrete problem and shows the deviation of the total approximation of locally one-dimensional schemes with Central differences.

Splitting on physical processes; mathematical model; stability; convergence speed.

Введение. В работе описываются методы решения задачи биологической кинетики на примере модели динамики фитопланктонной популяции в мелководном водоеме [1]. Численное решение задачи основано на идее расщепления по физическим процессам и по координатам. Изучаются условия сходимости разностной задачи.

Постановка задачи. Рассмотрим задачу биологической кинетики на примере пространственно-неоднородной модели динамики вредоносной водоросли Sceletonemacostatum, имеющей наибольшее значение в питании пелагических рыб Азовского моря [2].

Выпишем систему из трех уравнений диффузии – конвекции – реакции в области G, представляющей собой замкнутый бассейн, ограниченный невозмущенной поверхностью водоема Σ_0, дном $\Sigma_H = \Sigma_H(x, y)$ и цилиндрической поверхностью σ, для временного интервала $0 < t \le T_0$. $\Sigma = \Sigma_0 \cup \Sigma_H \cup \sigma$ – кусочно-гладкая граница области G [3].

Предположим периодичность процесса ($T_0 > 0$, T_0 – период):

$$X(x, y, z, t) = X(x, y, z, t + T_0),\ S(x, y, z, t) = S(x, y, z, t + T_0).$$

Введем на поверхности Σ области G функции $u_n^+ = \begin{cases} u_n, u_n \ge 0; \\ 0, u_n < 0 \end{cases}$ и $u_n^- = u_n - u_n^+$. Разобьем интервал $0 \le t \le T_0$ на достаточно малые отрезки времени $t^j \le t \le t^{j+1}$, $j = 0, 1, .., j_0 - 1$, $t_0 = 0$, $t_{j_0} = T_0$ и запишем линеаризованную на каждом из отрезков времени систему уравнений вида:

$$\frac{\partial X}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(U\frac{\partial X}{\partial x} + V\frac{\partial X}{\partial y} + W\frac{\partial X}{\partial z} + \frac{\partial (UX)}{\partial x} + \frac{\partial (VX)}{\partial y} + \frac{\partial (WX)}{\partial z} \right) = \tag{1}$$

$$= \mu_X \Delta X + \frac{\partial}{\partial z}\left(\nu_X \frac{\partial X}{\partial z} \right) + \left(\alpha_0 + \gamma M^j \right) S^j X - \delta X,$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(U\frac{\partial S}{\partial x} + V\frac{\partial S}{\partial y} + W\frac{\partial S}{\partial z} + \frac{\partial (US)}{\partial x} + \frac{\partial (VS)}{\partial y} + \frac{\partial (WS)}{\partial z} \right) = \tag{2}$$

$$= \mu_S \Delta S + \frac{\partial}{\partial z}\left(\nu_S \frac{\partial S}{\partial z} \right) - \left(\alpha_0 + \gamma M^j \right) S X^j + B\left(S_p - S \right) + f,$$

$$\frac{\partial M}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(U\frac{\partial M}{\partial x} + V\frac{\partial M}{\partial y} + W\frac{\partial M}{\partial z} + \frac{\partial (UM)}{\partial x} + \frac{\partial (VM)}{\partial y} + \frac{\partial (WM)}{\partial z} \right) = \tag{3}$$

$$= \mu_M \Delta M + \frac{\partial}{\partial z}\left(\nu_M \frac{\partial M}{\partial z} \right) + k_M X^j - \varepsilon M,$$

где X, S, M – концентрация фитопланктона (диатомовой водоросли Sceletonemacostatum), биогенного вещества (азот, фосфор) и метаболита соответственно; $\mathbf{u} = (u,\ v,\ w)$ – вектор скорости водного потока; $\mathbf{U} = \mathbf{u} + \mathbf{u}_{0i}$ – скорость конвективного переноса вещества; $\mathbf{u}_{0i}$ – скорость осаждения i-й субстанции, $i \in \{X, S, M\}$; $\alpha = (\alpha_0 + \gamma M)$ – коэффициент роста фитопланктона; α_0 – скорость роста фитопланктона в отсутствие метаболита; γ – параметр воздействия; $\mu_X, \mu_S, \mu_M, \nu_X, \nu_S, \nu_M$ – диффузионные коэффициенты в горизонтальном и вертикальном направлениях субстанций X, S, M соответственно; C – концентрация солености; $\delta = \delta(C)$ – коэффициент убыли фитопланктона за счет отмирания (удельная смертность), учитывающий влияние солености; B – удельная скорость поступления загрязняющего вещества; S_p – предельно возможная концентрация загрязняющего вещества; $f(x, y, z)$ – функция источника загрязнения; k_M – коэффициент экскреции; ε – коэффициент разложения метаболита; T – температура; $\psi(T,S)$ – коэффициент, учитывающий влияние температуры и концентрации биогенного вещества на рост концентрации фитопланктона.

Пусть n – вектор внешней нормали к поверхности $\sum$, u_n – нормальная по отношению к $\sum$ составляющая вектора скорости водного потока.

К системе (1)–(3) необходимо добавить начальные условия:

$$X(x,y,z,0) = X_0(x,y,z),\ S(x,y,z,0) = S_0(x,y,z),$$
$$M(x,y,z,0) = M_0(x,y,z),\ \mathbf{x} = (\mathrm{x,y,z})^\tau \in \overline{G},\ t = 0 \tag{4}$$

и граничные условия:

$$X = S = M = 0,\ на\ \sigma,\ если\ u_n < 0;$$
$$\frac{\partial X}{\partial n} = 0, \frac{\partial S}{\partial n} = 0, \frac{\partial M}{\partial n} = 0,\ на\ \sigma,\ если\ u_n \ge 0;$$
$$\frac{\partial X}{\partial z} = 0, \frac{\partial S}{\partial z} = 0, \frac{\partial M}{\partial z} = 0,\ на\ \Sigma_0; \tag{5}$$
$$\frac{\partial X}{\partial z} = -\varepsilon_1 X,\ \frac{\partial S}{\partial z} = -\varepsilon_2 S, \frac{\partial M}{\partial z} = -\varepsilon_3 M,\ на\ \Sigma_H,$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ – неотрицательные постоянные, ε_1 – учитывает опускание водорослей на дно и их затопление; $\varepsilon_2, \varepsilon_3$ – учитывают поглощение биогенного вещества и метаболита донными отложениями.

Для модели (1)–(5) входными параметрами являются компоненты вектора скорости водной среды, которые описываются гидродинамической моделью, описанной в работах [4].

Расщепление по физическим процессам для задачи биологической кинетики. Разделим решение задачи (1)–(5) на два этапа. На каждом шаге по времени будем последовательно решать две задачи [5]. Сначала будем решать задачу конвективного переноса (диффузное и источниковое слагаемые опускаются). Затем решается задача диффузии с учетом неконсервативности, но в пренебрежении конвекцией. Выпишем задачи для каждого этапа.

1 этап.

$$\frac{\partial X}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial(UX)}{\partial x} + \frac{\partial(VX)}{\partial y} + \frac{\partial(WX)}{\partial z} + U\frac{\partial X}{\partial x} + V\frac{\partial X}{\partial y} + W\frac{\partial X}{\partial z}\right) = 0,$$
$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial(US)}{\partial x} + \frac{\partial(VS)}{\partial y} + \frac{\partial(WS)}{\partial z} + U\frac{\partial S}{\partial x} + V\frac{\partial S}{\partial y} + W\frac{\partial S}{\partial z}\right) = 0, \tag{6}$$
$$\frac{\partial M}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial(UM)}{\partial x} + \frac{\partial(VM)}{\partial y} + \frac{\partial(WM)}{\partial z} + U\frac{\partial M}{\partial x} + V\frac{\partial M}{\partial y} + W\frac{\partial M}{\partial z}\right) = 0.$$

2 этап.

$$\frac{\partial X}{\partial t} = \mu_X \Delta X + \frac{\partial}{\partial z}\left(\nu_X \frac{\partial X}{\partial z}\right) + \left(\alpha_0 + \gamma M^j\right) S^j X - \delta X,$$
$$\frac{\partial S}{\partial t} = \mu_S \Delta S + \frac{\partial}{\partial z}\left(\nu_S \frac{\partial S}{\partial z}\right) - \left(\alpha_0 + \gamma M^j\right) S X^j + B\left(S_p - S\right) + f, \tag{7}$$
$$\frac{\partial M}{\partial t} = \mu_M \Delta M + \frac{\partial}{\partial z}\left(\nu_M \frac{\partial M}{\partial z}\right) + k_M X^j - \varepsilon M.$$

Запишем систему (6) в операторном виде:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -K\varphi, \text{ где } \varphi \in \{X, S, M\}, \tag{8}$$

$$K\varphi = \frac{1}{2}\left(U\frac{\partial \varphi}{\partial x} + V\frac{\partial \varphi}{\partial y} + W\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial (U\varphi)}{\partial x} + \frac{\partial (V\varphi)}{\partial y} + \frac{\partial (W\varphi)}{\partial z}\right).$$

Запишем систему (7) в операторном виде:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = D_{xy}\varphi + D_z\varphi + g_\varphi(\varphi), \text{ где } \varphi \in \{X, S, M\}, \tag{9}$$

$$g_X(X) = \left(\alpha_0 + \gamma M^j\right)S^j X - \delta X,$$

$$g_S(S) = -\left(\alpha_0 + \gamma M^j\right)SX^j + B\left(S_p - S\right) + f,$$

$$g_M(M) = k_M X^j - \varepsilon M, \; D_{xy}\varphi = \mu_\varphi \Delta\varphi, \; D_z\varphi = \frac{\partial}{\partial z}\left(\nu_\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right).$$

Предположим, что $\varphi(\mathbf{x}, t) \in C^{(4)}(G) \cap C^{(2)}(\bar{G}) \cap C^{(2)}(0 < t \le T)$,

$$g_\varphi(\varphi) \in C^{(2)}(G) \cap C^{(1)}(\bar{G}) \cap C^{(1)}(0 < t \le T).$$

Можно последовательно решать следующие разностные уравнения:

$$\frac{\tilde{\varphi} - \varphi}{\tau} = -K\tilde{\varphi},$$

$$\frac{\hat{\varphi} - \tilde{\varphi}}{\tau} = D_{xy}\hat{\varphi} + D_z\hat{\varphi} + g_\varphi(\hat{\varphi}),$$

где $\varphi \in \{X, S, M\}$, где $\tilde{\varphi}$ – промежуточное значение.

Можно применить явную противопоточную схему для уравнения (8) и явную центрально-разностную схему для (9) – алгоритм вычислений будет выглядеть следующим образом:

$$\frac{\tilde{\varphi} - \varphi}{\tau} = -K\varphi,$$

$$\frac{\hat{\varphi} - \tilde{\varphi}}{\tau} = D_{xy}\tilde{\varphi} + D_z\tilde{\varphi} + g_\varphi(\tilde{\varphi}).$$

Полученные схемы являются аддитивными или схемами расщепления. Они не аппроксимируют исходную систему в точности на каждом из этапов, однако обладают свойством суммарной аппроксимации [6]–[9].

Расщепление по геометрическим переменным для задачи биологической кинетики. Опишем идею метода расщепления по координатам (геометрическим переменным) для задачи вида (8). Запишем нестационарную задачу (8) в виде эволюционного уравнения:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + K\varphi = 0, K = K(t), t > 0 \tag{10}$$

с начальным условием $\varphi(\mathbf{x}, 0) = \varphi_0(\mathbf{x}, t), \mathbf{x} \in \bar{G}$.

Пусть $\mathbf{x} = (x, y, z)^\tau = (x_1, x_2, x_3)^\tau, \mathbf{U} = (U, V, W)^\tau = (U_1, U_2, U_3)^\tau$.

Представим оператор K в виде суммы одномерных операторов

$$K = \sum_{\alpha=1}^{3} K^{(\alpha)}, \; K^{(\alpha)}\varphi = \frac{1}{2}\left(U_\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial \left(U_\alpha \varphi \right)}{\partial x_\alpha} \right).$$

Априорные оценки для дифференциальной задачи. Пусть $H = L_3(\Omega)$ – конечномерное гильбертово пространство со скалярным произведением $(u,w) = \int\limits_\Omega u(x)w(x)dx$, $dx = dx_1 dx_2 dx_3$ для произвольных функций $u(x), w(x)$, обращающихся в нуль на $\partial\Omega$ и нормой $\|u\| \equiv (u,u)^{1/2} = \left(\int\limits_\Omega u^2(x)dx \right)^{1/2}$. В H ищется приближенное решение задачи Коши для эволюционного уравнения первого порядка (10). Покажем, что

$$\left(K\varphi, \varphi \right) = 0, \quad \left(K^{(\alpha)}\varphi, \varphi \right) = 0 \cdot \tag{11}$$

Условие (11) является необходимым для построения устойчивых схем расщепления. $K = \frac{1}{2}(K_1 + K_2)$ – оператор конвективного переноса в симметричной форме, K_1 – в недивергентной форме, K_2 – в дивергентной форме.

Рассмотрим оператор конвективного переноса в различных формах. Принимая во внимание однородные граничные условия, по формуле интегрирования по частям имеем

$$\left(K_1\varphi, w \right) = \sum_{\alpha=1}^{3} \int\limits_\Omega U_\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha} w dx = -\sum_{\alpha=1}^{3} \int\limits_\Omega \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(U_\alpha w \right) \varphi \, dx = -\left(\varphi, K_2 w \right).$$

Тем самым устанавливается сопряженность с точностью до знака операторов конвективного переноса в дивергентной и недивергентной формах друг другу:

$$K_1^* = -K_2 \,. \tag{12}$$

В силу (12) оператор конвективного переноса в симметричной форме будет кососимметричным: $\left(K\varphi, \varphi \right) = 0$; $K = -K^*$.

Нетрудно убедиться, что

$$(K^{(\alpha)}\varphi, \varphi) = 0 \,, \tag{13}$$

так как аналогичные свойства для одномерных операторов сохраняются [10], [11]:

$$K_1^{*(\alpha)} = -K_2^{(\alpha)}; \; K^{(\alpha)} = -K^{*(\alpha)} \,.$$

Экономичные одномерные дискретные задачи (локально-одномерные схемы – ЛОС) второго порядка точности с центральными разностями. Для задачи (10) будем использовать двухциклическое покомпонентное расщепление, дающее второй порядок аппроксимации по времени. Для построения разностных уравнений используются аддитивные схемы с дробными шагами.

В параллелепипеде $\overline{\Omega}$ введем равномерную по всем переменным разностную сетку с шагом h_α, $\alpha \in \{1,2,3\}$. Для сеток по отдельным направлениям x_α, $\alpha \in \{1,2,3\}$ используем обозначения

$\overline{w}_\alpha = \{ x_\alpha \mid x_\alpha = i_\alpha h_\alpha, \quad i_\alpha = 0,1,2,\ldots,N_\alpha, \quad N_\alpha h_\alpha = l_\alpha \}$ – множество всех узлов по направлению x_α, $\alpha \in \{1,2,3\}$,

$w_\alpha = \{x_\alpha \mid x_\alpha = i_\alpha h_\alpha, \quad i_\alpha = 1,2,\ldots,N_\alpha - 1, \quad N_\alpha h_\alpha = l_\alpha\}$ – множество внутренних узлов по направлению $x_\alpha, \quad \alpha \in \{1,2,3\}$. $\overline{w} = w \cup \partial w$.

На отрезке $0 \le t \le T$ введем равномерную сетку по времени с шагом τ

$$\overline{w}_\tau = w_\tau \bigcup \{T\} = \{t_j = j\tau, j = 0,1,\ldots,N_0, \tau N_0 = T\}.$$

Каждый интервал (t_{j-1}, t_j) разобьем на $2p$ частей ($p = 3$), введя промежуточные точки: $t_{j-1+\frac{\alpha}{2p}} = t_j - \tau + \dfrac{\alpha\tau}{2p}, \quad \alpha = 1,2,\ldots,2p$.

Уравнение (10) с учетом аддитивного представления $K = \sum_{\alpha=1}^{3} K^{(\alpha)}$ запишем в виде:

$$\sum_{\alpha=1}^{2p}\left(\frac{1}{2p}\frac{d\varphi}{dt} + K^{(\alpha)}\varphi\right) = 0, \quad t > 0. \tag{14}$$

В соответствии с (14) будем решать последовательно следующие промежуточные задачи. Вспомогательные функции $V^{(\alpha)}, \ \alpha = 1,2,...,2p$ определяются из уравнений:

$$\frac{1}{2p}\frac{dV^{(\alpha)}}{dt} + \frac{1}{2}K^{(\alpha)}V^{(\alpha)} = 0, \alpha = 1,2,\ldots,p, \quad p = 3 \tag{15}$$

$$\frac{1}{2p}\frac{dV^{(\alpha)}}{dt} + \frac{1}{2}K^{(2p+1-\alpha)}V^{(\alpha)} = 0, \tag{16}$$

$$\alpha = p+1, p+2,\ldots,2p, \quad p = 3.$$

Начальные условия для (15), (16) имеют вид

$$V^{(1)}(0) = \varphi_0, \quad V^{(1)}(t_{j-1}) = V^{(2p)}(t_{j-1}),$$

$$V^{(\alpha)}(t_{j-1+(\alpha-1)/2p}) = V^{(\alpha-1)}(t_{j-1+(\alpha-1)/2p}), \quad \alpha = 2,3\ldots,2p, \tag{17}$$

граничные условия:

$$V^{(\alpha)}(t_{j-1+\alpha/2p}) = \mu(x, t_{j-1+\alpha/2p}) = 0, \quad x \in \partial w_\alpha. \tag{18}$$

Системе уравнений (15), (16) поставим в соответствие ЛОС. В качестве производящей возьмем симметричную схему (схему Кранка–Николсона)

$$\frac{y^{j-1+\alpha/2p} - y^{j-1+(\alpha-1)/2p}}{\tau} + K_h^{(\alpha)}\frac{y^{j-1+\alpha/2p} + y^{j-1+(\alpha-1)/2p}}{2} = 0, \tag{19}$$

$$\alpha = 1,2,\ldots,p, \quad p = 3,$$

$$\frac{y^{j-1+\alpha/2p} - y^{j-1+(\alpha-1)/2p}}{\tau} + K_h^{(2p+1-\alpha)}\frac{y^{j-1+\alpha/2p} + y^{j-1+(\alpha-1)/2p}}{2} = 0, \tag{20}$$

$$\alpha = p+1, p+2,\ldots,2p, \quad p = 3, \ j = 1,2\ldots$$

K_h – разностная аппроксимация оператора K.

Начальные условия для каждого из разностных уравнений (19), (20) имеют вид:

$$y^{(1)}(0) = \varphi_0, \quad y^{(1)}(t_{j-1}) = y^{(2p)}(t_{j-1}),$$

$$y^{(\alpha)}(t_{j-1+(\alpha-1)/2p}) = y^{(\alpha-1)}(t_{j-1+(\alpha-1)/2p}), \tag{21}$$
$$\alpha = 2,3,\ldots,2p.$$

К этим уравнениям следует присоединить краевое условие

$$y^{j-1+\alpha/2p} = \mu^{j-1+\alpha/2p} = 0, \quad x \in \partial w_\alpha, \tag{22}$$
$$\alpha = 1,2,\ldots,2p.$$

Граничное условие можно выражать через $\mu(x,t)$, взятое в произвольный момент времени на отрезке $\left[t_{j-1}, t\ \right]$, так что $\mu^{(\alpha)}_{j-1+\frac{\alpha-1}{2p}} = \mu(x, t^{**}_\alpha)$.

Это не отразится на порядке точности []. Будем полагать:

$$\mu_{j-1+\frac{\alpha-1}{2p}} = \mu\left(x, t_{j-\frac{1}{2}}\right); \alpha = 1,2,...,2p.$$

В безындексной форме уравнения (19), (20) с центральными разностями по конвективному переносу будут иметь вид.

Первый цикл

$$\frac{\hat{y}-y}{\tau} + \frac{1}{4}\left[\left(b^{(\alpha)}\hat{y}\right)_{\overset{\circ}{x}_\alpha} + \left(b^{(\alpha)}y\right)_{\overset{\circ}{x}_\alpha} + b^{(\alpha)}\hat{y}_{\overset{\circ}{x}_\alpha} + b^{(\alpha)}y_{\overset{\circ}{x}_\alpha}\right] = 0,$$
$$\alpha = 1,2,\ldots,p, \quad p = 3; \tag{23}$$

$$\frac{\hat{y}-y}{\tau} + \frac{1}{4}\left[\left(b^{(\beta)}\hat{y}\right)_{\overset{\circ}{x}_\beta} + \left(b^{(\beta)}y\right)_{\overset{\circ}{x}_\beta} + b^{(\beta)}\hat{y}_{\overset{\circ}{x}_\beta} + b^{(\beta)}y_{\overset{\circ}{x}_\beta}\right] = 0 \cdot \tag{24}$$
$$\alpha = p+1, p+2,\ldots,2p, \quad p = 3, \quad \beta = 2p+1-\alpha.$$

Данные системы (23), (24) запишем в виде трехточечных уравнений второго порядка. Для определения $y^{j-1+\alpha/2p}$ получаем краевую задачу вида:

$$a_{i_\alpha} y^{j-1+\alpha/2p}_{i_\alpha-1} - c_{i_\alpha} y^{j-1+\alpha/2p}_{i_\alpha} + b_{i_\alpha} y^{j-1+\alpha/2p}_{i_\alpha+1} = -F^{j-1+(\alpha-1)/2p}_\alpha \tag{25}$$

$i_\alpha = 1,2,...,N_\alpha - 1$ по каждому из направлений $x_\alpha, \quad \alpha = 1,2,\ldots,p, \quad p = 3$.

Введем обозначения:

$$y^{j-1+\alpha/2p}_{i_\alpha-1} = y^{j-1+\alpha/2p}(x_\alpha - h_\alpha); \; y^{j-1+\alpha/2p}_{i_\alpha} = y^{j-1+\alpha/2p};$$

$$y^{j-1+\alpha/2p}_{i_\alpha+1} = y^{j-1+\alpha/2p}(x_\alpha + h_\alpha);$$

$$y^{j-1+\alpha/2p}_{i_\beta-1} = y^{j-1+\alpha/2p}(x_\beta - h_\beta); \; y^{j-1+\alpha/2p}_{i_\beta} = y^{j-1+\alpha/2p};$$

$$y^{j-1+\alpha/2p}_{i_\beta+1} = y^{j-1+\alpha/2p}(x_\beta + h_\beta).$$

Тогда система разностных уравнений второго порядка (25) для (19), (20) будет иметь вид:

Первый цикл

$$y^{j-1+\alpha/2p}(x_\alpha - h_\alpha)\left\{\frac{1}{8h_\alpha}\left[b^{(\alpha)}(x_\alpha - h_\alpha) + b^{(\alpha)}\right]\right\} - y^{j-1+\alpha/2p}\left\{\frac{1}{\tau}\right\} +$$

$$+y^{j-1+\alpha/2p}(x_\alpha+h_\alpha)\left\{-\frac{1}{8h_\alpha}\left[b^{(\alpha)}(x_\alpha+h_\alpha)+b^{(\alpha)}\right]\right\}=-F_\alpha^{j-1+(\alpha-1)/2p}, \quad (26)$$

$$\alpha=1,2,\ldots,p, \quad p=3.$$

Второй цикл

$$y^{j-1+\alpha/2p}(x_\beta-h_\beta)\left\{\frac{1}{8h_\beta}\left[b^{(\beta)}(x_\beta-h_\beta)+b^{(\beta)}\right]\right\}-y^{j-1+\alpha/2p}\left\{\frac{1}{\tau}\right\}+$$

$$+y^{j-1+\alpha/2p}(x_\beta+h_\beta)\left\{-\frac{1}{8h_\beta}\left[b^{(\beta)}(x_\beta+h_\beta)+b^{(\beta)}\right]\right\}=-F_\beta^{j-1+(\alpha-1)/2p}, \quad (27)$$

$$\alpha=p+1,\, p+2,\ldots,2p, \quad p=3 \;\; \beta=2p+1-\alpha, \quad p=3,\; j=1,2\ldots,$$

где $F_\alpha^{j-1+(\alpha-1)/2p}=y^{j-1+(\alpha-1)/2p}(x_\alpha-h_\alpha)\left\{\frac{1}{8h_\alpha}\left[b^{(\alpha)}(x_\alpha-h_\alpha)+b^{(\alpha)}\right]\right\}-$

$$-y^{j-1+(\alpha-1)/2p}\left\{-\frac{1}{\tau}\right\}++y^{j-1+(\alpha-1)/2p}(x_\alpha+h_\alpha)\left\{-\frac{1}{8h_\alpha}\left[b^{(\alpha)}(x_\alpha+h_\alpha)+b^{(\alpha)}\right]\right\},$$

$$\alpha=1,2,\ldots,p, \quad p=3,$$

$$F_\beta^{j-1+(\alpha-1)/2p}=y^{j-1+(\alpha-1)/2p}(x_\beta-h_\beta)\left\{\frac{1}{8h_\beta}\left[b^{(\beta)}(x_\beta-h_\beta)+b^{(\beta)}\right]\right\}-$$

$$-y^{j-1+(\alpha-1)/2p}\left\{-\frac{1}{\tau}\right\}+y^{j-1+(\alpha-1)/2p}(x_\beta+h_\beta)\left\{-\frac{1}{8h_\beta}\left[b^{(\beta)}(x_\beta+h_\beta)+b^{(\beta)}\right]\right\},$$

$$\alpha=p+1,\, p+2,\ldots,2p, \quad \beta=2p+1-\alpha, \quad p=3,\; j=1,2\ldots$$

Коэффициенты:

$$a_{i_\alpha}=\frac{1}{8h_\alpha}\left[b^{(\alpha)}(x_\alpha-h_\alpha)+b^{(\alpha)}\right];\; a_{i_\beta}=\frac{1}{8h_\beta}\left[b^{(\beta)}(x_\beta-h_\beta)+b^{(\beta)}\right];$$

$$c_{i_\alpha}=c_{i_\beta}=\frac{1}{\tau};$$

$$b_{i_\alpha}=-\frac{1}{8h_\alpha}\left[b^{(\alpha)}(x_\alpha+h_\alpha)+b^{(\alpha)}\right];\, b_{i_\beta}=-\frac{1}{8h_\beta}\left[b^{(\beta)}(x_\beta+h_\beta)+b^{(\beta)}\right].$$

Каждое из уравнений данной системы (26), (27) решается методом факторизации трехточечных уравнений.

Будем относить коэффициенты $U_\alpha(x,t)$ конвективного переноса по переменной x_α к узлам сетки сдвинутой по этой переменной на полшага.

Погрешность суммарной аппроксимации ЛОС с центральными разностями. Перейдем к изучению погрешности аппроксимации (невязок) ЛОС. Пусть φ^j – решение задачи (10), а y^j – решение задачи (19)–(22). Характеристикой точности ЛОС является разность:

$$z^{j-1}=y^{j-1}-\varphi^{j-1};\, z^{j-1+\frac{\alpha}{2p}}=y^{j-1+\frac{\alpha}{2p}}-\varphi^{j-1+\frac{\alpha}{2p}}, \;\; \alpha=1,2,...,2p.$$

Подставим выражение $y^{j-1+\frac{\alpha}{2p}} = z^{j-1+\frac{\alpha}{2p}} + \varphi^{j-1+\frac{\alpha}{2p}}$ в (19)–(22) и получим для погрешности z^j следующую задачу:

$$\frac{z^{j-1+\frac{\alpha}{2p}} - z^{j-1+\frac{\alpha-1}{2p}}}{\tau} + \frac{1}{2}\lambda^{(\alpha)}\left(z^{j-1+\frac{\alpha}{2p}} + z^{j-1+\frac{\alpha-1}{2p}}\right) = \psi_j^{(\alpha)}, \tag{28}$$

$$\alpha = 1, 2, \ldots, p, \quad p = 3,$$

$$\frac{z^{j-1+\frac{\alpha}{2p}} - z^{j-1+\frac{\alpha-1}{2p}}}{t} + \frac{1}{2}\lambda^{(2p+1-\alpha)}\left(z^{j-1+\frac{\alpha}{2p}} + z^{j-1+\frac{\alpha-1}{2p}}\right) = \psi_j^{(\alpha)}, \tag{29}$$

$$\alpha = p+1,\ p+2, \ldots, 2p, \quad p = 3,\ j = 1, 2\ldots$$

$$z^{j-1+\frac{\alpha}{2p}} = 0 \text{ при } x \in \partial w_\alpha, \tag{30}$$

$$z(x,0) = 0. \tag{31}$$

Для погрешности аппроксимации отдельных уравнений получим:

$$\psi_j^{(\alpha)} = -\frac{\varphi^{j-1+\frac{\alpha}{2p}} - \varphi^{j-1+\frac{\alpha-1}{2p}}}{t} - \frac{1}{2}\lambda^{(\alpha)}\left(\varphi^{j-1+\frac{\alpha}{2p}} + \varphi^{j-1+\frac{\alpha-1}{2p}}\right), \tag{32}$$

$$\alpha = 1, 2, ..., p, \quad p = 3,$$

$$\psi_j^{(\alpha)} = -\frac{\varphi^{j-1+\frac{\alpha}{2p}} - \varphi^{j-1+\frac{\alpha-1}{2p}}}{t} - \frac{1}{2}\lambda^{(2p+1-\alpha)}\left(\varphi^{j-1+\frac{\alpha}{2p}} + \varphi^{j-1+\frac{\alpha-1}{2p}}\right), \tag{33}$$

$$\alpha = p+1,\ p+2, \ldots, 2p, \quad p = 3.$$

Используя разложение в ряд Тейлора:

$$\frac{\varphi^{j-1+\frac{\alpha}{2p}} - \varphi^{j-1+\frac{\alpha-1}{2p}}}{\tau} = \left(\frac{1}{2p}\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{2\tau^2}{6}\left(\frac{1}{4p}\right)^3 \frac{\partial^3\varphi}{\partial t^3}\right)^{j-1+\frac{\alpha-1/2}{2p}} = \frac{1}{2p}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^{j-1+\frac{\alpha-1/2}{2p}} + o(\tau^2),$$

$$\alpha = 1, 2, \ldots, 2p, \quad p = 3.$$

На основании выкладок для уравнений движения:

$$\psi_j^{(\alpha)} = -\frac{\varphi^{j-1+\frac{\alpha}{2p}} - \varphi^{j-1+\frac{\alpha-1}{2p}}}{\tau} - \lambda^{(\alpha)}\left(\frac{\varphi^{j-1+\frac{\alpha}{2p}} + \varphi^{j-1+\frac{\alpha-1}{2p}}}{2}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2p}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^{j-1+\frac{\alpha-1/2}{2p}} - \lambda^{(\alpha)}\varphi^{j-1+\frac{\alpha-1/2}{2p}} + o(\tau^2), \tag{34}$$

$$\alpha = 1, 2, \ldots, p, \quad p = 3,$$

$$\psi_j^{(\alpha)} = -\frac{\varphi^{j-1+\frac{\alpha}{2p}} - \varphi^{j-1+\frac{\alpha-1}{2p}}}{\tau} - \lambda^{(2p+1-\alpha)}\left(\frac{\varphi^{j-1+\frac{\alpha}{2p}} + \varphi^{j-1+\frac{\alpha-1}{2p}}}{2}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2p}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^{j-1+\frac{\alpha-1/2}{2p}} - \lambda^{(2p+1-\alpha)}\varphi^{j-1+\frac{\alpha-1/2}{2p}} + o(\tau^2), \tag{35}$$

$$\alpha = p+1,\ p+2,\ldots,2p, \quad p=3.$$

В свою очередь:

$$-\frac{1}{2p}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^{j-1+\frac{\alpha-1/2}{2p}} - \lambda^{(\alpha)}\varphi^{j-1+\frac{\alpha-1/2}{2p}} = -\frac{1}{2p}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^{j-1/2} - \lambda^{(\alpha)}\varphi^{j-1/2} + o(\tau),$$

$$\alpha = 1, 2,\ldots, p, \quad p=3,$$

$$-\frac{1}{2p}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^{j-1+\frac{\alpha-1/2}{2p}} - \lambda^{(2p+1-\alpha)}\varphi^{j-1+\frac{\alpha-1/2}{2p}} =$$

$$= -\frac{1}{2p}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^{j-1/2} - K^{(2p+1-\alpha)}\varphi^{j-1/2} + o(\tau),$$

$$\alpha = p+1,\ p+2,\ldots,2p, \quad p=3.$$

Представим $\psi_j^{(\alpha)}$ в виде суммы

$$\psi_j^{(\alpha)} = \psi_j^{\circ(\alpha)} + \psi_j^{*(\alpha)} + \psi_j'^{*(\alpha)}, \tag{36}$$

где $\psi_j'^{*(\alpha)}$ – невязка по времени, $\psi_j^{*(\alpha)}$ – невязка по пространственным переменным. Получим

$$\psi_j'^{*(\alpha)} = -\frac{1}{2p}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^{j-1/2} - \lambda^{(\alpha)}\varphi^{j-1/2} + o(\tau^2), \tag{37}$$

$$\alpha = 1, 2,\ldots, p, \quad p=3,$$

$$\psi_j'^{*(\alpha)} = -\frac{1}{p}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^{j-1/2} - \lambda^{(2p+1-\alpha)}\varphi^{j-1/2} + o(\tau^2), \tag{38}$$

$$\alpha = p+1,\ p+2,\ldots,2p, \quad p=3.$$

Найдем невязку $\psi_j^{*(\alpha)}$

$$\lambda^{(\alpha)}\varphi^{j-1/2} = \frac{1}{4h_\alpha}\left\{\left[U_\alpha(x_\alpha + h_\alpha) + U_\alpha\right]\left[\varphi(x_\alpha + h_\alpha)\right]\right\}^{j-1/2} -$$

$$-\frac{1}{4h_\alpha}\left\{\left[U_\alpha(x_\alpha - h_\alpha) + U_\alpha\right]\left[\varphi(x_\alpha - h_\alpha)\right]\right\}^{j-1/2}.$$

Используя разложение в ряд Тейлора:

$$U_\alpha(x_\alpha \pm h_\alpha) = U_\alpha \pm h_\alpha\frac{\partial U_\alpha}{\partial x_\alpha} + \frac{h_\alpha^{\ 2}}{2}\frac{\partial^2 U_\alpha}{\partial x_\alpha^2} \pm \frac{h_\alpha^{\ 3}}{6}\frac{\partial^3 U_\alpha}{\partial x_\alpha^3} + o(h^4),$$

$$\varphi(x_\alpha \pm h_\alpha) = \varphi \pm h_\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha} + \frac{h_\alpha{}^2}{2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\alpha^2} \pm \frac{h_\alpha{}^3}{6}\frac{\partial^3 \varphi}{\partial x_\alpha^3} + o(h^4)\cdot$$

Подставляя эти выражения в $\lambda^{(\alpha)}\varphi^{j-1/2}$, $\lambda^{(2p+1-\alpha)}\varphi^{j-1/2}$ получим

$$\lambda^{(\alpha)}\varphi^{j-1/2} = \left(U_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{2}\varphi\frac{\partial U_\alpha}{\partial x_\alpha}\right)^{j-1/2} +$$

$$+\frac{h_\alpha^2}{4}\frac{\partial U_\alpha}{\partial x_\alpha}\cdot\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\alpha{}^2} + \frac{h_\alpha^2}{4}\frac{\partial^2 U_\alpha}{\partial x_\alpha{}^2}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha} = K^{(\alpha)}\varphi^{j-1/2} + o(|h|^2),$$

$$\alpha = 1, 2, \ldots, p, \quad p = 3,$$

$$\lambda^{(2p+1-\alpha)}\varphi^{j-1/2} = \left(U_\beta \frac{\partial \varphi}{\partial x_\beta} + \frac{1}{2}\varphi\frac{\partial U_\beta}{\partial x_\beta}\right)^{j-1/2} +$$

$$+\frac{h_\beta^2}{4}\frac{\partial U_\beta}{\partial x_\beta}\cdot\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\beta{}^2} + \frac{h_\beta^2}{4}\frac{\partial^2 U_\beta}{\partial x_\beta{}^2}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x_\beta} = K^{(2p+1-\alpha)}\varphi^{j-1/2} + o(|h|^2),$$

$$\alpha = p+1, p+2, \ldots, 2p, \quad p = 3,$$

где $|h|^2 = \sum_{\alpha=1}^{3} h_\beta^2$,

$$\psi_j^{*(\alpha)} = -\frac{1}{2p}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)^{j-1/2} - K^{(\alpha)}\varphi^{j-1/2} + o(|h|^2),$$

$$\alpha = 1, 2, \ldots, p, \quad p = 3, \tag{39}$$

$$\psi_j^{*(\alpha)} = -\frac{1}{2p}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)^{j-1/2} - K^{(2p+1-\alpha)}\varphi^{j-1/2} + o(|h|^2), \tag{40}$$

$$\alpha = p+1, p+2, \ldots, 2p, \quad p = 3.$$

Окончательно имеем:

$$\psi_j^{(\alpha)} = -\frac{1}{2p}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)^{j-1/2} - K^{(\alpha)}\varphi^{j-1/2} + o(\tau^2 + |h|^2), \tag{41}$$

$$\alpha = 1, 2, \ldots, p, \quad p = 3,$$

$$\psi_j^{(\alpha)} = -\frac{1}{2p}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)^{j-1/2} - K^{(2p+1-\alpha)}\varphi^{j-1/2} + o(\tau^2 + |h|^2), \tag{42}$$

$$\alpha = p+1, p+2, \ldots, 2p, \quad p = 3.$$

Обозначим:

$$\psi_j^{\circ(\alpha)} = -\frac{1}{2p}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)^{j-1/2} - K^{(\alpha)}\varphi^{j-1/2}, \ \alpha = 1, 2, \ldots, p \tag{43}$$

$$\psi_j^{\circ(\alpha)} = -\frac{1}{2p}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)^{j-1/2} - K^{(2p+1-\alpha)}\varphi^{j-1/2}, \tag{44}$$

$$\alpha = p+1, p+2, \ldots, 2p, \quad p = 3.$$

Получим на основании (14):

$$\sum_{\alpha=1}^{2p} \psi_j^{\circ(\alpha)} = 0 \,. \tag{45}$$

Отсюда имеем суммарную погрешность аппроксимации:

$$\sum_{\alpha=1}^{2p} \psi_j^{(\alpha)} = o(\tau^2 + |h|^2) \,. \tag{46}$$

Выводы. Проведено расщепление начально-краевой задачи – упрощенных уравнений динамики фитопланктона по физическим процессам и по координатам [12], [13]. Исследование суммарных погрешностей аппроксимации ЛОС для уравнения конвекции-диффузии, ЛОС с центральными разностями по конвективному переносу показало, что они имеют второй порядок аппроксимации по пространству, однако не являются безусловно монотонными.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Сухинов А.И, Никитина А.В.* Математическое моделирование и экспедиционные исследования качества вод в Азовском море // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2011. – № 8 (121). – С. 62-73.
2. *Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Алексеенко Е.В.* Численная реализация трехмерной модели гидродинамики для мелководных водоемов на супервычислительной системе // Математическое моделирование. – 2011. – Т. 23, № 3. – С. 3-21.
3. *Никитина А.В.* Модели биологической кинетики, стабилизирующие экологическую систему Таганрогского залива // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2009. – № 8 (97). – С. 130-134.
4. *Никитина А.В.* Численное решение задачи динамики токсичных водорослей в Таганрогском заливе // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2010. – № 6 (107). – С. 113-117.
5. *Сухинов А.И.* Двумерные схемы расщепления и некоторые их приложения. – М.: МАКС Пресс. – 2005. – 408 с.
6. *Sukhinov A.I., Sukhinov A.A.* Reconstruction 0f 2001 Ecological Disaster in the Azov Sea on the Basis of Precise Hydrophysics Models. Parallel Computational Fluid Dynamics, Mutidisciplinary Applications, Prcoceedings of Parallel CFD 2004 Conference, Las Palmas de Gran Canaria, Spain, ELSEVIER, Amsterdam-Berlin-London-New York-Tokyo, 2005. – P. 231-238.
7. *Никитина А.В.* Модели биологической кинетики, стабилизирующие экологическую систему Таганрогского залива // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2009. – № 8 (97) . – С. 130-134.
8. *Никитина А.В., Третьякова М.В.* Моделирование процесса альголизации мелководного водоема путем вселения в него штамма зеленой водоросли Chlorellavulgarisbin // Известия ЮФУ. – 2012. – № 1 (126). – С. 128-133.
9. *Чистяков А.Е.* Теоретические оценки ускорения и эффективности параллельной реализации ПТМ скорейшего спуска // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2010. – № 6 (107). – С. 237-249.
10. *Сухинов А.И., Никитина А.В., Чистяков А.Е.* Моделирование сценария биологической реабилитации Азовского моря // Математическое моделирование. – 2012. – Т. 24, № 9. – С. 3-21.
11. *Сухинов А.И., Никитина А.В., Чистяков А.Е., Семенов И.С.* Математическое моделирование условий формирования заморов в мелководных водоемах на многопроцессорной вычислительной системе // Вычислительные методы и программирование. – 2013. – Т. 14. – С. 103-112.
12. *Никитина А.В., Семенов И.С.* Параллельная реализация модели динамики токсичной водоросли в Азовском море с применением многопоточности в операционной системе Windows // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2013. – № 1 (138). – С. 130-135.

13. *Никитина А.В., Чистяков А.Е., Фоменко Н.А.* Применение адаптивного модифицированного попеременно-треугольного итерационного метода для численной реализации двумерной математической модели движения водной среды // Электронный научно-инновационный журнал. Инженерный вестник Дона. – 2012. – С. 4.

Статью рекомендовал к опубликованию д.т.н., профессор Я.Е. Ромм.

Никитина Алла Валерьевна – Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Южный федеральный университет»; e-mail: nikitina.vm@gmail.com; 347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44; тел.; 89515168538; кафедра высшей математики; к. ф. - м. н.; доцент.

Камышникова Татьяна Владимировна – e-mail: kam.vm@gmail.com; тел.; 88634615118; кафедра высшей математики; к. т. н.; доцент.

Семенов Илья Сергеевич – e-mail: flanker555@yandex.ru; тел.: 89085029807; кафедра высшей математики; аспирант.

NikitinaAllaValer`evna – Federal State-Owned Autonomy Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”; e-mail: nikitina.vm@gmail.com; 44, Nekrasovskiy, Taganrog, 347928, Russia; phone: +79515168538; the department of higher mathematics; cand. of pthis.-math. sc. associate professor.

KamishnikovaTat`yanaVladimirovna– e-mail: kam.vm@gmail.com; phone: 88634615118; the department of higher mathematics; cand. of tex. sc. associate professor.

Semenov IlyaSergeevich – e-mail: flanker555@yandex.ru; phone: +79085029807; the department of higher mathematics; postgraduate student.

УДК 518.5.001.57

И.А. Ляпунова

ОБ ОДНОЙ ДЕМОГЕНЕТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ АДАПТАЦИИ НАСЕКОМЫХ К ИЗМЕНЕНИЮ КОРМОВОЙ БАЗЫ

Среди множества математических моделей типа «хищник-жертва» особое место занимают демогенетические модели. Цель данной работы: построение математической модели адаптации насекомых – вредителей к изменению кормовой базы – растительного ресурса в соответствии с предположением об изменении динамики их поведения в зависимости от таксиса. В работе вводится гипотеза о том, что динамика роста насекомых – вредителей меняется в зависимости от вида их деятельности в конкретный момент времени – кормятся они, либо размножаются. Согласно данному предположению рассматриваются случаи быстрого и медленного таксиса; учитывается зависимость распределения растительного ресурса, а значит, и распределение вредителей от вида таксиса.

Вредитель; плотность биомассы; динамическая устойчивость (неустойчивость).

I.A. Lyapunova

SOME DEMO GENETIC MODEL ADAPTATION OF INSECTS A CHANGE IN PREY

Among the many mathematical models of the "predator-prey" special place – in the demo genetic models. The aim of this work: the construction of mathematical models of adaptation of insects – pests change prey – vegetation in accordance with the suggestion to change the dynamics of their behavior depending on the taxis. This paper introduces the hypothesis that the dynamics of