13. *Никитина А.В., Чистяков А.Е., Фоменко Н.А.* Применение адаптивного модифицированного попеременно-треугольного итерационного метода для численной реализации двумерной математической модели движения водной среды // Электронный научно-инновационный журнал. Инженерный вестник Дона. – 2012. – С. 4.

Статью рекомендовал к опубликованию д.т.н., профессор Я.Е. Ромм.

Никитина Алла Валерьевна – Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Южный федеральный университет»; e-mail: nikitina.vm@gmail.com; 347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44; тел.; 89515168538; кафедра высшей математики; к. ф. - м. н.; доцент.

Камышникова Татьяна Владимировна – e-mail: kam.vm@gmail.com; тел.; 88634615118; кафедра высшей математики; к. т. н.; доцент.

Семенов Илья Сергеевич – e-mail: flanker555@yandex.ru; тел.: 89085029807; кафедра высшей математики; аспирант.

NikitinaAllaValer`evna – Federal State-Owned Autonomy Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”; e-mail: nikitina.vm@gmail.com; 44, Nekrasovskiy, Taganrog, 347928, Russia; phone: +79515168538; the department of higher mathematics; cand. of pthis.-math. sc. associate professor.

KamishnikovaTat`yanaVladimirovna– e-mail: kam.vm@gmail.com; phone: 88634615118; the department of higher mathematics; cand. of tex. sc. associate professor.

Semenov IlyaSergeevich – e-mail: flanker555@yandex.ru; phone: +79085029807; the department of higher mathematics; postgraduate student.

УДК 518.5.001.57

И.А. Ляпунова

ОБ ОДНОЙ ДЕМОГЕНЕТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ АДАПТАЦИИ НАСЕКОМЫХ К ИЗМЕНЕНИЮ КОРМОВОЙ БАЗЫ

Среди множества математических моделей типа «хищник-жертва» особое место занимают демогенетические модели. Цель данной работы: построение математической модели адаптации насекомых – вредителей к изменению кормовой базы – растительного ресурса в соответствии с предположением об изменении динамики их поведения в зависимости от таксиса. В работе вводится гипотеза о том, что динамика роста насекомых – вредителей меняется в зависимости от вида их деятельности в конкретный момент времени – кормятся они, либо размножаются. Согласно данному предположению рассматриваются случаи быстрого и медленного таксиса; учитывается зависимость распределения растительного ресурса, а значит, и распределение вредителей от вида таксиса.

Вредитель; плотность биомассы; динамическая устойчивость (неустойчивость).

I.A. Lyapunova

SOME DEMO GENETIC MODEL ADAPTATION OF INSECTS A CHANGE IN PREY

Among the many mathematical models of the "predator-prey" special place – in the demo genetic models. The aim of this work: the construction of mathematical models of adaptation of insects – pests change prey – vegetation in accordance with the suggestion to change the dynamics of their behavior depending on the taxis. This paper introduces the hypothesis that the dynamics of *growth of insects – pests varies according to the type of activity at a time – they are feeding or breeding. Under this assumption, we consider the cases of fast and slow taxis; taken into account the dependence of the distribution of plant resources, and hence the distribution of the pest on the type of taxis.*

Transgene corn; biomass density; dynamic stability (instability).

Введение. В последние десятилетия научные организации все больше внимания стали уделять исследованиям современных и ожидаемых антропогенных изменений в различных естественных и искусственных биоценозах [11]. Как известно, особи изменяют свою скорость, в зависимости от качества и близости кормового пятна. В частности, в моделях сообщества хищник-жертва ускорение движения хищника определяется неоднородностью распределения плотности жертв [1]. Тем не менее, в современных демогенетических моделях влияние популяционного таксиса не отражается [2].

Используемые на сегодняшний день модельные подходы для трансгенных видов культур и их вредителей базируются на модифицированной демогенетической модели Костицына, дающей описание динамики конкурирующих генотипов вредителя на основе уравнений Лотки–ольтерра. Одними из наиболее успешных моделей являются двухуровневые демогенетические модели «растительный ресурс – вредитель» и «вредитель – паразитоид», предложенные Жадановской Е.А. [3]. Но они не учитывают направления движения хищников в различные периоды роста и развития вредителей.

В демогенетических моделях, где количество насекомых – вредителей прямо пропорционально градиенту роста растительного ресурса [4, 5], также не учитывается ряд важных биологических особенностей «летучих» вредителей, таких как периоды поедания растительного ресурса и размножения. Например, самый распространенный вредитель кукурузы – кукурузный мотылек, не питаясь, может пролететь несколько километров. От половой принадлежности многих видов насекомых – вредителей зависит и скорость их передвижения. Вследствие последних замечаний, современные модели и программные комплексы [8] не вполне адекватно описывают и прогнозируют динамику роста растительного ресурса и его вредителей.

Построение модели. Рассмотрим распределение заданной агрокультуры на некотором одномерном физическом пространстве Ω. Пусть $R=R(x,t)$ – прирост биомассы кукурузы; r_R – мальтузианский коэффициент прироста. Уравнение динамики плотности биомассы:

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \delta_R \Delta R + r_R R(1 - \frac{R}{K_R}) - aRN, \tag{1}$$

$$r_R = r_R + g(x, y, t)$$

Здесь $g(x,y,t)$ – функция, учитывающая плодородие конкретного участка.

Демогенетические модели предполагают наличие двух видов растительных ресурсов – обычного и трансгенного:

$$R = R_1 + R_2, \tag{2}$$

где $R_1 = \alpha(x, y)R$ – начальная биомасса растительного ресурса обычного вида, $R_2 = \left(1 - \alpha(x, y)\right)R$ – начальная биомасса растительного ресурса трансгенного вида.

Тогда прирост биомассы для обоих видов растений с учетом диффузии [6, 7] осуществляется по формулам:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial R_1}{\partial t} = \delta_R \Delta R_1 + r_R R_1 (1 - \dfrac{R}{K_R}) - a R_1 N; \\ \dfrac{\partial R_2}{\partial t} = \delta_R \Delta R_2 + r_R R_2 (1 - \dfrac{R}{K_R}) - a R_2 N_{rr}. \end{cases} \tag{3}$$

Введем функции f_{ij}, где i,j принимают значения генотипов ss, rs, ss.

$$f_{ij}: \begin{cases} f_{ss}\left(N_{ss}, N_{sr}, N_{rr}\right) = W_{ss} \dfrac{1}{N} \left(N_{ss} + \dfrac{N_{rs}}{2} \right)^2; \\ f_{sr}\left(N_{ss}, N_{sr}, N_{rr}\right) = W_{rs} \dfrac{2}{N} \left(N_{ss} + \dfrac{N_{rs}}{2} \right) \left(\dfrac{N_{rs}}{2} + N_{rr} \right); \\ f_{rr}\left(N_{ss}, N_{rs}, N_{rr}\right) = W_{rr} \dfrac{1}{N} \left(\dfrac{N_{rs}}{2} + N_{rr} \right)^2, \end{cases} \tag{4}$$

где $K_R = (b - \mu)/\alpha$; K_R – емкость среды; δ_R, – коэффициент диффузии растительного ресурса, f_{ij} определяют пропорции распределения потомства вредителя по трем рассматриваемым генотипам ij (2.6); n – внешняя нормаль к границе $\partial\Omega$; Ω – ареал вредителя; $N_{ij} = N_{ij}(\mathbf{x}, y, t)$ – плотность генотипа ij в точке $(\mathbf{x}, y) \in \Omega$ в момент времени t ($i, j = r$ или s); N_{ss}, N_{rs}, N_{rr} – плотности соответствующих генотипов вредителя.

$$N = N_{ss} + N_{rs} + N_{rr} \tag{5}$$

– общая плотность популяции.

Рассмотрим теперь уравнения динамики вредителей:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial N_{ss}}{\partial t} + \nabla(N_{ss} v_{ss}) = \delta \Delta N_{ss} + eaRW_{ss} \dfrac{1}{N} (N_{ss} + \dfrac{N_{rs}}{2})^2 - \mu N_{ss}; \\ \dfrac{\partial N_{rs}}{\partial t} + \nabla(N_{rs} v_{rs}) = \delta \Delta N_{rs} + eaRW_{rs} \dfrac{2}{N} (N_{ss} + \dfrac{N_{rs}}{2})(N_{rr} + \dfrac{N_{rs}}{2}) - \mu N_{rs}; \\ \dfrac{\partial N_{rr}}{\partial t} + \nabla(N_{rr} v_{rr}) = \delta \Delta N_{rr} + eaRW_{rr} \dfrac{1}{N} (N_{rr} + \dfrac{N_{rs}}{2})^2 - \mu N_{rr}; \end{cases} \tag{6}$$

Активность вредителей определяется суммой плотностей двух видов насекомых-вредителей:

$$N = N^{(1)} + N^{(2)}, \tag{7}$$

где $N^{(1)}$ и $N^{(2)}$ – плотности вредителей в активном и пассивном состоянии соответственно. С учетом (7) система (6) для пассивного поведения вредителей перепишется в виде системы (8):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial N_{ss}^{(1)}}{\partial t} + \nabla(N_{ss}^{(1)} v_{ss}^{(1)}) = \\ = \delta^{(1)} \Delta N_{ss}^{(1)} + eaR_1 W_{ss} \dfrac{1}{N^{(2)}} \left(N_{ss}^{(2)} + \dfrac{N_{rs}^{(2)}}{2} \right)^2 - \mu N_{ss}^{(1)} - \beta_1 R_1 N_{ss}^{(1)} + \beta_2 N_{ss}^{(2)}; \\ \dfrac{\partial N_{rs}^{(1)}}{\partial t} + \nabla(N_{rs}^{(1)} v_{rs}^{(1)}) = \\ = \delta^{(1)} \Delta N_{rs}^{(1)} + eaR_1 W_{rs} \dfrac{2}{N^{(2)}} \left(N_{ss}^{(2)} + \dfrac{N_{rs}^{(2)}}{2} \right)\left(N_{rr}^{(2)} + \dfrac{N_{rs}^{(2)}}{2} \right) - \mu N_{rs}^{(1)}; \\ \dfrac{\partial N_{rr}^{(1)}}{\partial t} + \nabla(N_{rr}^{(1)} v_{rr}^{(1)}) = \\ = \delta^{(1)} \Delta N_{rr}^{(1)} + eaRW_{rr} \dfrac{1}{N^{(2)}} \left(N_{rr}^{(2)} + \dfrac{N_{rs}^{(2)}}{2} \right)^2 - \mu N_{rr}^{(1)} - \beta_1 R N_{rr}^{(1)} + \beta_2 N_{rr}^{(2)}. \end{cases} \tag{8}$$

В активном состоянии, учитывая, что вредитель, неустойчивый к яду, поедает только обычный вид растительного ресурса (не трансгенную агрокультуру), получаем следующую систему уравнений (9):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial N_{ss}^{(2)}}{\partial t} + \nabla(N_{ss}^{(2)} v^{(2)}) = \delta^{(2)} \Delta N_{ss}^{(2)} - \mu N_{ss}^{(2)} + \beta_1 (R_1) N_{ss}^{(1)} - \beta_2 N_{ss}^{(2)}; \\ \dfrac{\partial N_{rs}^{(2)}}{\partial t} + \nabla(N_{rs}^{(2)} v^{(2)}) = \delta^{(2)} \Delta N_{rs}^{(2)} - \mu N_{rs}^{(2)} + \beta_1 (R_1) N_{rs}^{(1)} - \beta_2 N_{rs}^{(2)}; \\ \dfrac{\partial N_{rr}^{(2)}}{\partial t} + \nabla(N_{rr}^{(2)} v^{(2)}) = \delta^{(2)} \Delta N_{rr}^{(2)} - \mu N_{rr}^{(2)} + \beta_1 (R) N_{rr}^{(1)} - \beta_2 N_{rr}^{(2)}. \end{cases} \tag{9}$$

Медленный таксис в пассивном состоянии для трех видов насекомых-вредителей описывается следующими уравнениями (10):

$$\begin{cases} v_{ss}^{(1)} + \alpha \left(\dfrac{\partial v_{ss}^{(1)}}{\partial t} + \nabla(N_{ss}^{(1)} v_{ss}^{(1)}) \right) = \Delta v_{ss}^{(1)} k^{(1)} + \delta_v^{(1)} \nabla R_1; \\ v_{rs}^{(1)} + \alpha \left(\dfrac{\partial v_{rs}^{(1)}}{\partial t} + \nabla(N_{rs}^{(1)} v_{rs}^{(1)}) \right) = \delta_v^{(1)} \Delta v_{rs}^{(1)} + k^{(1)} \nabla R_1; \\ v_{rr}^{(1)} + \alpha \left(\dfrac{\partial v_{rr}^{(1)}}{\partial t} + \nabla(N_{rr}^{(1)} v_{rr}^{(1)}) \right) = \delta_v^{(1)} \Delta v_{rr}^{(1)} + k^{(1)} \nabla R. \end{cases} \tag{10}$$

Быстрый таксис в активном состоянии описывается одним уравнением для насекомых-вредителей, устойчивых к яду (11):

$$v^{(2)} = k^{(2)} \nabla N^{(2)} + \delta_v^{(2)} \Delta v^{(2)}. \tag{11}$$

Во всех случаях границы области предполагаем непроницаемыми:

$$(\nabla N_{ij}, n) = 0,\ (\nabla v_i, n) = 0,\ (x, y) \in \partial\Omega.$$

Заключение. Как видим, гипотеза об изменении плотности насекомых – вредителей в направлении градиента биомассы растительного ресурса не достаточна. Простое предположение об изменении динамики насекомых-вредителей в соответствии с биологическими потребностями ведет к значительному изменению демогенетических моделей, а, следовательно, возникает необходимость в разработке новых методов исследования модели, программных продуктов по их численной реализации.

Гипотезы о пятнистости распределения растительного ресурса и, соответственно, насекомых – вредителей, а также учете запаздывания [4, 5, 8] вследствие сделанных предположений требует нового рассмотрения и исследования, так как в зависимости от вида таксиса распределение будет различным [9, 10].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Фрисман Е.Я.* Изменение характера динамики численности популяции: механизмы перехода к хаосу // Вести. ДВО РАН. – 1995. – № 4. – Р. 97-106.
2. *Нахушев А.М.* Уравнения математической биологии. – М.: Высшая школа, 1995.
3. *Жадановская Е.А., Тютюнов Ю.В., Ардити Р.* Моделирование стратегии "высокая доза – убежище" при использовании генетически модифицированной кукурузы для подавления кукурузного стеблевого мотылька // Известия вузов, Сев.-Кав. регион. Естественные науки, 2006. – Приложение, № 11. – 5 с.
4. *Кажарова И.А.* Мозаичная структура распределенного сообщества трансгенной кукурузы // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2009. – № 8 (97). – С. 148-155.
5. *Ляпунова И.А.* Устойчивость модели пространственного распределения кукурузы вследствие процессов запаздывания // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2010. – № 6 (107). – С. 126-131.
6. *Сухинов А.И., Никитина А.В.* Математическое моделирование и экспедиционные исследования качества вод в Азовском море // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2011. – № 8 (121). – С. 62-73.
7. *Сухинов А. И., Чистяков А. Е., Бондаренко Ю. С.* Оценка погрешности решения уравнения диффузии на основе схем с весами // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2011. – № 8 (121). – С. 6-13.
8. *Ляпунова И.А.* Разработка программного комплекса прогнозирования урожая кукурузы // Сборник научных трудов Sworld по материалам международной научно-практической конференции. – 2012. – Т. 4, № 2. – С. 11-12.
9. *Сухинов А.И., Никитина А.В., Чистяков А.Е.* Моделирование сценария биологической реабилитации Азовского моря // Математическое моделирование. – 2012. – Т. 24, № 9. – С. 3-21.
10. *Сухинов А.И., Чистяков А.Е.* Параллельная реализация трехмерной модели гидродинамики мелководных водоемов на супервычислительной системе // Вычислительные методы и программирование: новые вычислительные технологии. – 2012. – Т. 13, № 1. – С. 290-297.
11. *Камышникова Т.В., Афонин А.А., Дурягина В.В.* Вывод двумерной модели распространения загрязняющих примесей в водохранилище // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2009. – № 5 (94). – С. 12-18.

Статью рекомендовал к опубликованию д.т.н., профессор Я.Е. Ромм.

Ляпунова Ирина Артуровна – Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Южный федеральный университет»; e-mail: ialyapunova@sfedu.ru; г. Таганрог, ул. Урицкого, 16/25; тел.: +79034319926; кафедра высшей математики; ассистент.

Lyapunova Irina Arturovna – Federal State-Owned Autonomy Educational Establishment of Higher Vocational Education "Southern Federal University"; e-mail: ialyapunova@sfedu.ru; 16/25, Uricki street, Taganrog, Russia; phone: +79034319926; the department of higher mathematics; assistant.