УДК 330.43

В.С. Васильев

МОДИФИКАЦИЯ МЕТОДА МОМЕНТОВ ДЛЯ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛЕЙ БОКСА–ДЖЕНКИНСА*

Модели Бокса–Дженкинса авторегрессии и скользящего среднего стали со времени своего появления стандартным инструментом анализа временных рядов. В методе моментов параметры авторегрессионной компоненты оцениваются из расширенных уравнений Юла–Уолкера. Решение получающейся линейной системы уравнений на практике проблем не вызывает. Решение методом Ньютона нелинейной системы уравнений для оценки параметров компоненты скользящего среднего, напротив, представляет проблему, на которую указывали сами авторы. В статье предлагается и исследуется итерационная процедура для решения нелинейной системы метода моментов. Получены условия сходимости итерационного процесса, показывающие влияние самих значений параметров на скорость сходимости.

Эконометрика; модели временных рядов; прогнозирование; уравнения Юла–Уолкера; модели Бокса–Дженкинса; метод моментов; сходимость итерационных процессов.

V.S. Vasiliev

MODIFICATION OF THE METHOD OF MOMENTS FOR ESTIMATION PARAMETERS OF THE BOX–JENKINS MODELS

The autoregressive and moving average models by Box and Jenkins become since time of its appearance a standard instrument of analysis of time series. In the method of moments autoregressive component parameters are valued from extended Yule-Wolker equations. The decision of this linear system of equations in practice problems does not cause. The decision of nonlinear system equations for estimation moving average component parameters by method Newton, opposite, presents the problem, on which indicated authors themselves. In article is offered and researched iterative procedure for decision of the nonlinear system of the method of moments. Condition to convergence iterative process are received, showing influence values parameter themselves on velocity of convergence.

Econometrics; time series models; forecasting; Yule–Walker equations; Box–Jenkins models; method of moments; convergence iterative processes.

Пусть стационарному временному ряду $\{y_k\}$ адекватна модель $ARMA(p,q)$ Бокса–Дженкинса (*AutoRegressive and Moving Average Model*) [1]

$$p_k = \delta + \varphi_1 y_{k-1} + \varphi_2 y_{k-2} + \ldots + \varphi_p y_{k-p} - \theta_1 \varepsilon_{k-1} - \theta_2 \varepsilon_{k-2} - \ldots - \theta_q \varepsilon_{k-q},$$

где p_k – прогноз значения y_k, $k = \ldots$; 1; 2;… временного ряда; $\varepsilon_k = y_k - p_k$ – ошибка прогноза; φ_i, $1 \le i \le p$ и θ_j, $1 \le j \le q$ – параметры авторегрессионной компоненты и компоненты скользящего среднего соответственно; $\delta = \left(1 - \varphi_1 - \ldots - \varphi_p\right)\bar{y}$; $\bar{y}$ – среднее значение временного ряда. Относительно остатков ε_k предполагается их некоррелированность между собой (для различных k) и их некоррелированность со значениями ряда y_j (для $j < k$).

Метод моментов оценки параметров модели состоит в следующем. Параметры φ_i, $1 \le i \le p$ авторегрессионной компоненты модели оцениваются из расширенных уравнений Юла – Уолкера:

* Работа поддержана грантом РФФИ № 13-01-00530А_2013.

$$\sigma_{q+1} = \operatorname{cov}\left(y_k, y_{k-1}\right) = \sigma_q \varphi_1 + \sigma_{q-1}\varphi_2 + \ldots + \sigma_{q-p+1}\varphi_p,$$
$$\sigma_{q+2} = \operatorname{cov}\left(y_k, y_{k-2}\right) = \sigma_{q+1} \varphi_1 + \sigma_{q}\varphi_2 + \ldots + \sigma_{q-p+2}\varphi_p,$$
$$\ldots,$$
$$\sigma_{q+p} = \operatorname{cov}\left(y_k, y_{k-p}\right) = \sigma_{q+p-1} \varphi_1 + \sigma_{q+p-2}\varphi_2 + \ldots + \sigma_{q}\varphi_p,$$

где $\sigma_l = \operatorname{cov}(y_k, y_{k\pm l})$, $l = 0;1;\ldots$ – коэффициент автоковариации лага l значений ряда. Решение полученной системы на практике проблем не вызывает.

После оценки φ_i, $1 \le i \le p$, могут быть оценены параметры θ_j, $1 \le j \le q$ компоненты скользящего среднего. Рассмотрим временной ряд

$$\begin{aligned} z_k &= y_k - \delta - \varphi_1 y_{k-1} - \varphi_2 y_{k-2} - \ldots - \varphi_p y_{k-p} = \\ &= \varepsilon_k - \theta_1 \varepsilon_{k-1} - \theta_2 \varepsilon_{k-2} - \ldots - \theta_q \varepsilon_{k-q} \end{aligned}.$$

С одной стороны, для оценки параметров θ_j, $1 \le j \le q$ получаем систему

$$\varsigma_0 = \operatorname{cov}\left(z_k, z_k\right) = \sigma_\varepsilon^2 + \theta_1^2\sigma_\varepsilon^2 + \theta_2^2\sigma_\varepsilon^2 + \theta_3^2\sigma_\varepsilon^2 + \ldots + \theta_{q-1}^2\sigma_\varepsilon^2 + \theta_q^2\sigma_\varepsilon^2,$$
$$\varsigma_1 = \operatorname{cov}\left(z_k, z_{k-1}\right) = -\theta_1\sigma_\varepsilon^2 + \theta_1\theta_2\sigma_\varepsilon^2 + \theta_2\theta_3\sigma_\varepsilon^2 + \ldots + \theta_{q-2}\theta_{q-1}\sigma_\varepsilon^2 + \theta_{q-1}\theta_q\sigma_\varepsilon^2,$$
$$\varsigma_2 = \operatorname{cov}\left(z_k, z_{k-2}\right) = -\theta_2\sigma_\varepsilon^2 + \theta_1\theta_3\sigma_\varepsilon^2 + \theta_2\theta_4\sigma_\varepsilon^2 + \ldots + \theta_{q-3}\theta_{q-1}\sigma_\varepsilon^2 + \theta_{q-2}\theta_q\sigma_\varepsilon^2,$$
$$\ldots,$$
$$\varsigma_{q-1} = \operatorname{cov}\left(z_k, z_{k-q+1}\right) = -\theta_{q-1}\sigma_\varepsilon^2 + \theta_1\theta_q\sigma_\varepsilon^2,$$
$$\varsigma_q = \operatorname{cov}\left(z_k, z_{k-q}\right) = -\theta_q\sigma_\varepsilon^2,$$

где $\sigma_\varepsilon^2 = \operatorname{cov}\left(\varepsilon_k, \varepsilon_k\right)$. С другой стороны, компоненты правой части являются полиномиальными формами второго порядка полученных оценок φ_i, $1 \le i \le p$:

$$\varsigma_l = \operatorname{cov}\left(z_k, z_{k-l}\right) = \sigma_l - \sum_{i=1}^{p} \varphi_i \sigma_{|l-i|} - \sum_{j=1}^{p} \varphi_j \sigma_{|l+j|} + \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{p} \varphi_j \varphi_i \sigma_{|l-i+j|} = \left(\mathbf{\Sigma}_l \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\varphi}\right),$$

где $\boldsymbol{\varphi} = \begin{pmatrix} 1 & -\varphi_1 & -\varphi_2 & \cdots & -\varphi_p \end{pmatrix}^T$,

$$\mathbf{\Sigma}_l = \begin{pmatrix} \sigma_l & \sigma_{l+1} & \sigma_{l+2} & \cdots & \sigma_{l+p} \\ \sigma_{|l-1|} & \sigma_l & \sigma_{l+1} & \cdots & \sigma_{l+p-1} \\ \sigma_{|l-2|} & \sigma_{|l-1|} & \sigma_l & \cdots & \sigma_{l+p-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{|l-p|} & \sigma_{|l-p+1|} & \sigma_{|l-p+2|} & \cdots & \sigma_l \end{pmatrix}, \ 0 \le l \le q.$$

В методе моментов после перехода к переменным $\tau_0 = \sigma_\varepsilon$, $\tau_i = -\theta_i \sigma_\varepsilon$, $1 \le i \le p$, система

$$\tau_0^2 + \tau_1^2 + \tau_2^2 + \ldots + \tau_{q-1}^2 + \tau_q^2 = \varsigma_0,$$
$$\tau_0\tau_1 + \tau_1\tau_2 + \tau_2\tau_3 + \ldots + \tau_{q-2}\tau_{q-1} + \tau_{q-1}\tau_q = \varsigma_1,$$

$$\tau_0\tau_2 + \tau_1\tau_3 + \tau_2\tau_4 + \ldots + \tau_{q-3}\tau_{q-1} + \tau_{q-2}\tau_q = \varsigma_2,$$
$$\ldots,$$
$$\tau_0\tau_{q-1} + \tau_1\tau_q = \varsigma_{q-1},$$
$$\tau_0\tau_q = \varsigma_{q-1}$$

разрешается итерационной схемой (методом Ньютона)

$$\begin{pmatrix}
\tau_0^{(s)}+\tau_0^{(s)} & \tau_1^{(s)}+\tau_1^{(s)} & \tau_2^{(s)}+\tau_2^{(s)} & \cdots & \tau_{q-2}^{(s)}+\tau_{q-2}^{(s)} & \tau_{q-1}^{(s)}+\tau_{q-1}^{(s)} & \tau_q^{(s)}+\tau_q^{(s)} \\
\tau_1^{(s)} & \tau_2^{(s)}+\tau_0^{(s)} & \tau_3^{(s)}+\tau_1^{(s)} & \cdots & \tau_{q-1}^{(s)}+\tau_{q-3}^{(s)} & \tau_q^{(s)}+\tau_{q-2}^{(s)} & \tau_{q-1}^{(s)} \\
\tau_2^{(s)} & \tau_3^{(s)} & \tau_4^{(s)}+\tau_0^{(s)} & \cdots & \tau_q^{(s)}+\tau_{q-4}^{(s)} & \tau_{q-3}^{(s)} & \tau_{q-2}^{(s)} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\
\tau_{q-2}^{(s)} & \tau_{q-1}^{(s)} & \tau_q^{(s)} & & \tau_0^{(s)} & \tau_1^{(s)} & \tau_2^{(s)} \\
\tau_{q-1}^{(s)} & \tau_q^{(s)} & & & & \tau_0^{(s)} & \tau_1^{(s)} \\
\tau_q^{(s)} & & & & & & \tau_0^{(s)}
\end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix}
\tau_0^{(s+1)} - \tau_0^{(s)} \\
\tau_1^{(s+1)} - \tau_1^{(s)} \\
\tau_2^{(s+1)} - \tau_2^{(s)} \\
\vdots \\
\tau_{q-2}^{(s+1)} - \tau_{q-2}^{(s)} \\
\tau_{q-1}^{(s+1)} - \tau_{q-1}^{(s)} \\
\tau_q^{(s+1)} - \tau_q^{(s)}
\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
f_0^{(s)} \\ f_1^{(s)} \\ f_2^{(s)} \\ \vdots \\ f_{q-2}^{(s)} \\ f_{q-1}^{(s)} \\ f_q^{(s)}
\end{pmatrix},$$

где s – номер итерации;

$$f_i^{(s)} = \varsigma_i - \tau_0^{(s)}\tau_i^{(s)} - \tau_1^{(s)}\tau_{i+1}^{(s)} - \ldots - \tau_{q-i-1}^{(s)}\tau_{q-1}^{(s)} - \tau_{q-i}^{(s)}\tau_q^{(s)}.$$

В качестве начального приближения выбирается $\tau_0^{(0)} = \sqrt{\varsigma_0}$, $\tau_1^{(0)} = \ldots = \tau_q^{(0)} = 0$. Проблемы сходимости Ньютоновских процедур известны и отмечаются авторами метода моментов. Из рассмотренных временных рядов оценки параметров θ_j, $1 \le j \le q$, методом моментов не удалось получить ни для одного.

Поэтому предлагается следующая итерационная процедура:

$$\begin{pmatrix} 1+\alpha_s & & & & \\ -\theta_1^{(s)} & 1+\alpha_s & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \\ -\theta_{q-2}^{(s)} & -\theta_{q-3}^{(s)} & \cdots & 1+\alpha_s & \\ -\theta_{q-1}^{(s)} & -\theta_{q-2}^{(s)} & \cdots & -\theta_1^{(s)} & 1+\alpha_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_q^{(s+1)} \\ \theta_{q-1}^{(s+1)} \\ \vdots \\ \theta_2^{(s+1)} \\ \theta_1^{(s+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_s\theta_q^{(s)} - \varsigma_q\theta_0^{(s)} \\ \alpha_s\theta_{q-1}^{(s)} - \varsigma_{q-1}\theta_0^{(s)} \\ \vdots \\ \alpha_s\theta_2^{(s)} - \varsigma_2\theta_0^{(s)} \\ \alpha_s\theta_1^{(s)} - \varsigma_1\theta_0^{(s)} \end{pmatrix},$$

$$\theta_0^{(s+1)} = \varsigma_0^{-1}\left(1+\left(\theta_1^{(s+1)}\right)^2+\left(\theta_2^{(s+1)}\right)^2+\ldots+\left(\theta_q^{(s+1)}\right)^2\right),$$

где α_s – параметр регуляризации по А.Н. Тихонову (не обязательно $\alpha_s \geq 0$).

Получим условия сходимости итерационного процесса. Разность значений двух соседних итераций удовлетворяет соотношениям

$$\begin{pmatrix} 1+\alpha_s & & & & \\ -\theta_1^{(s)} & 1+\alpha_s & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \\ -\theta_{q-2}^{(s)} & -\theta_{q-3}^{(s)} & \cdots & 1+\alpha_s & \\ -\theta_{q-1}^{(s)} & -\theta_{q-2}^{(s)} & \cdots & -\theta_1^{(s)} & 1+\alpha_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_q^{(s+1)}-\theta_q^{(s)} \\ \theta_{q-1}^{(s+1)}-\theta_{q-1}^{(s)} \\ \vdots \\ \theta_2^{(s+1)}-\theta_2^{(s)} \\ \theta_1^{(s+1)}-\theta_1^{(s)} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} & & & & 0 \\ & & & 0 & \theta_q^{(s)} \\ & & \iddots & \vdots & \vdots \\ & 0 & \cdots & \theta_4^{(s)} & \theta_3^{(s)} \\ 0 & \theta_q^{(s)} & \cdots & \theta_3^{(s)} & \theta_2^{(s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_q^{(s)}-\theta_q^{(s-1)} \\ \theta_{q-1}^{(s)}-\theta_{q-1}^{(s-1)} \\ \vdots \\ \theta_2^{(s)}-\theta_2^{(s-1)} \\ \theta_1^{(s)}-\theta_1^{(s-1)} \end{pmatrix} +$$

$$+\alpha_s \begin{pmatrix} \theta_q^{(s)}-\theta_q^{(s-1)} \\ \theta_{q-1}^{(s)}-\theta_{q-1}^{(s-1)} \\ \vdots \\ \theta_2^{(s)}-\theta_2^{(s-1)} \\ \theta_1^{(s)}-\theta_1^{(s-1)} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \varsigma_q \\ \varsigma_{q-1} \\ \vdots \\ \varsigma_2 \\ \varsigma_1 \end{pmatrix} \left(\theta_0^{(s)}-\theta_0^{(s-1)}\right),$$

$$\theta_0^{(s+1)}-\theta_0^{(s)} = \varsigma_0^{-1}\left(\left(\theta_1^{(s+1)}+\theta_1^{(s)}\right)\left(\theta_1^{(s+1)}-\theta_1^{(s)}\right)+\ldots+\left(\theta_q^{(s+1)}+\theta_q^{(s)}\right)\left(\theta_q^{(s+1)}-\theta_q^{(s)}\right)\right).$$

Разрешая систему уравнений, получим

$$\begin{pmatrix} \theta_q^{(s+1)} - \theta_q^{(s)} \\ \theta_{q-1}^{(s+1)} - \theta_{q-1}^{(s)} \\ \vdots \\ \theta_2^{(s+1)} - \theta_2^{(s)} \\ \theta_1^{(s+1)} - \theta_1^{(s)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & & & 0 \\ & & & 0 & d_1^{(s)} \\ & & \iddots & \vdots & \vdots \\ & 0 & \cdots & d_{q-3}^{(s)} & d_{q-2}^{(s)} \\ 0 & d_1^{(s)} & \cdots & d_{q-2}^{(s)} & d_{q-1}^{(s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_q^{(s)} - \theta_q^{(s-1)} \\ \theta_{q-1}^{(s)} - \theta_{q-1}^{(s-1)} \\ \vdots \\ \theta_2^{(s)} - \theta_2^{(s-1)} \\ \theta_1^{(s)} - \theta_1^{(s-1)} \end{pmatrix} +$$

$$+\frac{1}{1+\alpha_s} \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ c_1^{(s)} & 1 & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \\ c_{q-2}^{(s)} & c_{q-3}^{(s)} & \cdots & 1 & \\ c_{q-1}^{(s)} & c_{q-2}^{(s)} & \cdots & c_1^{(s)} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_s \left(\theta_q^{(s)} - \theta_q^{(s-1)}\right) - \varsigma_q \left(\theta_0^{(s)} - \theta_0^{(s-1)}\right) \\ \alpha_s \left(\theta_{q-1}^{(s)} - \theta_{q-1}^{(s-1)}\right) - \varsigma_{q-1} \left(\theta_0^{(s)} - \theta_0^{(s-1)}\right) \\ \vdots \\ \alpha_s \left(\theta_2^{(s)} - \theta_2^{(s-1)}\right) - \varsigma_2 \left(\theta_0^{(s)} - \theta_0^{(s-1)}\right) \\ \alpha_s \left(\theta_1^{(s)} - \theta_1^{(s-1)}\right) - \varsigma_1 \left(\theta_0^{(s)} - \theta_0^{(s-1)}\right) \end{pmatrix},$$

где $c_1^{(s)} = \left(1+\alpha_s\right)^{-1} \theta_1^{(s)}$, $c_2^{(s)} = \left(1+\alpha_s\right)^{-1} \left(\theta_2^{(s)} + \theta_1^{(s)} c_1^{(s)}\right)$, ...,

$$c_{q-1}^{(s)} = \left(1+\alpha_s\right)^{-1} \left(\theta_{q-1}^{(s)} + \theta_1^{(s)} c_{q-2}^{(s)} + \theta_2^{(s)} c_{q-3}^{(s)} + \ldots + \theta_{q-2}^{(s)} c_1^{(s)}\right),$$

$$d_1^{(s)} = \left(1+\alpha_s\right)^{-1} \theta_q^{(s)},\ d_2^{(s)} = \left(1+\alpha_s\right)^{-1} \left(\theta_{q-1}^{(s)} + \theta_1^{(s)} d_1^{(s)}\right), ...,$$

$$d_{q-1}^{(s)} = \left(1+\alpha_s\right)^{-1} \left(\theta_2^{(s)} + \theta_1^{(s)} d_{q-2}^{(s)} + \theta_2^{(s)} d_{q-3}^{(s)} + \ldots + \theta_{q-2}^{(s)} d_1^{(s)}\right).$$

Для возможности получения прогноза параметры модели должны удовлетворять условиям стационарности и обратимости. Это выражается в ограничениях для φ_i, $1 \le i \le p$ и θ_j, $1 \le j \le q$. Пусть

$$\left\|\boldsymbol{\theta}^{(s)}\right\|_C = \max_{1\le i\le q} \left|\theta_i^{(s)}\right|,\ \left\|\boldsymbol{\theta}^{(s+1)} - \boldsymbol{\theta}^{(s)}\right\|_C = \max_{1\le i\le q} \left|\theta_i^{(s+1)} - \theta_i^{(s)}\right|,\ \left\|\boldsymbol{\varsigma}/\varsigma_0\right\|_C = \max_{1\le i\le q} \left|\varsigma_i/\varsigma_0\right|.$$

Тогда запишем:

$$\left|c_1^{(s)}\right| \le \left|1+\alpha_s\right|^{-1} \left\|\boldsymbol{\theta}^{(s)}\right\|_C,\ \left|c_2^{(s)}\right| \le \left|1+\alpha_s\right|^{-1} \left\|\boldsymbol{\theta}^{(s)}\right\|_C \left(1+\left|1+\alpha_s\right|^{-1} \left\|\boldsymbol{\theta}^{(s)}\right\|_C\right), ...,$$

$$\left|c_{q-1}^{(s)}\right| \le \left|1+\alpha_s\right|^{-1} \left\|\boldsymbol{\theta}^{(s)}\right\|_C \left(1+\left|c_{q-2}^{(s)}\right| + \ldots + \left|c_1^{(s)}\right|\right) \le \left|1+\alpha_s\right|^{-1} \left\|\boldsymbol{\theta}^{(s)}\right\|_C \left(1+\left|1+\alpha_s\right|^{-1} \left\|\boldsymbol{\theta}^{(s)}\right\|_C\right)^{q-2},$$

$$\left|d_1^{(s)}\right| \le \left|1+\alpha_s\right|^{-1} \left\|\boldsymbol{\theta}^{(s)}\right\|_C,\ \left|d_2^{(s)}\right| \le \left|1+\alpha_s\right|^{-1} \left\|\boldsymbol{\theta}^{(s)}\right\|_C \left(1+\left|1+\alpha_s\right|^{-1} \left\|\boldsymbol{\theta}^{(s)}\right\|_C\right), ...,$$

$$\left|d_{q-1}^{(s)}\right| \le \left|1+\alpha_s\right|^{-1} \left\|\boldsymbol{\theta}^{(s)}\right\|_C \left(1+\left|d_{q-2}^{(s)}\right| + \ldots + \left|d_1^{(s)}\right|\right) \le \left|1+\alpha_s\right|^{-1} \left\|\boldsymbol{\theta}^{(s)}\right\|_C \left(1+\left|1+\alpha_s\right|^{-1} \left\|\boldsymbol{\theta}^{(s)}\right\|_C\right)^{q-2},$$

$$\left|\theta_0^{(s)} - \theta_0^{(s-1)}\right| \le q\varsigma_0^{-1} \left(\left\|\boldsymbol{\theta}^{(s)}\right\|_C + \left\|\boldsymbol{\theta}^{(s-1)}\right\|_C\right) \left\|\boldsymbol{\theta}^{(s)} - \boldsymbol{\theta}^{(s-1)}\right\|_C,$$

$$\left\|\boldsymbol{\theta}^{(s+1)} - \boldsymbol{\theta}^{(s)}\right\|_C \le \left(\left|d_1^{(s)}\right| + \left|d_2^{(s)}\right| + \ldots + \left|d_{q-1}^{(s)}\right|\right) \left\|\boldsymbol{\theta}^{(s)} - \boldsymbol{\theta}^{(s-1)}\right\|_C +$$

$$+\left|1+\alpha_s\right|^{-1}\left(1+\left|c_1^{(s)}\right|+\left|c_2^{(s)}\right|+\ldots+\left|c_{q-1}^{(s)}\right|\right)\left(\left|\alpha_s\right|+q\left\|\frac{\varsigma}{\varsigma_0}\right\|_C\left(\left\|\boldsymbol{\theta}^{(s)}\right\|_C+\left\|\boldsymbol{\theta}^{(s-1)}\right\|_C\right)\right)\left\|\boldsymbol{\theta}^{(s)}-\boldsymbol{\theta}^{(s-1)}\right\|_C \le$$

$$\le\left(\left(1+\frac{1}{\left|1+\alpha_s\right|}\left\|\boldsymbol{\theta}^{(s)}\right\|_C\right)^{q-1}\left(1+\frac{1}{\left|1+\alpha_s\right|}\left(\left|\alpha_s\right|+q\left\|\frac{\varsigma}{\varsigma_0}\right\|_C\left(\left\|\boldsymbol{\theta}^{(s)}\right\|_C+\left\|\boldsymbol{\theta}^{(s-1)}\right\|_C\right)\right)\right)-1\right)\left\|\boldsymbol{\theta}^{(s)}-\boldsymbol{\theta}^{(s-1)}\right\|_C.$$

Для сходимости со скоростью $\left\|\boldsymbol{\theta}^{(s+1)}-\boldsymbol{\theta}^{(s)}\right\|_C \le \gamma\left\|\boldsymbol{\theta}^{(s)}-\boldsymbol{\theta}^{(s-1)}\right\|_C$, $0\le\gamma<1$ параметр регуляризации α_s должен удовлетворять условию

$$\left(1+\left|1+\alpha_s\right|^{-1}\left\|\boldsymbol{\theta}^{(s)}\right\|_C\right)^{q-1}\left(1+\left|1+\alpha_s\right|^{-1}\left(\left|\alpha_s\right|+q\left\|\varsigma/\varsigma_0\right\|_C\left(\left\|\boldsymbol{\theta}^{(s)}\right\|_C+\left\|\boldsymbol{\theta}^{(s-1)}\right\|_C\right)\right)\right)-1\le\gamma.$$

Для различных интервалов α_s это равносильно следующим условиям:

$f_1(x)=(1-x)^{q-1}(2-bx)\le 1+\gamma$ для $-\infty<\alpha_s<-1$ (соответственно $0>x>-\infty$);

$f_2(x)=(1+x)^{q-1}bx\le 1+\gamma$ для $-1<\alpha_s\le 0$ (соответственно $+\infty>x\ge\left\|\boldsymbol{\theta}^{(s)}\right\|_C$);

$f_3(x)=(1+x)^{q-1}(2-ax)\le 1+\gamma$ для $0\le\alpha_s<+\infty$ (соответственно $\left\|\boldsymbol{\theta}^{(s)}\right\|_C\ge x>0$),

где $x=(1+\alpha_s)^{-1}\left\|\boldsymbol{\theta}^{(s)}\right\|_C$;

$$a=\left\|\boldsymbol{\theta}^{(s)}\right\|_C^{-1}-q\left\|\varsigma/\varsigma_0\right\|_C\left(1+\left\|\boldsymbol{\theta}^{(s)}\right\|_C^{-1}\left\|\boldsymbol{\theta}^{(s-1)}\right\|_C\right);$$

$$b=\left\|\boldsymbol{\theta}^{(s)}\right\|_C^{-1}+q\left\|\varsigma/\varsigma_0\right\|_C\left(1+\left\|\boldsymbol{\theta}^{(s)}\right\|_C^{-1}\left\|\boldsymbol{\theta}^{(s-1)}\right\|_C\right).$$

Заметим, что

$$f_2\left(\left\|\boldsymbol{\theta}^{(s)}\right\|_C\right)=f_3\left(\left\|\boldsymbol{\theta}^{(s)}\right\|_C\right)\ge 1.$$

Поскольку $f_1(x)\ge 2$ для $-\infty<x<0$, то в интервале $-\infty<\alpha_s<-1$ не удается указать α_s, для которых существует $0\le\gamma<1$.

Если $f_2\left(\left\|\boldsymbol{\theta}^{(s)}\right\|_C\right)=f_3\left(\left\|\boldsymbol{\theta}^{(s)}\right\|_C\right)\ge 2$, то не удается указать α_s, для которых существует $0\le\gamma<1$, и в интервале $-1<\alpha_s<+\infty$.

Если $1\le f_2\left(\left\|\boldsymbol{\theta}^{(s)}\right\|_C\right)=f_3\left(\left\|\boldsymbol{\theta}^{(s)}\right\|_C\right)<2$, то для α_s из некоторого интервала $\alpha_l\le\alpha_s\le\alpha_u$, где $-1<\alpha_l\le 0$ – корень уравнения $f_2(x)=1+\gamma$ при $\left\|\boldsymbol{\theta}^{(s)}\right\|_C\le x<+\infty$, $\alpha_u\ge 0$ – корень уравнения $f_3(x)=1+\gamma$ при $0<x<\left\|\boldsymbol{\theta}^{(s)}\right\|_C$

в случае $2(q-1)-a>0$ и α_s не ограничено ($\alpha_l \le \alpha_s < +\infty$) в случае $2(q-1)-a \le 0$, существуют $0 \le \gamma < 1$.

Таким образом, если итерационный процесс сходится, то он сходится и при $\alpha_s = 0$, причём в этом случае оценка скорости сходимости оказывается наилучшей

$$\gamma_0 = \left(1+\left\|\boldsymbol{\theta}^{(s)}\right\|_C\right)^{q-1}\left(1+q\left\|\varsigma/\varsigma_0\right\|_C\left(\left\|\boldsymbol{\theta}^{(s)}\right\|_C+\left\|\boldsymbol{\theta}^{(s-1)}\right\|_C\right)\right)-1.$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Box G.E.P. and Jenkins G.M.* Time Series Analysis: Forecasting and Control, rev. Ed., San Francisco: Holden-Day, 1976.

Статью рекомендовал к опубликованию д.т.н., профессор Я.Е. Ромм.

Васильев Владислав Сергеевич – Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Южный федеральный университет»; e-mail: sunspire@mail.ru; 347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44; тел.: 88634371606; кафедра высшей математики; к.ф.-м.н.; доцент.

Vasiliev Vladislav Sergeevich – Federal State-Owned Autonomy Educational Establishment of Higher Vocational Education "Southern Federal University"; e-mail: sunspire@mail.ru; 44, Nekrasovsky, Taganrog, 347928, Russia; phone: +78634371606; the department of higher mathematics; cand. of. eng. sc.; associate professor.

УДК 519.4

А.И. Жорник, В.А. Киричек, П.А. Савочка

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ ЦИЛИНДРА С КОНВЕКТИВНЫМ ТЕПЛООБМЕНОМ

Рассматривается нестационарная задача теплопроводности для цилиндра с конвективным теплообменом со средой с кипящим слоем. Этот кипящий слой образуется между поверхностью цилиндра и охлаждающей жидкостью. В зависимости от плотности теплового потока, подводимого к жидкости от поверхности нагрева, на ней образуется или сплошной слой пара, или отдельные паровые пузыри, или кипение прекращается, если температура поверхности окажется ниже точки кипения. Поэтому коэффициент теплообмена является функцией температуры поверхности цилиндра, и поэтому задача имеет нелинейное граничное условие. Решение проводится численным и приближенным аналитическим методами. Полученные указанными методами результаты сравниваются.

Цилиндр; теплопроводность; теплообмен; температурное поле.

A.I. Zhornik, V.A. Kirichek, P.A. Savochka

ON A THERMAL CONDUCTIVITY PROBLEM FOR A CYLINDER WITH CONVECTIVE HEAT EXCHANGE

A nonstationary thermal conductivity problem for a cylinder with a convective heat exchange with a medium with a fluidized bed is considered. This fluidized bed is formed between the cylindrical surface and the coolant. Depending on the heat flux density supplied to the fluid from the heating surface, a continuous layer or separate vapor bubbles form on it. Otherwise boiling ceases when the surface temperature is below the boiling point. Therefore, the heat transfer coeffi-