

в случае $2(q-1)-a > 0$ и α_s не ограничено ($\alpha_l \leq \alpha_s < +\infty$) в случае $2(q-1)-a \leq 0$, существуют $0 \leq \gamma < 1$.

Таким образом, если итерационный процесс сходится, то он сходится и при $\alpha_s = 0$, причём в этом случае оценка скорости сходимости оказывается наилучшей

$$\gamma_0 = \left(1 + \|\boldsymbol{\theta}^{(s)}\|_C\right)^{q-1} \left(1 + q \|\boldsymbol{\zeta}/\boldsymbol{\zeta}_0\|_C \left(\|\boldsymbol{\theta}^{(s)}\|_C + \|\boldsymbol{\theta}^{(s-1)}\|_C\right)\right) - 1.$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Box G.E.P. and Jenkins G.M. Time Series Analysis: Forecasting and Control, rev. Ed., San Francisco: Holden-Day, 1976.

Статью рекомендовал к опубликованию д.т.н., профессор Я.Е. Ромм.

Васильев Владислав Сергеевич – Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Южный федеральный университет»; e-mail: sunspire@mail.ru; 347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44; тел.: 88634371606; кафедра высшей математики; к.ф.-м.н.; доцент.

Vasiliev Vladislav Sergeevich – Federal State-Owned Autonomy Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”; e-mail: sunspire@mail.ru; 44, Nekrasovsky, Taganrog, 347928, Russia; phone: +78634371606; the department of higher mathematics; cand. of. eng. sc.; associate professor.

УДК 519.4

А.И. Жорник, В.А. Киричек, П.А. Савочка

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ ЦИЛИНДРА С КОНВЕКТИВНЫМ ТЕПЛООБМЕНОМ

Рассматривается нестационарная задача теплопроводности для цилиндра с конвективным теплообменом со средой с кипящим слоем. Этот кипящий слой образуется между поверхностью цилиндра и охлаждающей жидкостью. В зависимости от плотности теплового потока, подводимого к жидкости от поверхности нагрева, на ней образуется или сплошной слой пара, или отдельные паровые пузыри, или кипение прекращается, если температура поверхности окажется ниже точки кипения. Поэтому коэффициент теплообмена является функцией температуры поверхности цилиндра, и поэтому задача имеет нелинейное граничное условие. Решение проводится численным и приближенным аналитическим методами. Полученные указанными методами результаты сравниваются.

Цилиндр; теплопроводность; теплообмен; температурное поле.

A.I. Zhornik, V.A. Kirichek, P.A. Savochka

ON A THERMAL CONDUCTIVITY PROBLEM FOR A CYLINDER WITH CONVECTIVE HEAT EXCHANGE

A nonstationary thermal conductivity problem for a cylinder with a convective heat exchange with a medium with a fluidized bed is considered. This fluidized bed is formed between the cylindrical surface and the coolant. Depending on the heat flux density supplied to the fluid from the heating surface, a continuous layer or separate vapor bubbles form on it. Otherwise boiling ceases when the surface temperature is below the boiling point. Therefore, the heat transfer coeffi-

cient is a function of cylinder temperature, therefore we have a nonlinear boundary condition. The solution is carried out by numerical and approximate analytical methods. The results obtained by these methods are compared.

Cylinder; thermal conductivity; heat exchange; temperature field.

Введение. При изготовлении и эксплуатации изделий они подвергаются резкому нагреву или охлаждению. При этом интенсивность теплообмена поверхности изделий со средой в общем случае зависит от температуры поверхности. Следовательно, задача теплопроводности имеет нелинейное граничное условие. Решение такой задачи можно получить численными или приближенными аналитическими методами.

Постановка задачи. В процессе нагрева или охлаждения изделий (закалка, непрерывное литье металлов, охлаждение двигателей, испытания на термостойкость и т.д.) их поверхность может иметь температуру, существенно большую температуры кипения, хотя основная масса охлаждающей жидкости остается недогретой до этой температуры. В таком случае имеется некоторая изотермическая поверхность, по одну сторону которой жидкость перегрета, а по другую недогрета до температуры кипения. Первая область называется кипящим граничным слоем, вторая – холодным ядром потока. В первой происходит парообразование, во второй – конденсация пара.

В зависимости от плотности теплового потока, подводимого к жидкости через поверхность нагрева, на последней возникают отдельные паровые пузыри или образуется сплошной слой пара. Первый процесс называется пузырьковым кипением; второй – пленочным. При пузырьковом кипении жидкость непосредственно омывает поверхность нагрева, причем ее пограничный слой интенсивно разрушается (турбулизуется) возникающими паровыми пузырями. Кроме того, всплывающие пузыри увлекают из пристенного слоя в ядро потока присоединенную массу перегретой жидкости, что создает интенсивный молярный перенос теплоты от поверхности нагрева к массе кипящей жидкости. Следствием этого является высокая интенсивность теплоотдачи при пузырьковом кипении, возрастающая с увеличением числа действующих центров парообразования и количества образующегося пара.

При пленочном кипении жидкость отделена от поверхности нагрева слоем пара, с внешней стороны которого время от времени отрываются и всплывают крупные пузыри. Вследствие относительно малой теплопроводности парового слоя интенсивность теплоотдачи при пленочном кипении существенно меньше, чем при пузырьковом.

Возникновение того или иного вида кипения определяется величиной плотности теплового потока у поверхности нагрева, физическими свойствами жидкости и гидродинамическим режимом потока в целом.

Условия перехода от одного режима (вида) кипения к другому и области их существования отчетливо выявляются при построении зависимости коэффициента теплообмена от разности температур поверхности нагрева и насыщения, изображенной на рис. 1 в условиях свободной конвекции [1]. Причем это выполняется для различных материалов, помещенных в воду.

Линия OA – пузырьковое кипение, БГД – пленочное кипение, область между ними – смешанное кипение.

В случае вынужденной конвекции кипящей воды на процесс теплоотдачи, связанный с кипением, налагается еще процесс, обусловленный вынужденной конвекцией, что увеличивает коэффициент теплообмена. Однако, согласно исследованиям, проведенным в [1], даже при относительно небольшом превышении температуры охлаждаемой стенки ΔT над температурой кипения воды (373 К, 100 °С) ~ 30 К решающую роль начинает играть пузырьковое кипение. Это хорошо видно из рис. 2, где по горизонтальной оси отложен тепловой поток $q = \alpha \Delta T$.

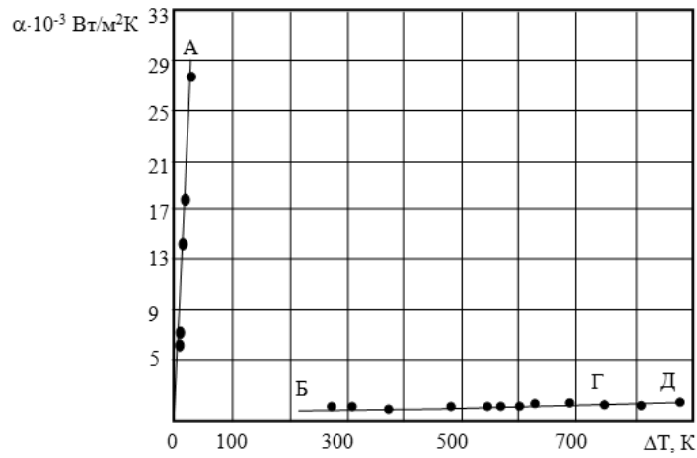


Рис. 1. Зависимость коэффициента теплообмена от разности температур поверхности цилиндра и насыщения в большом объеме воды

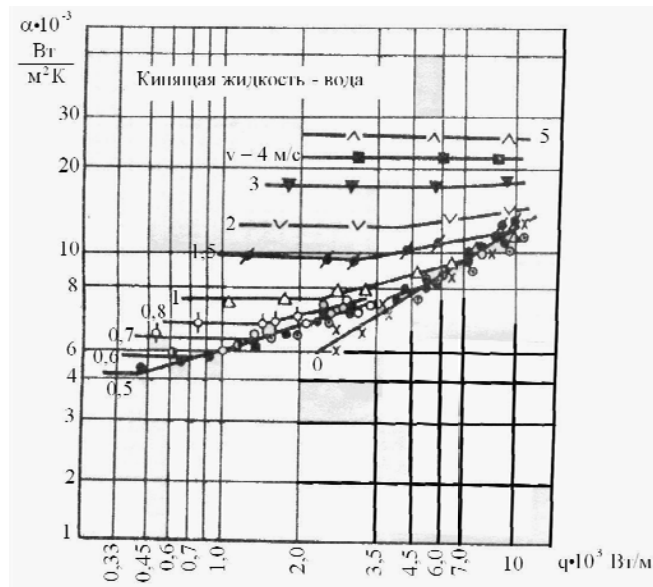


Рис. 2. Опытные данные о влиянии циркуляции жидкости на теплоотдачу при кипении воды

В то же время при стремлении $\Delta T \rightarrow 0$ (температуры стенки к температуре кипения) коэффициент теплообмена, с одной стороны, стремится к значению, соответствующему значению для вынужденной конвекции ниже температуры кипения, который можно рассчитать по формулам, приведенным в работах [1, 2]. С другой стороны, с увеличением q все кривые, независимо от составляющей, связанной с вынужденной конвекцией, стремятся к $\alpha \rightarrow \sim 29000 \text{ Вт/м}^2\text{К}$, связанным с пузырьковым кипением. В частности, согласно рис. 1 и 2, при $v = 0$ и $\Delta T \rightarrow 0$ величина $\alpha \rightarrow \sim 4000 \text{ Вт/м}^2\text{К}$, что согласуется с данными работ [2, 3], в которых для $\alpha \approx 4185 \text{ Вт/м}^2\text{К}$ для случая естественной (свободной) конвекции.

Чтобы оценить влияние эффекта кипения воды на температурное поле, необходимо решить уравнение теплопроводности для цилиндра с коэффициентом теплообмена, зависящим от температуры.

Численное решение задачи. В качестве модели для решения задачи выбран цилиндр относительно большой длины (длина цилиндра значительно больше его радиуса) радиуса r_c , нагретого до постоянной температуры T_0 , который охлаждается в среде постоянной температуры θ путем теплообмена с коэффициентом теплообмена, зависящим от температуры поверхности цилиндра $\alpha(T(r_c, \tau))$, который изменяется по линейному закону (см. рис. 1).

Уравнение теплопроводности для цилиндрического тела, приведенное к безразмерному виду, таково:

$$\frac{\partial T(\rho, \tau)}{\partial \tau} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial T(\rho, \tau)}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 T(\rho, \tau)}{\partial \rho^2}, \quad \rho \in [0, 1], T = T(\rho, \tau), \quad (1)$$

где $\rho = r/r_c$ – относительный радиус; $\tau = at/r_c^2$ – относительное время; $a = \frac{\lambda_T}{\rho_V c_V}$ –

температуропроводность материала цилиндра; ρ_V – массовая плотность; c_V – удельная теплоемкость; λ_T – теплопроводность.

Начальное условие – цилиндр, в начальный момент времени имеет постоянную температуру $T_0 - \theta = \Theta$.

$$T(\rho, 0) = \Theta. \quad (2)$$

Граничные условия:

$$\left. \frac{\partial T(\rho, \tau)}{\partial \rho} \right|_{\rho=0} = 0, \quad (3)$$

$$\left. \frac{\partial T(\rho, \tau)}{\partial \rho} \right|_{\rho=1} = -Bi(T(1, \tau))T(1, \tau), \quad (4)$$

где

$$Bi(T(1, \tau)) = \begin{cases} Bi_2, & T(1, \tau) < 100^\circ \text{C}, \\ \frac{(Bi_1 - Bi_2)}{33} \cdot (T(1, \tau) - 100) - Bi_2, & 100^\circ \text{C} < T(1, \tau) < 133^\circ \text{C}, \\ Bi_1, & 133^\circ \text{C} < T(1, \tau) < 180^\circ \text{C}, \end{cases}$$

$Bi_1 = \frac{\alpha_1 r_c}{\lambda_T}$ – коэффициент Био при температуре выше 133°C (в нашем случае $Bi_1 =$

$= 107$, для $r_c = 2,15 \cdot 10^{-3}$ м, $\lambda_T = 0,5852$ Вт/м·К, $\alpha_1 = 29 \cdot 10^3$ Вт/м²·К), Bi_2 – коэффициент Био при температуре ниже 100°C (в нашем случае $Bi_2 = 37, 55, 74$ при тех же r_c и λ_T и различных коэффициентах теплообмена).

Для построения решения разностной схемы будем использовать равномерную сетку на интервале $\rho \in [0, 1]$:

$$\omega_h = \{(\rho_i, \tau^n): \rho_i = ih_\rho; \tau^n = nh_\tau, i = \overline{1..M}, h_\rho = 1/M; n = \overline{0..N}; h_\tau = \tau_0/N\},$$

где h_ρ – шаг по относительному радиусу ρ , h_τ – по шаг по относительному времени τ , M – количество точек разбиения по относительному радиусу, N – количество точек разбиения по относительному времени, τ_0 – время, для которого будет производиться расчет.

После всех преобразований получим разностную схему:

1) $i = 0$

$$T_1^n = T_0^n;$$

2) $i \in [1, M - 1]$

$$\left(\frac{i}{h_\tau} + \frac{i}{h_\rho^2} \right) T_i^{n+1} - \frac{i+0,5}{2h_\rho^2} T_{i+1}^{n+1} - \frac{i-0,5}{2h_\rho^2} T_{i-1}^{n+1} - \frac{i+0,5}{2h_\rho^2} T_{i+1}^n - \frac{i-0,5}{2h_\rho^2} T_{i-1}^n - \left(\frac{i}{h_\tau} - \frac{i}{h_\rho} \right) T_i^n = 0,$$

3) $i = M$

$$\left(\frac{M}{h_\tau} + \frac{M-0,5}{2h_\rho^2} + \frac{M \cdot Bi(T_M^n)}{2} \right) T_M^{n+1} - \frac{M+0,5}{2h_\rho^2} T_{M-1}^{n+1} - \frac{M-0,5}{2h_\rho^2} T_{M-1}^n - \left(\frac{M}{h_\tau} - \frac{M-0,5}{2h_\rho^2} - \frac{M \cdot Bi(T_M^n)}{2} \right) T_M^n = 0.$$

Известно, что данная схема абсолютно устойчива [4, 5]. Схема будет монотонной при условии

$$\frac{i}{h_\tau} - \frac{i}{h_\rho^2} \geq 0, \text{ т.е. } h_\tau \leq h_\rho^2.$$

Методом прогонки с использованием зависимости коэффициента теплообмена от температуры на поверхности цилиндра (4) получена зависимость температуры на поверхности цилиндра от времени.

Аналитическое решение задачи. Согласно рис. 1, переход от тепловых процессов с большим коэффициентом теплообмена ($\alpha_l \sim 29 \cdot 10^3$ Вт/м²К) при пузырьковом кипении к теплообмену с жидкостью с температурой ниже точки кипения осуществляется в узкой температурной области. Поэтому эту область заменим точкой. Коэффициент теплообмена в этой точке изменяется скачком. В связи с этим задача теплопроводности ставится следующим образом.

В качестве модели для решения задачи выбран цилиндр относительно большой длины (длина цилиндра значительно больше его радиуса) радиуса r_c , нагретого до температуры $f(r)$, который охлаждается в среде постоянной температуры θ путем теплообмена с коэффициентом теплообмена, зависящим от температуры поверхности цилиндра $\alpha(T(r_c, t))$, который изменяется скачком.

Уравнение теплопроводности:

$$\frac{\partial T(r, t)}{\partial t} = a \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T(r, t)}{\partial r} \right), \quad 0 < r < r_c, t > 0. \quad (5)$$

Начальное условие:

$$T(r, t) = f(r), \quad 0 < r < r_c, t = 0. \quad (6)$$

Граничные условия:

$$T(r, t) < \infty, \quad r = 0, t > 0, \quad (7)$$

$$\frac{\partial T(r, t)}{\partial r} = -h[T(r, t) - \theta], \quad r = r_c, t > 0, \quad (8)$$

где $h = \frac{\alpha}{\lambda_r}$ – относительный коэффициент теплообмена.

Решение поставленной выше задачи проведено методом конечного интегрального преобразования Ханкеля по r [6] и имеет вид

$$T(r, Fo) - \theta = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k^2 e^{-y_n^2 Fo}}{r_c J_0^2(x_k)(x_k^2 + Bi^2)} J_0\left(x_k \frac{r}{r_c}\right) \int_0^{r_c} [f(\rho) - \theta] J_0\left(x_k \frac{\rho}{r_c}\right) d\rho, \quad (9)$$

где $Fo = \frac{at}{r_c^2}$, $Bi = \frac{\alpha r_c}{\lambda_T}$, x_k – корни трансцендентного уравнения

$$xJ_1(x) = BiJ_0(x). \quad (10)$$

В начальный момент времени цилиндр нагрет до постоянной температуры T_0 выше температуры кипения воды (охлаждающей среды). Поэтому на начальном этапе охлаждения температура стенки выше температуры кипения. В связи с этим охлаждение будет проходить при пузырьковом кипении с коэффициентом теплообмена α_1 . Полагая в (9) $f(r) = T_0$, имеем решение в виде

$$\frac{T_1(r, Fo) - \theta}{T_0 - \theta} = 2Bi_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-y_n^2 Fo}}{J_0(y_n)(y_n^2 + Bi_1^2)} J_0\left(y_n \frac{r}{r_c}\right), \quad (11)$$

где y_n – корни трансцендентного уравнения

$$yJ_1(y) = Bi_1 J_0(y). \quad (12)$$

Для нахождения времени Fo_1 , при котором температура поверхности станет равной температуре кипения жидкости $T_\kappa = 100$ °С, необходимо воспользоваться следующим условием:

$$\frac{T_1(r_c, Fo_1) - \theta}{T_0 - \theta} = \frac{T_\kappa - \theta}{T_0 - \theta} = 2Bi_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-y_n^2 Fo_1}}{y_n^2 + Bi_1^2}. \quad (13)$$

Подставляя Fo_1 в (11), найдем начальное распределение температур $f(r)$ для следующего этапа охлаждения с другим коэффициентом теплообмена Bi_2 :

$$\frac{f(r) - \theta}{T_0 - \theta} = \frac{T_1(r, Fo_1) - \theta}{T_0 - \theta} = 2Bi_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-y_n^2 Fo_1}}{J_0(y_n)(y_n^2 + Bi_1^2)} J_0\left(y_n \frac{r}{r_c}\right). \quad (14)$$

Подставляя (14) в (9), найдем температурное поле на следующем этапе охлаждения:

$$\begin{aligned} & \frac{T_2(r, Fo) - \theta}{T_0 - \theta} = \\ & = 4Bi_1 (Bi_1 - Bi_2) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k^2 e^{-x_k^2 Fo}}{J_0^2(x_k)(x_k^2 + Bi_2^2)} J_0\left(x_k \frac{r}{r_c}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-(y_n^2 - x_k^2) Fo_1}}{(y_n^2 + Bi_1^2)(y_n^2 - x_k^2)}, \end{aligned} \quad (15)$$

где x_k – корни трансцендентного уравнения

$$xJ_1(x) = Bi_2 J_0(x). \quad (16)$$

Можно показать, что если $Bi_1 = Bi_2 = Bi_{cp}$, то решение (15) переходит в решение (11).

На рис. 3, 4 приведены графики зависимости температуры на поверхности цилиндра от времени, рассчитанные численным методом (рис. 3) и приближенным аналитическим методом (рис. 4) – пунктирные линии. Сплошными линиями показано решение, полученное по (11) при $Bi_1 = Bi_2 = Bi_{cp} = 90$ ($\alpha_{cp} = 25 \cdot 10^3$ Вт/м²К).

Из рис. 3, 4 видно, что численный метод (рис. 3) дает более плавный температурный профиль, чем профиль, найденный приближенным аналитическим методом. Это связано с тем, как указывалось выше, что в приближенном аналитическом методе температурная область перехода от теплообмена с пузырьковым кипением к теплообмену с жидкостью, с температурой ниже точки кипения, заменена точкой.

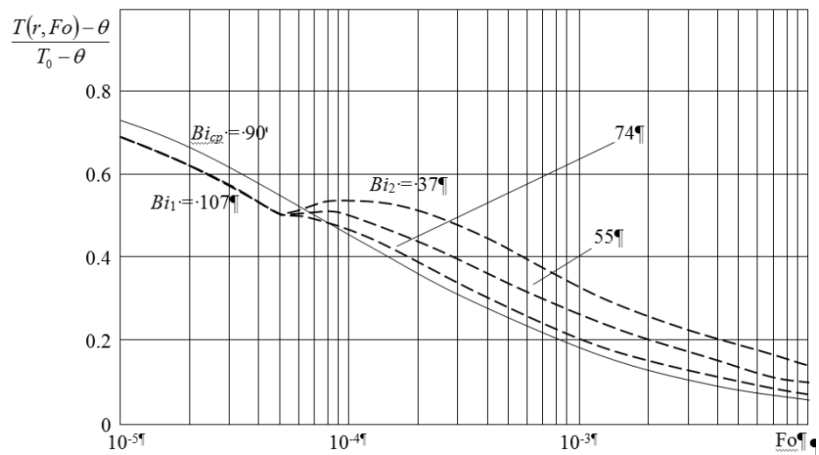


Рис. 3. Сравнение температурных полей со средним коэффициентом ($Bi_{cp} = 90$, сплошная линия) и изменяющимся скачком (от $Bi_1 = 107$ до $Bi_2 = 37, 55, 74$, пунктирные линии)

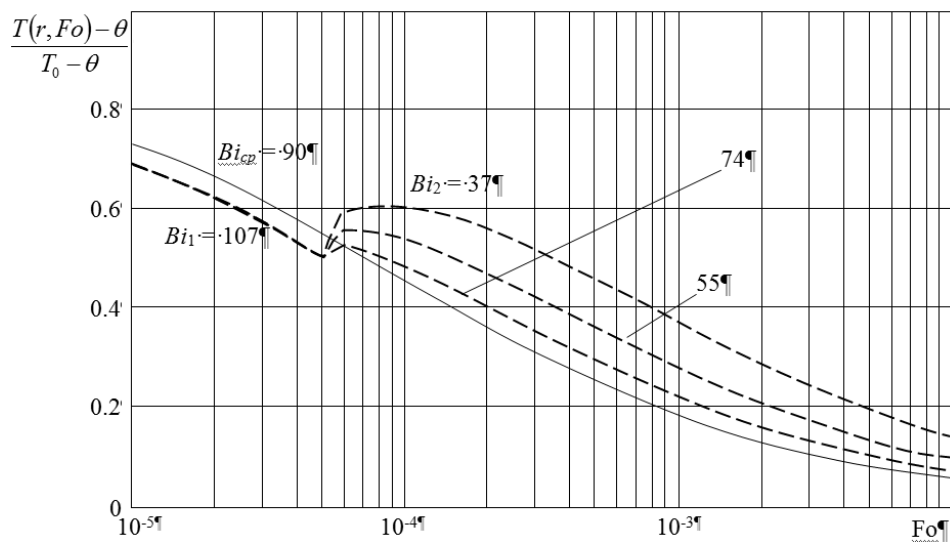


Рис. 4. Сравнение температурных полей с средним коэффициентом ($Bi_{cp} = 90$, сплошная линия) и изменяющимся скачком (от $Bi_1 = 107$ до $Bi_2 = 37, 55, 74$, пунктирные линии)

Заключение. Решение задачи теплопроводности для цилиндра с конвективным теплообменом в среду с кипящим слоем численным и приближенным аналитическим методом показало относительно хорошее совпадение результатов расчета.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Кутателадзе С.С. Основы теории теплообмена. – Новосибирск: Наука, Сибирское отделение. – 1970. – 659 с.
2. Михеев М.А. Основы теплопередачи. – М.: Госэнергоиздат, 1956. – 526 с.
3. Бартнев Г.М. Механические свойства и тепловая обработка стекла. – М.: Гос. Изд-во лит-ры по строительству, архитектуре и строительным материалам, 1960. – 166 с.

4. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. – М.: Наука, 1989. – 432 с.
5. Яненко Н.Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. – Новосибирск: Наука, Сиб. отд-ние, 1967. – 195 с.
6. Жорник А.И. Термоупругие процессы, происходящие в твердых телах с трещиноподобными дефектами. – Таганрог: Изд-во Таганрогского госпединститута, 2002. – 259 с.

Статью рекомендовал к опубликованию д.ф.-м.н., профессор Г.В. Куповых.

Жорник Александр Иванович – Таганрогский государственный педагогический институт им. А.П. Чехова; e-mail: Zhornik@land.ru; г. Таганрог, ул. Инициативная, 48; тел.: 88634601807; кафедра теоретической, общей физики и технологии, д.ф.-м.н.; профессор.

Киричек Виктория Александровна – кафедра теоретической, общей физики и технологии; к.ф.-м.н.; доцент.

Савочка Петр Анатольевич – Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Южный федеральный университет»; e-mail: Savochka07@mail.ru; 347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44; тел.: 88634360460; кафедра конструирования электронных средств; ассистент.

Zhornik Aleksandr Ivanovich – Taganrog State Pedagogical Institute named A.P. Chekhov; e-mail: Zhornik@land.ru; 48, Initsiativnaya street, Taganrog, Russia; phone: +78634601807; the department of theoretical physics and general technology; dr. of phys.-math. sc.; professor.

Kirichek Viktoriya Aleksandrovna – the department of theoretical physics and general technology; cand. of phys.-math. sc.; professor.

Savochka Petr Anatolievich – Federal State-Owned Autonomy Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”; e-mail: Savochka07@mail.ru; 44 Nekrasovsky, Taganrog, 347928, Russia; Work phone: +78634371603; the department of electronic apparatuses design; assistant.