4. *Чикин А.Л.* Трехмерная задача расчета гидродинамики Азовского моря // Матем. моделирование. – 2001. – № 13:2. – С. 86-92.
5. *Марчук Г.И.* Методы расщепления. – М.: Наука, 1989.
6. *Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Тимофеева Е.Ф., Шишеня А.В.* Математическая модель расчета прибрежных волновых процессов // Математическое моделирование. – 2012. – Т. 24, № 8. – С. 32-44.
7. *Самарский А.А., Вабищевич П.Н.* Аддитивные схемы расщепления для задач математической физики. – М.: Наука, 1999. – 319 с.
8. *Сухинов А.И., Тимофеева Е.Ф., Чистяков А.Е.* Построение и исследование дискретной математической модели расчета прибрежных волновых процессов // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2011. – № 8 (121). – С. 22-32.
9. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. – М.: Наука, 1989.
10. *Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Бондаренко Ю.С.* Оценка погрешности решения уравнения диффузии на основе схем с весами // Известия ЮФУ. Технические науки – 2011. – № 8 (121). – С. 6-13.
11. *Коновалов А.Н.* К теории попеременно-треугольного итерационного метода // Сибирский математический журнал. – 2002. – № 43:3. – С. 552-572.
12. *Сухинов А.И., Чистяков А.Е.* Адаптивный модифицированный попеременно-треугольный итерационный метод для решения сеточных уравнений с несамосопряженным оператором // Математическое моделирование. – 2012. – Т. 24, № 1. – С. 3-21.
13. *Горлов А.А., Серых В.Я.* Преобразователи энергии волнения для средств океанологических измерений // Современные методы и средства океанологических исследований: Материалы XII Междунар. науч.-техн. конференции «МСОИ-2011»: В 2 т. – М.: АПР, 2011. – Т. 1. – С. 35-39.

Статью рекомендовал к опубликованию д.т.н., профессор Я.Е. Ромм.

Фоменко Наталья Алексеевна – Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Южный федеральный университет»; e-mail: fomenko.n86@mail.ru; 347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44; тел.: 89034855580; кафедра высшей математики; аспирантка.

Fomenko Natalya Alexeevna – Federal State-Owned Autonomy Educational Establishment of Higher Vocational Education "Southern Federal University"; e-mail: fomenko.n86@mail.ru; 44, Nekrasovskiy, Taganrog, 347928, Russia; phone: +79034855580; the department of higher mathematics; postgraduate student.

УДК 519.6

В.С. Васильев

СХОДИМОСТЬ ИТЕРАЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ В МОДЕЛЯХ ВЕТРОВЫХ ВОЛНЕНИЙ И ПРИЛИВНЫХ ЯВЛЕНИЙ*

Рассматривается модель ветровых волнений и приливных явлений. Модель состоит из двух нелинейных уравнений в частных производных для поля амплитуд и поля фаз гармонических пульсаций ветрового или гравитационного возмущений. Модель отличается от существующих моделей введением переменной, не имеющей неопределённости в точках нулевой амплитуды. На примере случая однородного воздействия с линейным запаздыванием фазы получены оценки для нормы решения. Данные оценки используются для доказательства сходимости процессов установления решений и для получения ограничений на итерационные параметры. Результаты, с одной стороны, полностью подтверждаются практикой численного моделирования, а с другой стороны, объясняют наблюдающиеся при моделировании эффекты.

Математическое моделирование; нелинейные уравнения в частных производных; вычислительная гидродинамика; сходимость итерационных процессов; котидальная карта.

* Работа поддержана грантом РФФИ № 13-01-00530А_2013.

V.S. Vasiliev

CONVERGENCE OF THE ITERATIVE PROCESSES IN A MODELS OF WIND EMOTIONS AND TIDAL PHENOMENA

Wind emotions and tidal phenomena model is considered in article. The model consists of two nonlinear partial differential equations for field of amplitudes and field of phases of wind or gravity influences harmonic pulsation. The model differs from existing models by entering the variable, not having uncertainty in points of zero amplitude. On example of uniform influence event with linear delaying phases are received estimations for rate of decision. These estimations are used for proof of convergence of the processes of determination of decisions and for reception of constrains on iterative parameters. The results, on the one hand, are completely confirmed by practice of numerical modeling, but on the other hand, explain existing at modeling effects.

Mathematical modeling; nonlinear partial differential equations; computing hydrodynamics; convergence iterative processes; co-tidal map.

Система уравнений мелкой воды [1]

$$\mathbf{V}_t' + \mathbf{i}_\kappa \operatorname{div}\left(\mathbf{V} H^{-1} V^\kappa\right) + \tilde{g} H \operatorname{grad} E + \mathbf{C}\mathbf{V} = \mathbf{i}_\kappa \operatorname{div}\left(\mu H \operatorname{grad}\left(H^{-1} V^\kappa\right)\right) + \mathbf{W},$$

$$E_t' + \operatorname{div}\mathbf{V} + \varepsilon = 0,$$

где $\kappa = \overline{1;2}$ – индекс суммирования; $\mathbf{V} = \mathbf{i}_1 V^1 + \mathbf{i}_2 V^2$; $\mathbf{i}_1 = \mathbf{i}$ и $\mathbf{i}_2 = \mathbf{j}$ – декартовы орты; $V^1 = \int_D^E u\,dz$; $V^2 = \int_D^E v\,dz$; u и v – x-компонента и y-компонента вектора скорости среды в момент времени t в точке с декартовыми координатами (x, y, z); $H = E - D$ – полная глубина; $E(t, x, y)$ и $D(x, y)$ – функции свободной поверхности и поверхности дна; $\tilde{g}$ – ускорение свободного падения; $\mathbf{C} = \left\|c_{ij}\right\|_{2\times 2}$, $c_{11} = c_{22} = 0$, $c_{12} = -c_{21} = c$, $c = 2\Omega \sin\theta$ – параметр Кориолиса; θ – северная широта; Ω – угловая скорость вращения Земли; μ – коэффициент турбулентного обмена; $\mathbf{W}$ – вектор ветрового воздействия; ε – интенсивность испарения ($\varepsilon > 0$) или выпадения осадков ($\varepsilon < 0$), разрешима с помощью метода поправки к давлению:

$$\left(\tilde{\mathbf{V}} - \mathbf{V}\right)\big/\tau + \mathbf{i}_\kappa \operatorname{div}\left(\mathbf{V} H^{-1} V^\kappa\right) = \mathbf{i}_\kappa \operatorname{div}\left(\mu H \operatorname{grad}\left(H^{-1} V^\kappa\right)\right),$$

$$\left(\hat{E} - E\right)\big/\tau - \tau \operatorname{div}\left(\tilde{g}\hat{H}\left(\mathbf{E} + \tau\mathbf{C}\right)^{-1} \operatorname{grad}\hat{E}\right) + \operatorname{div}\left(\left(\mathbf{E} + \tau\mathbf{C}\right)^{-1}\left(\tilde{\mathbf{V}} + \tau\mathbf{W}\right)\right) + \varepsilon = 0, \quad (1)$$

$$\left(\hat{\mathbf{V}} - \tilde{\mathbf{V}}\right)\big/\tau + \tilde{g}\hat{H} \operatorname{grad}\hat{E} + \mathbf{C}\hat{\mathbf{V}} = \mathbf{W},$$

где τ – сеточный шаг по времени; $\hat{\mathbf{V}}$, $\hat{H}$, $\hat{E}$ – значения на новом временном слое; $\tilde{\mathbf{V}}$ – значения на промежуточном временном слое. Уравнение для возвышения уровня (1) является следствием соотношений

$$\left(\hat{E} - E\right)\big/\tau + \operatorname{div}\hat{\mathbf{V}} + \varepsilon = 0,$$

$$\hat{\mathbf{V}} = \left(\mathbf{E} + \tau\mathbf{C}\right)^{-1}\left(\tilde{\mathbf{V}} + \tau\left(\mathbf{W} - \tilde{g}\hat{H} \operatorname{grad}\hat{E}\right)\right).$$

Предположим, что во внешнем воздействии можно выделить гармонические пульсации [2, 3]: $\mathbf{W} = \overline{\mathbf{W}} + \boldsymbol{\upsilon} e^{i(\omega t + o)}$ или $\tilde{g} = g + \gamma e^{i(\omega t + o)}$. Эти пульсации передаются вектору $\hat{\mathbf{V}}$, возвышению уровня $\hat{E} = \overline{E} + \hat{\alpha} e^{i(\omega t + \hat{\phi})}$, $E = \breve{E} + \alpha e^{i(\omega(t-\tau) + \varphi)}$ и полной глубине $\hat{H} = \overline{H} + \hat{\alpha} e^{i(\omega t + \hat{\varphi})}$:

$$\hat{\mathbf{V}} = (\mathbf{E}+\tau\mathbf{C})^{-1}\left(\overline{\mathbf{V}} + \tau\left(\mathbf{\upsilon} - \gamma\overline{H}\,\mathrm{grad}\,\overline{E}\right)e^{i(\omega t+o)} - \tau g\left(\hat{\alpha}e^{i(\omega t+\hat{\varphi})}\,\mathrm{grad}\,\overline{E} + \overline{H}\,\mathrm{grad}\left(\hat{\alpha}e^{i(\omega t+\hat{\varphi})}\right)\right)\right),$$

$$\left(\overline{E} + \hat{\alpha}e^{i(\omega t+\hat{\varphi})} - \breve{E} - \alpha e^{i(\omega(t-\tau)+\varphi)}\right)/\tau + \mathrm{div}\left((\mathbf{E}+\tau\mathbf{C})^{-1}\left(\overline{\mathbf{V}} + \tau\left(\mathbf{\upsilon} - \gamma\overline{H}\,\mathrm{grad}\,\overline{E}\right)e^{i(\omega t+o)}\right)\right) +$$
$$+\varepsilon - \tau g\,\mathrm{div}\left((\mathbf{E}+\tau\mathbf{C})^{-1}\left(\hat{\alpha}e^{i(\omega t+\hat{\varphi})}\,\mathrm{grad}\,\overline{E} + \overline{H}\,\mathrm{grad}\left(\hat{\alpha}e^{i(\omega t+\hat{\varphi})}\right)\right)\right) = 0,$$

где

$$\overline{\mathbf{V}} = \tilde{\mathbf{V}} + \tau\overline{\mathbf{W}} - \tau g\overline{H}\,\mathrm{grad}\,\overline{E} - \tau\gamma e^{i(\omega t+o)}\hat{\alpha}e^{i(\omega t+\hat{\varphi})}\,\mathrm{grad}\,\overline{E} - \tau\gamma e^{i(\omega t+o)}\overline{H}\,\mathrm{grad}\left(\hat{\alpha}e^{i(\omega t+\hat{\varphi})}\right) -$$
$$-\tau g\hat{\alpha}e^{i(\omega t+\hat{\varphi})}\,\mathrm{grad}\left(\hat{\alpha}e^{i(\omega t+\hat{\varphi})}\right) - \tau\gamma e^{i(\omega t+o)}\hat{\alpha}e^{i(\omega t+\hat{\varphi})}\,\mathrm{grad}\left(\hat{\alpha}e^{i(\omega t+\hat{\varphi})}\right);$$

где ω – угловая частота; $\mathbf{\upsilon}$, γ и α – амплитуды; o и φ – фазы пульсаций; i – мнимая единица. В зависимости от рассматриваемой задачи $\gamma = 0$ – для «чистого» ветрового волнения и $\mathbf{\upsilon} = \mathbf{0}$ – для «чистых» приливных явлений. В смешанной задаче необходимо различать угловые частоты ω_w, ω_g и фазы o_w, o_g. Предположим, что для величин $\overline{E}$, $\breve{E}$, $\overline{\mathbf{V}}$ выполняется равенство

$$\left(\overline{E} - \breve{E}\right)/\tau + \mathrm{div}\left((\mathbf{E}+\tau\mathbf{C})^{-1}\,\overline{\mathbf{V}}\right) + \varepsilon = 0.$$

В таком случае получаем уравнение

$$\left(\hat{\alpha}e^{i(\omega t+\hat{\varphi})} - \alpha e^{i(\omega(t-\tau)+\varphi)}\right)/\tau - \tau g\,\mathrm{div}\left((\mathbf{E}+\tau\mathbf{C})^{-1}\left(\hat{\alpha}e^{i(\omega t+\hat{\varphi})}\,\mathrm{grad}\,\overline{E} + \overline{H}\,\mathrm{grad}\left(\hat{\alpha}e^{i(\omega t+\hat{\varphi})}\right)\right)\right) =$$
$$= \tau\,\mathrm{div}\left((\mathbf{E}+\tau\mathbf{C})^{-1}\left(\gamma\overline{H}\,\mathrm{grad}\,\overline{E} - \mathbf{\upsilon}\right)e^{i(\omega t+o)}\right).$$

Дифференцируя, сокращая общие множители

$$\left(\hat{\alpha} - \alpha + i\alpha(\omega\tau + \hat{\varphi} - \varphi)\right)/\tau + \tau g\overline{H}\hat{\alpha}(\mathrm{grad}\,\hat{\varphi}, \mathrm{grad}\,\hat{\varphi}) -$$
$$-\tau g\,\mathrm{div}\left((\mathbf{E}+\tau\mathbf{C})^{-1}\left(\hat{\alpha}\,\mathrm{grad}\,\overline{E} + \overline{H}\,\mathrm{grad}\,\hat{\alpha}\right)\right) - i\tau g\,\mathrm{div}\left((\mathbf{E}+\tau\mathbf{C})^{-1}\,\overline{H}\hat{\alpha}\,\mathrm{grad}\,\hat{\varphi}\right) -$$
$$-i\tau g\left((\mathbf{E}+\tau\mathbf{C})^{-1}\left(\hat{\alpha}\,\mathrm{grad}\,\overline{E} + \overline{H}\,\mathrm{grad}\,\hat{\alpha}\right), \mathrm{grad}\,\hat{\varphi}\right) =$$
$$= \tau e^{i(o-\hat{\varphi})}\left(\mathrm{div}\left((\mathbf{E}+\tau\mathbf{C})^{-1}\left(\gamma\overline{H}\,\mathrm{grad}\,\overline{E} - \mathbf{\upsilon}\right)\right) + i\left((\mathbf{E}+\tau\mathbf{C})^{-1}\left(\gamma\overline{H}\,\mathrm{grad}\,\overline{E} - \mathbf{\upsilon}\right), \mathrm{grad}\,o\right)\right)$$

и разделяя действительную и мнимую части, получим:

$$\det(\mathbf{E}+\tau\mathbf{C})(\hat{\alpha} - \alpha)/\tau + \tau g\overline{H}\hat{\alpha}(\mathrm{grad}\,\hat{\varphi}, \mathrm{grad}\,\hat{\varphi}) - \tau g\,\mathrm{div}\left((\mathbf{E}-\tau\mathbf{C})\left(\hat{\alpha}\,\mathrm{grad}\,\overline{E} + \overline{H}\,\mathrm{grad}\,\hat{\alpha}\right)\right) =$$
$$= \tau\cos(\hat{\varphi} - o)\,\mathrm{div}\left((\mathbf{E}-\tau\mathbf{C})\left(\gamma\overline{H}\,\mathrm{grad}\overline{E} - \mathbf{\upsilon}\right)\right) +$$
$$+\tau\sin(\hat{\varphi} - o)\left((\mathbf{E}-\tau\mathbf{C})\left(\gamma\overline{H}\,\mathrm{grad}\,\overline{E} - \mathbf{\upsilon}\right), \mathrm{grad}\,o\right), \tag{2}$$

$$\det(\mathbf{E}+\tau\mathbf{C})\alpha\left((\hat{\varphi} - \varphi)/\tau + \omega\right) -$$
$$-\tau g\,\mathrm{div}\left(\overline{H}\hat{\alpha}(\mathbf{E}-\tau\mathbf{C})\,\mathrm{grad}\,\hat{\varphi}\right) - \tau g\left((\mathbf{E}-\tau\mathbf{C})\left(\hat{\alpha}\,\mathrm{grad}\,\overline{E} + \overline{H}\,\mathrm{grad}\,\hat{\alpha}\right), \mathrm{grad}\,\hat{\varphi}\right) =$$
$$= \tau\cos(\hat{\varphi} - o)\left((\mathbf{E}-\tau\mathbf{C})\left(\gamma\overline{H}\,\mathrm{grad}\,\overline{E} - \mathbf{\upsilon}\right), \mathrm{grad}\,o\right) -$$
$$-\tau\sin(\hat{\varphi} - o)\,\mathrm{div}\left((\mathbf{E}-\tau\mathbf{C})\left(\gamma\overline{H}\,\mathrm{grad}\,\overline{E} - \mathbf{\upsilon}\right)\right). \tag{3}$$

Преобразуем уравнение (3), умноженное на $\hat{\alpha}$:

$$\det(\mathbf{E}+\tau\mathbf{C})\alpha\hat{\alpha}\left((\hat{\varphi} - \varphi)/\tau + \omega\right) -$$
$$-\tau g\,\mathrm{div}\left(\overline{H}\hat{\alpha}^2(\mathbf{E}-\tau\mathbf{C})\,\mathrm{grad}\hat{\varphi}\right) + \tau g\left(\tau\overline{H}\mathbf{C}\,\mathrm{grad}\hat{\alpha}^2 - \hat{\alpha}^2(\mathbf{E}-\tau\mathbf{C})\,\mathrm{grad}\overline{E}, \mathrm{grad}\hat{\varphi}\right) =$$
$$= \tau\hat{\alpha}\cos(\hat{\varphi} - o)\left((\mathbf{E}-\tau\mathbf{C})\left(\gamma\overline{H}\,\mathrm{grad}\,\overline{E} - \mathbf{\upsilon}\right), \mathrm{grad}\,o\right) -$$
$$-\tau\hat{\alpha}\sin(\hat{\varphi} - o)\,\mathrm{div}\left((\mathbf{E}-\tau\mathbf{C})\left(\gamma\overline{H}\,\mathrm{grad}\,\overline{E} - \mathbf{\upsilon}\right)\right).$$

Уравнение (3) и полученное ниже уравнение указывают на возникновение неопределённости фазы при $\hat{\alpha} \to 0$. Поэтому рассмотрим вместо уравнения (3) его сумму с умноженным на $\hat{\varphi}$ уравнением (2)

$$\det(\mathbf{E}+\tau\mathbf{C})\big((\hat{\psi}-\psi)/\tau+\omega\alpha\big)+$$
$$+\tau g\overline{H}\hat{\psi}(\operatorname{grad}\hat{\varphi},\operatorname{grad}\hat{\varphi})-\tau g\operatorname{div}\big((\mathbf{E}-\tau\mathbf{C})(\hat{\psi}\operatorname{grad}\overline{E}+\overline{H}\operatorname{grad}\hat{\psi})\big)=$$
$$=\tau\big(\cos(\hat{\varphi}-o)+\hat{\varphi}\sin(\hat{\varphi}-o)\big)\big((\mathbf{E}-\tau\mathbf{C})(\gamma\overline{H}\operatorname{grad}\overline{E}-\mathbf{\upsilon}),\operatorname{grad}o\big)+$$
$$+\tau\big(\hat{\varphi}\cos(\hat{\varphi}-o)-\sin(\hat{\varphi}-o)\big)\operatorname{div}\big((\mathbf{E}-\tau\mathbf{C})(\gamma\overline{H}\operatorname{grad}\overline{E}-\mathbf{\upsilon})\big),$$

где $\hat{\psi}=\hat{\alpha}\hat{\varphi}$, $\psi=\alpha\varphi$. В итоге оператор уравнения оказывается таким же, как и оператор уравнения (2), что положительно с вычислительной точки зрения.

Для итерационной схемы

$$\det(\mathbf{E}+\tau\mathbf{C})\big(\alpha^{(j,i+1)}-\alpha^{(j-1)}\big)/\tau+\tau g\overline{H}\alpha^{(j,i+1)}\big(\operatorname{grad}\varphi^{(j-1)},\operatorname{grad}\varphi^{(j-1)}\big)-$$
$$-\tau g\operatorname{div}\Big((\mathbf{E}-\tau\mathbf{C})\big(\alpha^{(j,i+1)}\operatorname{grad}\overline{E}+\overline{H}\operatorname{grad}\alpha^{(j,i+1)}\big)\Big)=$$
$$=\tau\sin\big(\varphi^{(j,i)}-o\big)\big((\mathbf{E}-\tau\mathbf{C})(\gamma\overline{H}\operatorname{grad}\overline{E}-\mathbf{\upsilon}),\operatorname{grad}o\big)+$$
$$+\tau\cos\big(\varphi^{(j,i)}-o\big)\operatorname{div}\big((\mathbf{E}-\tau\mathbf{C})(\gamma\overline{H}\operatorname{grad}\overline{E}-\mathbf{\upsilon})\big),$$
$$\det(\mathbf{E}+\tau\mathbf{C})\big((\psi^{(j,i+1)}-\psi^{(j-1)})/\tau+\omega\alpha^{(j-1)}\big)+\tau g\overline{H}\psi^{(j,i+1)}\big(\operatorname{grad}\varphi^{(j-1)},\operatorname{grad}\varphi^{(j-1)}\big)-$$
$$-\tau g\operatorname{div}\Big((\mathbf{E}-\tau\mathbf{C})\big(\psi^{(j,i+1)}\operatorname{grad}\overline{E}+\overline{H}\operatorname{grad}\psi^{(j,i+1)}\big)\Big)=$$
$$=\tau\big(\cos(\varphi^{(j,i)}-o)+\varphi^{(j,i)}\sin(\varphi^{(j,i)}-o)\big)\big((\mathbf{E}-\tau\mathbf{C})(\gamma\overline{H}\operatorname{grad}\overline{E}-\mathbf{\upsilon}),\operatorname{grad}o\big)+$$
$$+\tau\big(\varphi^{(j,i)}\cos(\varphi^{(j,i)}-o)-\sin(\varphi^{(j,i)}-o)\big)\operatorname{div}\big((\mathbf{E}-\tau\mathbf{C})(\gamma\overline{H}\operatorname{grad}\overline{E}-\mathbf{\upsilon})\big),$$

где $\alpha^{(j)}=\lim\limits_{i\to\infty}\alpha^{(j,i)}$, $\psi^{(j)}=\lim\limits_{i\to\infty}\psi^{(j,i)}$ – полученные в процессе установления, а $\alpha^{(j,0)}=\alpha^{(j-1)}$, $\psi^{(j,0)}=\psi^{(j-1)}$ – начальные значения на j-м временном слое; $\phi^{(j,i)}=\big(\psi^{(j,i)}/\alpha^{(j,i)}\big)\bmod(2\pi)$, могут быть получены оценки решения и условия сходимости процесса установления.

Заметим, что для итерационной схемы

$$\det(\mathbf{E}+\tau\mathbf{C})\big(\alpha^{(j,i+1)}-\alpha^{(j-1)}\big)/\tau+\tau g\overline{H}\alpha^{(j,i+1)}\big(\operatorname{grad}\varphi^{(j,i)},\operatorname{grad}\varphi^{(j,i)}\big)-$$
$$-\tau g\operatorname{div}\big((\mathbf{E}-\tau\mathbf{C})(\alpha^{(j,i+1)}\operatorname{grad}\overline{E}+\overline{H}\operatorname{grad}\alpha^{(j,i+1)})\big)=$$
$$=\tau\sin\big(\varphi^{(j,i)}-o\big)\big((\mathbf{E}-\tau\mathbf{C})(\gamma\overline{H}\operatorname{grad}\overline{E}-\mathbf{\upsilon}),\operatorname{grad}o\big)+$$
$$+\tau\cos\big(\varphi^{(j,i)}-o\big)\operatorname{div}\big((\mathbf{E}-\tau\mathbf{C})(\gamma\overline{H}\operatorname{grad}\overline{E}-\mathbf{\upsilon})\big),$$
$$\det(\mathbf{E}+\tau\mathbf{C})\big((\psi^{(j,i+1)}-\psi^{(j-1)})/\tau+\omega\alpha^{(j-1)}\big)+\tau g\overline{H}\psi^{(j,i+1)}\big(\operatorname{grad}\varphi^{(j,i)},\operatorname{grad}\varphi^{(j,i)}\big)-$$
$$-\tau g\operatorname{div}\Big((\mathbf{E}-\tau\mathbf{C})\big(\psi^{(j,i+1)}\operatorname{grad}\overline{E}+\overline{H}\operatorname{grad}\psi^{(j,i+1)}\big)\Big)=$$
$$=\tau\big(\cos(\varphi^{(j,i)}-o)+\varphi^{(j,i)}\sin(\varphi^{(j,i)}-o)\big)\big((\mathbf{E}-\tau\mathbf{C})(\gamma\overline{H}\operatorname{grad}\overline{E}-\mathbf{\upsilon}),\operatorname{grad}o\big)+$$
$$+\tau\big(\varphi^{(j,i)}\cos(\varphi^{(j,i)}-o)-\sin(\varphi^{(j,i)}-o)\big)\operatorname{div}\big((\mathbf{E}-\tau\mathbf{C})(\gamma\overline{H}\operatorname{grad}\overline{E}-\mathbf{\upsilon})\big)$$

нижеследующие оценки получить не удаётся.

Рассмотрим упрощённый случай ветрового воздействия:

$$\left(1+\tau^2c^2\right)\alpha^{(j,i+1)}+\tau^2 g\overline{H}\alpha^{(j,i+1)}\left(\operatorname{grad}\varphi^{(j-1)},\operatorname{grad}\varphi^{(j-1)}\right)-$$
$$-\tau^2 g\operatorname{div}\left(\overline{H}\left(\mathbf{E}-\tau\mathbf{C}\right)\operatorname{grad}\alpha^{(j,i+1)}\right)=\left(1+\tau^2c^2\right)\alpha^{(j-1)}+\tau^2k\left(\mathbf{v},\mathbf{v}\right)\sin\left(\phi^{(j,i)}-o\right),$$
$$\left(1+\tau^2c^2\right)\psi^{(j,i+1)}+\tau^2 g\overline{H}\psi^{(j,i+1)}\left(\operatorname{grad}\varphi^{(j-1)},\operatorname{grad}\varphi^{(j-1)}\right)-$$
$$-\tau^2 g\operatorname{div}\left(\overline{H}\left(\mathbf{E}-\tau\mathbf{C}\right)\operatorname{grad}\psi^{(j,i+1)}\right)=$$
$$=\left(1+\tau^2c^2\right)\left(\psi^{(j-1)}-\tau\omega\alpha^{(j-1)}\right)+\tau^2k\left(\mathbf{v},\mathbf{v}\right)\left(\cos\left(\varphi^{(j,i)}-o\right)+\varphi^{(j,i)}\sin\left(\varphi^{(j,i)}-o\right)\right).$$

Сначала в предположении, что итерационный процесс установления сходится, получим оценки для установившегося решения, которые затем будут использованы для получения ограничений на итерационный параметр τ, обеспечивающих сходимость процесса установления. Итак, если процесс установления сходится, то решение удовлетворяет энергетическим соотношениям:

$$\left(1+\tau^2c^2+\tau^2 g\overline{H}\left(\operatorname{grad}\phi^{(j-1)},\operatorname{grad}\phi^{(j-1)}\right)\right)\left(\alpha^{(j)}\right)^2+\tau^2 g\overline{H}\left(\operatorname{grad}\alpha^{(j)},\operatorname{grad}\alpha^{(j)}\right)-$$
$$-\tau^2 g\operatorname{div}\left(\overline{H}\alpha^{(j)}\left(\mathbf{E}-\tau\mathbf{C}\right)\operatorname{grad}\alpha^{(j)}\right)=\left(1+\tau^2c^2\right)\alpha^{(j)}\alpha^{(j-1)}+\tau^2k\left(\mathbf{v},\mathbf{v}\right)\alpha^{(j)}\sin\left(\varphi^{(j)}-o\right),$$
$$\left(1+\tau^2c^2+\tau^2 g\overline{H}\left(\operatorname{grad}\varphi^{(j-1)},\operatorname{grad}\varphi^{(j-1)}\right)\right)\left(\psi^{(j)}\right)^2+\tau^2 g\overline{H}\left(\operatorname{grad}\psi^{(j)},\operatorname{grad}\psi^{(j)}\right)-$$
$$-\tau^2 g\operatorname{div}\left(\overline{H}\psi^{(j)}\left(\mathbf{E}-\tau\mathbf{C}\right)\operatorname{grad}\psi^{(j)}\right)=\left(1+\tau^2c^2\right)\psi^{(j)}\left(\psi^{(j-1)}-\tau\omega\alpha^{(j-1)}\right)+$$
$$+\tau^2k\left(\mathbf{v},\mathbf{v}\right)\psi^{(j)}\left(\cos\left(\varphi^{(j)}-o\right)+\varphi^{(j)}\sin\left(\varphi^{(j)}-o\right)\right).$$

Учитывая знакоопределённость отдельных слагаемых, для норм получаем:

$$\left(1+\tau^2c^2\right)\left\|\alpha^{(j)}\right\|^2\le\left(1+\tau^2c^2\right)\left\|\alpha^{(j-1)}\right\|\left\|\alpha^{(j)}\right\|+\tau^2k\left(\mathbf{v},\mathbf{v}\right)\left\|\alpha^{(j)}\right\|\left\|\sin\left(\varphi^{(j)}-o\right)\right\|\le$$
$$\le\tfrac{1}{2}\left(1+\tau^2c^2\right)\left(\left\|\alpha^{(j-1)}\right\|^2+\left\|\alpha^{(j)}\right\|^2\right)+\tau^2\sqrt{S}k\left(\mathbf{v},\mathbf{v}\right)\left\|\alpha^{(j)}\right\|,$$
$$\left(1+\tau^2c^2\right)\left\|\psi^{(j)}\right\|^2\le\left(1+\tau^2c^2\right)\left\|\psi^{(j)}\right\|\left(\left\|\psi^{(j-1)}\right\|+\tau\omega\left\|\alpha^{(j-1)}\right\|\right)+$$
$$+\tau^2k\left(\mathbf{v},\mathbf{v}\right)\left\|\psi^{(j)}\right\|\left\|\cos\left(\varphi^{(j)}-o\right)+\varphi^{(j)}\sin\left(\varphi^{(j)}-o\right)\right\|\le$$
$$\le\tfrac{1}{2}\left(1+\tau^2c^2\right)\left(\left\|\psi^{(j-1)}\right\|^2+\left\|\psi^{(j)}\right\|^2+2\tau\omega\left\|\alpha^{(j-1)}\right\|\left\|\psi^{(j)}\right\|\right)+\tau^2k\left(\mathbf{v},\mathbf{v}\right)m_j\left\|\psi^{(j)}\right\|,$$

где $\|f\|^2=\iint\limits_R f^2dxdy$; на границе ∂R области R предполагаются условия первого ($\alpha^{(j)}=0$, $\psi^{(j)}=0$) или второго ($\operatorname{grad}\alpha^{(j)}=\mathbf{0}$, $\operatorname{grad}\psi^{(j)}=\mathbf{0}$) рода; $S=\iint\limits_R dxdy$ – площадь области R; $m_j=\left\|\cos\left(\varphi^{(j)}-o\right)+\varphi^{(j)}\sin\left(\varphi^{(j)}-o\right)\right\|\le\tfrac{7}{2}\pi\sqrt{S}$ при $0\le\varphi^{(j)},o<2\pi$ (если фаза определяется в этих границах).

Преобразуя и продолжая процесс, получим (при $\left\|\alpha^{(0)}\right\|=0$, $\left\|\psi^{(0)}\right\|=0$):

$$\tfrac{1}{2}\left(1+\tau^2c^2\right)\left\|\alpha^{(j)}\right\|^2\le\tfrac{1}{2}\left(1+\tau^2c^2\right)\left\|\alpha^{(j-1)}\right\|^2+\tau^2\sqrt{S}k\left(\mathbf{v},\mathbf{v}\right)\left\|\alpha^{(j)}\right\|\le\ldots$$
$$\ldots\le\tau^2\sqrt{S}k\left(\mathbf{v},\mathbf{v}\right)\left(\left\|\alpha^{(j)}\right\|+\left\|\alpha^{(j-1)}\right\|+\ldots+\left\|\alpha^{(1)}\right\|\right),$$
$$\tfrac{1}{2}\left(1+\tau^2c^2\right)\left\|\psi^{(j)}\right\|^2\le\left(1+\tau^2c^2\right)\left(\tfrac{1}{2}\left\|\psi^{(j-1)}\right\|^2+\tau\omega\left\|\alpha^{(j-1)}\right\|\left\|\psi^{(j)}\right\|\right)+\tau^2k\left(\mathbf{v},\mathbf{v}\right)m_j\left\|\psi^{(j)}\right\|\le\ldots$$
$$\ldots\le\left(1+\tau^2c^2\right)\tau\omega\left(\left\|\alpha^{(j-1)}\right\|\left\|\psi^{(j)}\right\|+\ldots+\left\|\alpha^{(1)}\right\|\left\|\psi^{(2)}\right\|\right)+\tfrac{7}{2}\tau^2\pi\sqrt{S}k\left(\mathbf{v},\mathbf{v}\right)\left(\left\|\psi^{(j)}\right\|+\ldots+\left\|\psi^{(1)}\right\|\right).$$

Пусть $\|\alpha\|_j = \max\limits_{1\le i\le j}\left\|\alpha^{(i)}\right\| = \left\|\alpha^{(k)}\right\|$, $\|\psi\|_j = \max\limits_{1\le i\le j}\left\|\psi^{(i)}\right\| = \left\|\psi^{(n)}\right\|$,

где $1\le k,n\le j$,

$$\tfrac{1}{2}\left(1+\tau^2c^2\right)\|\alpha\|_j^2 = \tfrac{1}{2}\left(1+\tau^2c^2\right)\left\|\alpha^{(k)}\right\|^2 \le \tau^2\sqrt{S}k(\boldsymbol{\upsilon},\boldsymbol{\upsilon})\left(\left\|\alpha^{(k)}\right\|+\left\|\alpha^{(k-1)}\right\|+\ldots+\left\|\alpha^{(1)}\right\|\right)\le$$

$$\le \tau^2\sqrt{S}k(\boldsymbol{\upsilon},\boldsymbol{\upsilon})\left(\left\|\alpha^{(j)}\right\|+\left\|\alpha^{(j-1)}\right\|+\ldots+\left\|\alpha^{(1)}\right\|\right)\le \tau^2 j\sqrt{S}k(\boldsymbol{\upsilon},\boldsymbol{\upsilon})\|\alpha\|_j,$$

$$\tfrac{1}{2}\left(1+\tau^2c^2\right)\|\psi\|_j^2 = \tfrac{1}{2}\left(1+\tau^2c^2\right)\left\|\psi^{(n)}\right\|^2 \le$$

$$\le \left(1+\tau^2c^2\right)\tau\omega\left(\left\|\alpha^{(n-1)}\right\|\left\|\psi^{(n)}\right\|+\ldots+\left\|\alpha^{(1)}\right\|\left\|\psi^{(2)}\right\|\right)+\tfrac{7}{2}\tau^2\pi\sqrt{S}k(\boldsymbol{\upsilon},\boldsymbol{\upsilon})\left(\left\|\psi^{(n)}\right\|+\ldots+\left\|\psi^{(1)}\right\|\right)\le$$

$$\le \left(1+\tau^2c^2\right)\tau\omega\left(\left\|\alpha^{(j-1)}\right\|\left\|\psi^{(j)}\right\|+\ldots+\left\|\alpha^{(1)}\right\|\left\|\psi^{(2)}\right\|\right)+\tfrac{7}{2}\tau^2\pi\sqrt{S}k(\boldsymbol{\upsilon},\boldsymbol{\upsilon})\left(\left\|\psi^{(j)}\right\|+\ldots+\left\|\psi^{(1)}\right\|\right)\le$$

$$\le \left(\left(1+\tau^2c^2\right)\tau\omega\|\alpha\|_{j-1}+\tfrac{7}{2}\tau^2\pi\sqrt{S}k(\boldsymbol{\upsilon},\boldsymbol{\upsilon})\right)\left(\left\|\psi^{(j)}\right\|+\ldots+\left\|\psi^{(2)}\right\|+\left\|\psi^{(1)}\right\|\right)\le$$

$$\le j\left(\left(1+\tau^2c^2\right)\tau\omega\|\alpha\|_{j-1}+\tfrac{7}{2}\tau^2\pi\sqrt{S}k(\boldsymbol{\upsilon},\boldsymbol{\upsilon})\right)\|\psi\|_j.$$

Таким образом, справедливы неравенства

$$\tfrac{1}{2}\left(1+\tau^2c^2\right)\|\alpha\|_j \le \tau^2 j\sqrt{S}k(\boldsymbol{\upsilon},\boldsymbol{\upsilon}),$$

$$\|\alpha\|_j \le \frac{2\tau}{1+\tau^2c^2}j\tau\sqrt{S}k(\boldsymbol{\upsilon},\boldsymbol{\upsilon})\le c^{-1}j\tau\sqrt{S}k(\boldsymbol{\upsilon},\boldsymbol{\upsilon}). \qquad (4)$$

Здесь использовано выражение

$$\left|\frac{2\tau}{1+\tau^2c^2}\right|\le\frac{1}{c},\ \left(\frac{\tau}{1+\tau^2c^2}\right)'_\tau = \frac{1}{1+\tau^2c^2}-\frac{2\tau^2c^2}{\left(1+\tau^2c^2\right)^2}=\frac{1-\tau^2c^2}{\left(1+\tau^2c^2\right)^2}.$$

С учётом оценок (4), получаем

$$\tfrac{1}{2}\left(1+\tau^2c^2\right)\|\psi\|_j \le j\left(\left(1+\tau^2c^2\right)\tau\omega\|\alpha\|_{j-1}+\tfrac{7}{2}\tau^2\pi\sqrt{S}k(\boldsymbol{\upsilon},\boldsymbol{\upsilon})\right)\le$$

$$\le \tau^2 j\left(2(j-1)\tau\omega+\tfrac{7}{2}\pi\right)\sqrt{S}k(\boldsymbol{\upsilon},\boldsymbol{\upsilon}),$$

откуда

$$\tfrac{1}{2}\left(1+\tau^2c^2\right)\|\psi\|_j \le \tau^2 j\left(2(j-1)\tau\omega+\tfrac{7}{2}\pi\right)\sqrt{S}k(\boldsymbol{\upsilon},\boldsymbol{\upsilon}),$$

$$\|\psi\|_j \le c^{-1}j\tau\left(2(j-1)\tau\omega+\tfrac{7}{2}\pi\right)\sqrt{S}k(\boldsymbol{\upsilon},\boldsymbol{\upsilon}).$$

Перейдем к условиям сходимости процесса установления. Благодаря наличию знакоопределённого слагаемого (диагонального преобладания) сходимость на самом внутреннем уровне проблем не вызывает. Рассмотрим разность двух последовательных итераций процесса установления:

$$\left(1+\tau^2c^2+\tau^2 g\overline{H}\left(\operatorname{grad}\phi^{(j-1)},\operatorname{grad}\phi^{(j-1)}\right)\right)\left(\alpha^{(j,i+1)}-\alpha^{(j,i)}\right)-$$

$$-\tau^2 g\operatorname{div}\left(\overline{H}(\mathbf{E}-\tau\mathbf{C})\operatorname{grad}\left(\alpha^{(j,i+1)}-\alpha^{(j,i)}\right)\right)=\tau^2k(\boldsymbol{\upsilon},\boldsymbol{\upsilon})\left(\sin\left(\varphi^{(j,i)}-o\right)-\sin\left(\varphi^{(j,i-1)}-o\right)\right),$$

$$\left(1+\tau^2c^2+\tau^2 g\overline{H}\left(\operatorname{grad}\varphi^{(j-1)},\operatorname{grad}\varphi^{(j-1)}\right)\right)\left(\psi^{(j,i+1)}-\psi^{(j,i)}\right)-$$

$$-\tau^2 g\operatorname{div}\left(\overline{H}(\mathbf{E}-\tau\mathbf{C})\operatorname{grad}\left(\psi^{(j,i+1)}-\psi^{(j,i)}\right)\right)=$$

$$= \tau^2 k(\mathbf{v},\mathbf{v})\left(\cos\left(\varphi^{(j,i)}-o\right)-\cos\left(\varphi^{(j,i-1)}-o\right)\right)+$$
$$+\tau^2 k(\mathbf{v},\mathbf{v})\left(\varphi^{(j,i)}\sin\left(\varphi^{(j,i)}-o\right)-\varphi^{(j,i-1)}\sin\left(\varphi^{(j,i-1)}-o\right)\right).$$

Преобразуем нелинейное слагаемое правой части

$$\left(1+\tau^2c^2+\tau^2 g\overline{H}\left(\operatorname{grad}\varphi^{(j-1)},\operatorname{grad}\varphi^{(j-1)}\right)\right)\left(\psi^{(j,i+1)}-\psi^{(j,i)}\right)-$$
$$-\tau^2 g\operatorname{div}\left(\overline{H}(\mathbf{E}-\tau\mathbf{C})\operatorname{grad}\left(\psi^{(j,i+1)}-\psi^{(j,i)}\right)\right)=$$
$$=\tau^2 k(\mathbf{v},\mathbf{v})\left(\cos\left(\varphi^{(j,i)}-o\right)-\cos\left(\varphi^{(j,i-1)}-o\right)\right)+$$
$$+\tau^2 k(\mathbf{v},\mathbf{v})\left(\varphi^{(j,i)}\left(\sin\left(\varphi^{(j,i)}-o\right)-\sin\left(\varphi^{(j,i-1)}-o\right)\right)+\left(\varphi^{(j,i)}-\varphi^{(j,i-1)}\right)\sin\left(\varphi^{(j,i-1)}-o\right)\right)$$

и используем тригонометрические соотношения:

$$\left(1+\tau^2c^2+\tau^2 g\overline{H}\left(\operatorname{grad}\varphi^{(j-1)},\operatorname{grad}\varphi^{(j-1)}\right)\right)\left(\alpha^{(j,i+1)}-\alpha^{(j,i)}\right)-$$
$$-\tau^2 g\operatorname{div}\left(\overline{H}(\mathbf{E}-\tau\mathbf{C})\operatorname{grad}\left(\alpha^{(j,i+1)}-\alpha^{(j,i)}\right)\right)=$$
$$=2\tau^2 k(\mathbf{v},\mathbf{v})\cos\left(\tfrac{1}{2}\left(\varphi^{(j,i)}+\varphi^{(j,i-1)}\right)-o\right)\sin\left(\tfrac{1}{2}\left(\varphi^{(j,i)}-\varphi^{(j,i-1)}\right)\right),$$
$$\left(1+\tau^2c^2+\tau^2 g\overline{H}\left(\operatorname{grad}\varphi^{(j-1)},\operatorname{grad}\varphi^{(j-1)}\right)\right)\left(\psi^{(j,i+1)}-\psi^{(j,i)}\right)-$$
$$-\tau^2 g\operatorname{div}\left(\overline{H}(\mathbf{E}-\tau\mathbf{C})\operatorname{grad}\left(\psi^{(j,i+1)}-\psi^{(j,i)}\right)\right)=\tau^2 k(\mathbf{v},\mathbf{v})\left(\varphi^{(j,i)}-\varphi^{(j,i-1)}\right)\sin\left(\varphi^{(j,i-1)}-o\right)+$$
$$+2\tau^2 k(\mathbf{v},\mathbf{v})\varphi^{(j,i)}\cos\left(\tfrac{1}{2}\left(\varphi^{(j,i)}+\varphi^{(j,i-1)}\right)-o\right)\sin\left(\tfrac{1}{2}\left(\varphi^{(j,i)}-\varphi^{(j,i-1)}\right)\right)-$$
$$-2\tau^2 k(\mathbf{v},\mathbf{v})\sin\left(\tfrac{1}{2}\left(\varphi^{(j,i)}+\varphi^{(j,i-1)}\right)-o\right)\sin\left(\tfrac{1}{2}\left(\varphi^{(j,i)}-\varphi^{(j,i-1)}\right)\right).$$

Перейдём к энергетическим соотношениям и, используя свойства дифференциальных операторов

$$\left(1+\tau^2c^2+\tau^2 g\overline{H}\left(\operatorname{grad}\varphi^{(j-1)},\operatorname{grad}\varphi^{(j-1)}\right)\right)\left(\alpha^{(j,i+1)}-\alpha^{(j,i)}\right)^2-$$
$$-\tau^2 g\operatorname{div}\left(\overline{H}\left(\alpha^{(j,i+1)}-\alpha^{(j,i)}\right)(\mathbf{E}-\tau\mathbf{C})\operatorname{grad}\left(\alpha^{(j,i+1)}-\alpha^{(j,i)}\right)\right)+$$
$$+\tau^2 g\overline{H}\left(\operatorname{grad}\left(\alpha^{(j,i+1)}-\alpha^{(j,i)}\right),\operatorname{grad}\left(\alpha^{(j,i+1)}-\alpha^{(j,i)}\right)\right)=$$
$$=2\tau^2 k(\mathbf{v},\mathbf{v})\left(\alpha^{(j,i+1)}-\alpha^{(j,i)}\right)\cos\left(\tfrac{1}{2}\left(\varphi^{(j,i)}+\varphi^{(j,i-1)}\right)-o\right)\sin\left(\tfrac{1}{2}\left(\varphi^{(j,i)}-\varphi^{(j,i-1)}\right)\right),$$
$$\left(1+\tau^2c^2+\tau^2 g\overline{H}\left(\operatorname{grad}\varphi^{(j-1)},\operatorname{grad}\varphi^{(j-1)}\right)\right)\left(\psi^{(j,i+1)}-\psi^{(j,i)}\right)^2-$$
$$-\tau^2 g\operatorname{div}\left(\overline{H}\left(\psi^{(j,i+1)}-\psi^{(j,i)}\right)(\mathbf{E}-\tau\mathbf{C})\operatorname{grad}\left(\psi^{(j,i+1)}-\psi^{(j,i)}\right)\right)+$$
$$+\tau^2 g\overline{H}\left(\operatorname{grad}\left(\psi^{(j,i+1)}-\psi^{(j,i)}\right),\operatorname{grad}\left(\psi^{(j,i+1)}-\psi^{(j,i)}\right)\right)=$$
$$=-2\tau^2 k(\mathbf{v},\mathbf{v})\left(\psi^{(j,i+1)}-\psi^{(j,i)}\right)\sin\left(\tfrac{1}{2}\left(\varphi^{(j,i)}+\varphi^{(j,i-1)}\right)-o\right)\sin\left(\tfrac{1}{2}\left(\varphi^{(j,i)}-\varphi^{(j,i-1)}\right)\right)+$$
$$+\tau^2 k(\mathbf{v},\mathbf{v})\left(\psi^{(j,i+1)}-\psi^{(j,i)}\right)\left(\varphi^{(j,i)}-\varphi^{(j,i-1)}\right)\sin\left(\varphi^{(j,i)}-o\right)+$$
$$+2\tau^2 k(\mathbf{v},\mathbf{v})\left(\psi^{(j,i+1)}-\psi^{(j,i)}\right)\varphi^{(j,i-1)}\cos\left(\tfrac{1}{2}\left(\varphi^{(j,i)}+\varphi^{(j,i-1)}\right)-o\right)\sin\left(\tfrac{1}{2}\left(\varphi^{(j,i)}-\varphi^{(j,i-1)}\right)\right),$$

получим соотношения для норм:

$$\left(1+\tau^2c^2\right)\left\|\alpha^{(j,i+1)}-\alpha^{(j,i)}\right\|^2\le\tau^2 k(\mathbf{v},\mathbf{v})\left\|\alpha^{(j,i+1)}-\alpha^{(j,i)}\right\|\left\|\varphi^{(j,i)}-\varphi^{(j,i-1)}\right\|,$$
$$\left(1+\tau^2c^2\right)\left\|\psi^{(j,i+1)}-\psi^{(j,i)}\right\|^2\le\tau^2 k(\mathbf{v},\mathbf{v})l^{(j,i)}\left\|\psi^{(j,i+1)}-\psi^{(j,i)}\right\|\left\|\varphi^{(j,i)}-\varphi^{(j,i-1)}\right\|,$$

где

$$l^{(j,i)}\le 2(1+\pi)\ \text{при}\ 0\le\varphi^{(j,i-1)},\varphi^{(j,i)},o<2\pi\,;\ l^{(j,i)}=$$
$$=\sup\left(\left|\sin\left(\varphi^{(j,i)}-o\right)\right|+\left|-\sin\left(\tfrac{1}{2}\left(\varphi^{(j,i)}+\varphi^{(j,i-1)}\right)-o\right)+\varphi^{(j,i-1)}\cos\left(\tfrac{1}{2}\left(\varphi^{(j,i)}+\varphi^{(j,i-1)}\right)-o\right)\right|\right).$$

После сокращения получим

$$\left(1+\tau^2c^2\right)\left\|\alpha^{(j,i+1)}-\alpha^{(j,i)}\right\|\le\tau^2k(\mathbf{v},\mathbf{v})\left\|\varphi^{(j,i)}-\varphi^{(j,i-1)}\right\|,$$

$$\left(1+\tau^2c^2\right)\left\|\psi^{(j,i+1)}-\psi^{(j,i)}\right\|\le2\tau^2(1+\pi)k(\mathbf{v},\mathbf{v})\left\|\varphi^{(j,i)}-\varphi^{(j,i-1)}\right\|.$$

Учитывая представления

$$\varphi^{(j,i)}-\varphi^{(j,i-1)}=\frac{\psi^{(j,i)}}{\alpha^{(j,i)}}-\frac{\psi^{(j,i-1)}}{\alpha^{(j,i-1)}}=\frac{\psi^{(j,i)}-\psi^{(j,i-1)}}{\alpha^{(j,i)}}-\varphi^{(j,i-1)}\frac{\alpha^{(j,i)}-\alpha^{(j,i-1)}}{\alpha^{(j,i)}},$$

$$\alpha^{(j,i)}\left(\varphi^{(j,i)}-\varphi^{(j,i-1)}\right)=\psi^{(j,i)}-\psi^{(j,i-1)}-\varphi^{(j,i-1)}\left(\alpha^{(j,i)}-\alpha^{(j,i-1)}\right),$$

получим

$$\left\|\varphi^{(j,i+1)}-\varphi^{(j,i)}\right\|\le\left\|\frac{1}{\alpha^{(j,i+1)}}\right\|\left(\left\|\psi^{(j,i+1)}-\psi^{(j,i)}\right\|+\left\|\varphi^{(j,i)}\right\|\left\|\alpha^{(j,i+1)}-\alpha^{(j,i)}\right\|\right)\le$$

$$\le\frac{2(1+2\pi)\tau^2k(\mathbf{v},\mathbf{v})}{1+\tau^2c^2}\left\|\frac{1}{\alpha^{(j,i+1)}}\right\|\left\|\varphi^{(j,i)}-\varphi^{(j,i-1)}\right\|.$$

Для сходимости со скоростью $\left\|\varphi^{(j,i+1)}-\varphi^{(j,i)}\right\|\le q\left\|\varphi^{(j,i)}-\varphi^{(j,i-1)}\right\|$ с $0\le q<1$ требуется $\dfrac{2(1+2\pi)\tau^2k(\mathbf{v},\mathbf{v})}{1+\tau^2c^2}\left\|\dfrac{1}{\alpha^{(j,i+1)}}\right\|\le q$. Учитывая, что $\sqrt{S}=\left\|\alpha\cdot(1/\alpha)\right\|\le$ $\le\|\alpha\|\cdot\|1/\alpha\|$, откуда $\sqrt{S}\|1/\alpha\|^{-1}\le\|\alpha\|$, и с учётом (4), получаем

$$\frac{2(1+2\pi)\tau^2\sqrt{S}k(\mathbf{v},\mathbf{v})}{1+\tau^2c^2}\le q\sqrt{S}\left\|\frac{1}{\alpha^{(j,i+1)}}\right\|^{-1}\le q\left\|\alpha^{(j,i+1)}\right\|\le q\|\alpha\|_j\le c^{-1}j\tau\sqrt{S}k(\mathbf{v},\mathbf{v})q,$$

т.е.

$$2(1+2\pi)\tau c\le jq\left(1+\tau^2c^2\right). \tag{5}$$

При $1+2\pi>jq$ уравнение $2(1+2\pi)\tau c=jq\left(1+\tau^2c^2\right)$ имеет корни:

$$c\tau_1=\frac{1+2\pi}{jq}-\sqrt{\left(\frac{1+2\pi}{jq}\right)^2-1},\quad c\tau_2=\frac{1+2\pi}{jq}+\sqrt{\left(\frac{1+2\pi}{jq}\right)^2-1}.$$

Для выполнения (5) необходимо $\tau\in[0;\tau_1]\cup[\tau_2;+\infty[$. Ограничению $0\le\tau\le\tau_1$ соответствует возможность моделирования динамики в пределах одного периода $2\pi\Omega^{-1}$. Но для получения амплитудно-частотной и фазочастотной карт необходимо, чтобы шаг $\tau\ge\tau_2$ охватывал несколько периодов $2\pi\Omega^{-1}$. С учётом равенства $c^2\tau_1\tau_2=1$, для значений самих корней можно указать оценки:

$$\tau_2\le\frac{2(1+2\pi)}{cjq},\qquad\tau_1\ge\frac{jq}{2c(1+2\pi)}.$$

Из сходимости

$$\left\|\varphi^{(j,i+1)}-\varphi^{(j,i)}\right\|\le q\left\|\varphi^{(j,i)}-\varphi^{(j,i-1)}\right\|\le\ldots\le q^i\left\|\varphi^{(j,1)}-\varphi^{(j-1)}\right\|$$

следует сходимость процессов установления:

$$\left(1+\tau^2c^2\right)\left\|\alpha^{(j,i+1)}-\alpha^{(j,i)}\right\|\le\tau^2k(\mathbf{v},\mathbf{v})q^{i-1}\left\|\varphi^{(j,1)}-\varphi^{(j-1)}\right\|,$$

$$\left(1+\tau^2 c^2\right)\left\|\psi^{(j,i+1)}-\psi^{(j,i)}\right\| \le 2\tau^2(1+\pi)k(\mathbf{v},\mathbf{v})q^{i-1}\left\|\varphi^{(j,1)}-\varphi^{(j-1)}\right\|.$$

Заметим, что при $1+2\pi \le jq$ условие (5) выполняется при любом τ, т.е., начиная с временного слоя $j=8$, в любом случае может быть указано $0 \le q < 1$, независимо от τ. Для последующих временных слоёв значение q может быть уменьшено, что означает ускорение сходимости. Это полностью подтверждается практикой численного моделирования. На начальных итерациях процесса установления невязка может возрастать, затем наблюдается монотонное убывание, причём от временного слоя к слою убывание ускоряется.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Васильев В.С., Сухинов А.И.* Прецизионные двумерные модели мелких водоемов // Математическое моделирование. – 2003. – Т. 15, № 10. – С. 17-34.
2. *Филатов Н.Н.* Гидродинамика озер. – СПб.: Наука, 1991. – 200 с.
3. *Богданов К.*Т. Приливные явления в Тихом океане. – М.: Наука, 1994. – 144 с.

Статью рекомендовал к опубликованию д.т.н., профессор Я.Е. Ромм.

Васильев Владислав Сергеевич – Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Южный федеральный университет»; e-mail: sunspire@mail.ru; 347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44; тел.: 88634371606; кафедра высшей математики; к.ф.-м.н.; доцент.

Vasiliev Vladislav Sergeevich – Federal State-Owned Autonomy Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”; e-mail: sunspire@mail.ru; 44, Nekrasovsky, Taganrog, 347928, Russia; phone: +78634371606; the department of higher mathematics; cand. of. eng. sc.; associate professor.

УДК 534.22

И.Э. Гамолина, В.В. Дурягина, В.В. Семенистый

ДОЗВУКОВОЕ ОБТЕКАНИЕ ПРОФИЛЕЙ

Рассматриваются вопросы, связанные с исследованием параметров дозвукового потока вязкого газа возле несимметричных крыловых профилей с локальными сверхзвуковыми и циркуляционными зонами. Численное решение строится в расчетной области типа "С", получающейся при минимизации функционала, являющегося критерием гладкости и ортогональности расчетной сетки. При численном моделировании использовалась схема расщепления по физическим процессам и пространственным направлениям, которая обеспечивает достаточную точность результатов и адекватно отражает физическую сложность задачи. Приведены результаты численного эксперимента для коэффициента давления на профиле крыла в двумерном случае.

Аэродинамика; дозвуковой поток; система уравнений Навье–Стокса; схема расщепления; метод дробных шагов; крыловой профиль.

I.E. Gamolina, V.V. Duryagina, V.V. Semenistyi

SUBSONIC PROFILES FLOW

The numerical modeling of an in viscid flow of plane wing profiles in up to sound operational modes is considered. The complexity of aerodynamic processes with possible circulating zones of a separation of a boundary layer requires qualitative calculation with the purpose of deriving the improved designer wing performances. The used finite difference scheme with decomposition of a difference operator on space and physical processes precisely approximates the ini-