

УДК 581.1

**И.А. Кипнис, Ю.М. Вернигоров****КАПИЛЛЯРНАЯ МОДЕЛЬ ГАБИТУСА РАСТЕНИЙ**

*Проведено математическое моделирование продвижения воды в ветвящихся капиллярных системах. Получены соотношения, позволяющие моделировать распределение восходящего тока воды в сосудистой системе растений разных габитусов. Установлено, что наличие многоярусных боковых ветвей позволяет воде подниматься в центральном вертикальном капилляре на большую высоту, чем при их отсутствии. При этом высота подъема воды в вертикальном капилляре не зависит от формы ветвей. Абсолютная величина продвижения воды в криволинейных капиллярах при прочих равных условиях всегда больше, чем в прямолинейных. Показано, что свой специфический внешний вид растения приобретают благодаря наличию капиллярной системы.*

*Растение; модель; капилляр; габитус.*

**I.A. Kipnis, Yu.M. Vernigorov****THE CAPILLARY MODEL HABITUS PLANTS**

*Mathematical modeling of advance of water in branching capillary systems is carried out. The ratios, allowing to model distribution of ascending current of water in vascular system of plants different habitus are received. It is established that existence of many-tier lateral branches allows water to rise in the central vertical capillary by big height, than at their absence. Thus height of rising of water in a vertical capillary doesn't depend on a form of branches. The absolute size of advance of water in curvilinear capillaries other things being equal always is more, than in the rectilinear. It is shown that the specific appearance of a plant gain thanks to existence of capillary system.*

*Plant, model; capillary; habitus.*

Габитус и архитектурные формы древесных растений весьма разнообразны. Прямолинейность свойственна стволам и ветвям многих растений, например одноствольному поликарлику в модели Ру (Roux) или одноствольному монокарлику в модели Массара (Massarat). Однако боковые побеги часто выглядят как разнообразные математические кривые линии. Причиной нелинейности боковых побегов может быть сложное совместное воздействие на них ауксина и таких явлений как отрицательный гравитропизм, фото-, термо- и хемотропизмы. Криволинейные ветви могут иметь самый разный вид. Так, например, ствол фанерофитов [1] вертикален, а боковые ветви напоминают математическую экспоненциальную кривую. Внешне боковые побеги эвгалофита солероса (*Salicornia* sp.) [2] имеют вид параболических кривых, попарно симметрично отходящих от прямолинейного ствола. Точно также расположены боковые побеги погремка большого (*Rhinanthus major*) [2].

В огромном разнообразии архитектурных конструкций растений можно найти побеговые системы, отходящие от стволов криволинейно [2]. К ним относятся, например, конструктивные модели Аттимса (Attims), Лейвенберга (Leewenberg), Рау (Rauh), Скарроне (Scarrone), ветви которых имеют вид параболической кривой. Дихотомически ветвящиеся побеги куртинообразующего поликарлика в модели Шута (Schoute) имеют экспоненциальную форму ветвей первого порядка и параболическую – ветвей второго порядка.

Естественно, что водопроводящие пути (ксилема) таких растений (или отдельных их частей) должна по виду соответствовать той части растения, в которой она расположена, что предполагает пространственную кривизну цепочек и трахеид и сосудов их составляющих

**Цель работы.** Показать, что капиллярная система водопроводящих путей растений – один из основных факторов формирования специфического габитуса и архитектурных форм растений.

**Расчетная модель.** Подъем воды  $h$  в прямолинейном капилляре радиуса  $r$ , наклоненном под углом  $\beta$  к поверхности воды плотности  $\rho$ , с коэффициентом поверхностного натяжения  $\sigma$  и углом смачивания равным  $\alpha$  можно записать в виде [3]:

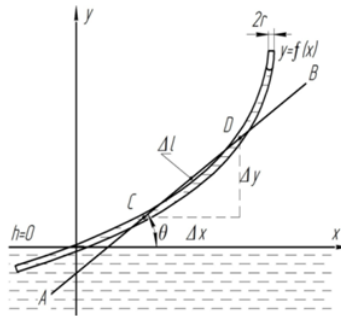


Рис. 1. Расчетная модель криволинейного капилляра

$$h = L \sin \beta = 2 \sigma \cos \alpha / (r \rho g), \quad (1)$$

где  $L$  – величина продвижения воды вдоль капилляра. Согласно (1), величина  $h$  не зависит от  $\beta$ , а всегда определяется только свойствами жидкости и радиусом капилляра.

Предположим, что капилляр радиуса  $r$  в общем случае не является прямым, а изогнут в виде кривой  $y = f(x)$ . Введем декартову систему координат и совместим ее начало с началом капилляра на поверхности воды при  $h=0$  (рис. 1). Условие равновесия воды в таком капилляре можно записать следующим образом:

$$V(x)P(x) = 2 \pi r \sigma \cos \alpha, \quad (2)$$

где  $V(x)$  – объем, поднимаемой в капилляре воды;  $P(x)$  – составляющая веса единицы объема столба воды, противодействующая ее подъему.

Для определения величин, входящих в левую часть уравнения (2), выделим с помощью секущей  $AB$  произвольный участок кривой  $\Delta l$ . Объем воды на этом участке может быть записан в виде

$$\Delta V \approx \pi r^2 \Delta l. \quad (3)$$

Построим далее прямоугольный треугольник со сторонами  $\Delta x$  и  $\Delta y$  и гипотенузой  $CD$ . Тогда для  $\Delta P(x)$  можно записать

$$\Delta P(x) \approx \rho g \sin \theta, \quad (4)$$

где  $\theta$  – угол наклона секущей  $AB$  к горизонтали. Если  $\Delta l \rightarrow 0$ , то  $\Delta x \rightarrow dx$ ,  $\Delta y \rightarrow dy$ , а  $\Delta l \rightarrow dl$ . При этом секущая  $AB$  превращается в касательную к рассматриваемой кривой в точке  $x$ , а тангенс угла наклона этой касательной  $\operatorname{tg} \theta = dy/dx$  или  $\operatorname{tg} \theta$  равен производной  $y' = f'(x)$ . Интегрируя (3) и (4) соответственно по  $l$  и по  $\theta$ , и вводя обозначение для продвижения воды в капилляре в виде  $L_{1\text{пр}}^{(1)}(x) = \int_1 f(x) dl$  уравнение (2) приводится к виду

$$L_{1(\text{пр})}^{(1)}(x) \pi r^2 \rho g (1 - \cos \theta) = 2 \pi r \sigma \cos \alpha. \quad (5)$$

Учитывая, что высота подъема воды в капилляре всегда равно  $h$ , можно записать  $y = h = f(x)$  и, задавая функцию  $f(x)$ , можно определить величину продвижения воды в криволинейном капилляре, описываемом соответствующей математической функцией. Так, например, для функции  $f(x) = h = k x^n$ ,  $x = \sqrt[n]{h/k}$ ,  $f'(x) = k n x^{n-1} = k n (\sqrt[n]{h/k})^{n-1} = \operatorname{tg} \theta$ , откуда  $\theta = \operatorname{arctg} [k n (\sqrt[n]{h/k})^{n-1}]$ , а уравнение (5) после несложных преобразований примет вид

$$L_{1np}^{(1)}(x) = h / (1 - \cos \arctg [ k n (\sqrt[n]{h/k})^{n-1} ] . \quad (6)$$

В капиллярной системе на рис.2 ,описываемой уравнением  $y(x) = h_1 + k x^n$  примем радиусы правой и левой частей одинаковыми. Тогда в случае наличия только одной правой криволинейной ветви при отсутствии левого и вертикального капилляров можно записать равенство

$$(h - h_1) = k x^n, \text{ откуда } x = \sqrt[n]{\frac{h-h_1}{k}},$$

$$\theta_1^{(1)} = \arctg [ k n (\sqrt[n]{\frac{h-h_1}{k}})^{n-1}], \text{ а уравнение равновесия воды запишется в виде}$$

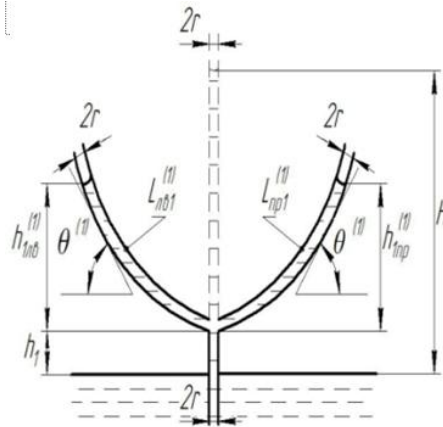


Рис. 2. Криволинейная капиллярная одноуровневая система

$$r^2 \rho g h_1 + \pi r^2 \rho g \check{L}_{1(np)}^{(1)}(x) = \pi 2 \pi \sigma \cos \alpha \quad (7)$$

а величина продвижения воды в этом капилляре описывается следующим выражением:

$$\check{L}_{1(np)}^{(1)} = (h - h_1) / (1 - \cos \arctg [ k n (\sqrt[n]{\frac{h-h_1}{k}})^{n-1} ] . \quad (8)$$

При наличии левой и правой ветвей (без вертикального капилляра) на вертикальную часть высотой  $h_1$  одновременно и в равной степени будут действовать силы поверхностного натяжения обеих криволинейных капиллярных ветвей. Сила, необходимая для подъема воды на высоту  $h_1$ , распределится поровну в обеих ветвях, и каждая криволинейная ветвь будет поднимать половину ее объема в вертикальной части. Вводя для правой и левой ветви обозначения для продвижения и подъема воды соответственно  $L_{1np}^{(1)}$ ,  $\check{L}_{1(лв)}^{(1)}$  и  $\check{h}_{1(np)}^{(1)}$ ,  $\check{h}_{1(лв)}^{(1)}$ , условие равновесия воды запишется в виде

$$\frac{1}{2} \pi r^2 \rho g h_1 + \pi r^2 \rho g \check{L}_{1(np)}^{(1)}(x) = 2 \pi \sigma \cos \alpha , \quad (9)$$

$$\frac{1}{2} \pi r^2 \rho g h_1 + \pi r^2 \rho g \check{L}_{1(лв)}^{(1)}(x) = 2 \pi \sigma \cos \alpha . \quad (10)$$

Тогда можно записать  $h - h_{1+} h_1/2 = h - h_1/2 = k x^n$ , откуда  $x = \sqrt[n]{\frac{h - \frac{1}{2}h_1}{k}}$ ,

$$\theta_1^{(1)} = \arctg [ k n (\sqrt[n]{\frac{h - \frac{1}{2}h_1}{k}})^{n-1} ], \text{ а решением уравнений (9) и (10) для } L_{1np}^{(1)}, \check{L}_{1(лв)}^{(1)}$$

будет

$$\check{L}_{1(np)}^{(1)} = \check{L}_{1(лв)}^{(1)} = (h - \frac{1}{2}h_1) / (1 - \cos \arctg [ k n (\sqrt[n]{\frac{h - \frac{1}{2}h_1}{k}})^{n-1} ] . \quad (11)$$

Применяя аналогичные рассуждения при наличии еще третьего вертикального капилляра, получим для  $L_{1пр}^{(1)}$ ,  $\check{L}_{1(лв)}^{(1)}$  и  $\check{h}_{мооб}^{(M)}$  (высоты подъема в вертикальном капилляре)

$$\check{L}_{1(пр)}^{(1)} = \check{L}_{1(лв)}^{(1)} = (h - \frac{1}{3}h_1) / (1 - \cos \arctg [kn (\sqrt{\frac{h - \frac{1}{3}h_1}{k}})^{n-1}]) . \quad (12)$$

Общие выражения для продвижения воды и высоты ее подъема в многоуровневой системе могут быть записаны в виде

$$\check{L}_{m(пр/лв)}^{(M)} = (h - h_1 \sum_{2m+1}^m \frac{1}{2m+1}) / (1 - \cos \arctg [kn (\sqrt{\frac{h - h_1 \sum_{2m+1}^m \frac{1}{2m+1}}{k}})^{n-1}]) . \quad (13)$$

$$\check{h}_{мооб}^{(M)} = h + (M)h_1 - h_1 \sum_{2m+1}^m \frac{1}{2m+1} . \quad (14)$$

где  $M$  – количество уровней в капиллярной системе;  $m$  – номер рассматриваемого уровня. Отсчет уровней в (13) и (14) следует вести вниз, начиная с верхнего уровня  $M$ .

Сопоставляя (8), (11) и (12), можно заключить, что при увеличении количества ветвей продвижение воды в криволинейных ветвях капиллярной системы увеличивается по сравнению с одиночным криволинейным капилляром. Аналогично может быть рассмотрено продвижение жидкости в криволинейных ветвях других форм.

Используя соотношение  $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$  к графику касательной к функции [4], можно получить выражения для определения координат менисков в боковых криволинейных капиллярах разных уровней. Считая  $\theta$  заданным к прямой  $y = 0$ , можно определить абсциссу в точке касания касательной к мениску  $x_0$ . Очевидно, что  $f'(x_0) = \text{tg } \theta = kn x_0^{(n-1)}$ , откуда  $x_0 = \sqrt[n-1]{\frac{\text{tg } \theta}{kn}}$ . Тогда  $f(x_0) = h_1 + k (\sqrt[n-1]{\frac{\text{tg } \theta}{kn}})^n$ , а  $f'(x_0) = kn (\sqrt[n-1]{\frac{\text{tg } \theta}{kn}})^{(n-1)}$ . После простых подстановок и преобразований можно получить следующие соотношения для определения координат менисков

$$x_0 = \sqrt[n-1]{\frac{\text{tg} [kn (\sqrt{\frac{h - h_1 \sum_{2m+1}^m \frac{1}{2m+1}}{k}})^{n-1}]}{kn}} ; y_0 = [ \sqrt[n-1]{\frac{\text{tg} [kn (\sqrt{\frac{h - h_1 \sum_{2m+1}^m \frac{1}{2m+1}}{k}})^{n-1}]}{kn}} + (m h_1 + (1-n) k (\sqrt[n-1]{\frac{\text{tg} [kn (\sqrt{\frac{h - h_1 \sum_{2m+1}^m \frac{1}{2m+1}}{k}})^{n-1}]}{kn}})^n) / (kn (\sqrt[n-1]{\frac{\text{tg} [kn (\sqrt{\frac{h - h_1 \sum_{2m+1}^m \frac{1}{2m+1}}{k}})^{n-1}]}{kn}})^{(n-1)}) ] * \text{tg} [kn (\sqrt{\frac{h - h_1 \sum_{2m+1}^m \frac{1}{2m+1}}{k}})^{n-1}] .$$

С использованием методики получения (13) и (14) получены соотношения, описывающие подъем воды в системе с прямолинейными капиллярами в случае смещения ветвей одного уровня друг относительно друга по вертикали на величину  $\Delta h_1$

$$L_{mпр/лв}^{(M)} \sin \beta = h - h_1 \sum_{2m+1}^m \frac{1}{2m+1} - \Delta h_1 \sum_{2m}^m \frac{1}{2m} = h_{mпр/лв}^{(M)} , \quad (15)$$

$$h_{mоб}^{(M)} = h + (M)h_1 + (M)\Delta h_1 - h_1 \sum_{2m+1}^m \frac{1}{2m+1} - \Delta h_1 \sum_{2m}^m \frac{1}{2m} , \quad (16)$$

и для асимметричной капиллярной системы

$$L_{mпр/лв}^{(M)} \sin \beta = h - h_1 \sum_{m+1}^m \frac{1}{m+1} = h_{mпр/лв}^{(M)} , \quad (17)$$

$$h_{mоб}^{(M)} = h + (M)h_1 - h_1 \sum_{n+1}^n \frac{1}{n+1} . \quad (18)$$

В (17) четные значения  $M$  относятся к левым, а нечетные к правым наклонным ветвям, а  $1 \leq m \leq M$

При  $n = 1$  из (13) и (14) получим соотношения, описывающие подъем воды в многоуровневой симметричной ветвящейся системе с прямолинейными капиллярами [3]

$$L_{m\text{пр/лв}}^{(M)} \sin \beta = h - h_1 \sum_{(M)}^m \frac{1}{2m+1} = h_{m\text{пр/лв}}^{(M)}, \quad (19)$$

$$h_{m\text{об}}^{(M)} = h + (M)h_1 - h_1 \sum_{(M)}^m. \quad (20)$$

**Результаты анализа. Выводы.** Рассмотренные модели продвижения воды в многоуровневых капиллярных системах с одинаковым радиусом капилляров применительно к растениям показывают, что наибольшее продвижение воды во всех рассмотренных системах происходит в ветвях самого нижнего уровня (см. уравнения (8), (11), (12)). При этом в каждом последующем уровне продвижение воды всегда меньше, чем в предыдущем.

Во всех случаях увеличение расстояния между уровнями, а также при увеличении угла наклона  $\beta$  боковых ветвей для прямолинейных и  $n$  и  $k$  для криволинейных капилляров приводит к уменьшению абсолютной величины подъема и продвижения воды, что, в конечном счете, сказывается на форме растения.

Расчеты показывают, что наличие боковых ветвей приводит к увеличению высоты подъема воды в вертикальном капилляре многоуровневой ветвящейся системы по сравнению с высотой ее подъема в одиночном вертикальном капилляре равного радиуса. Высота подъема воды в вертикальном капилляре при прочих равных условиях остается одинаковой независимо от вида боковых ветвей.

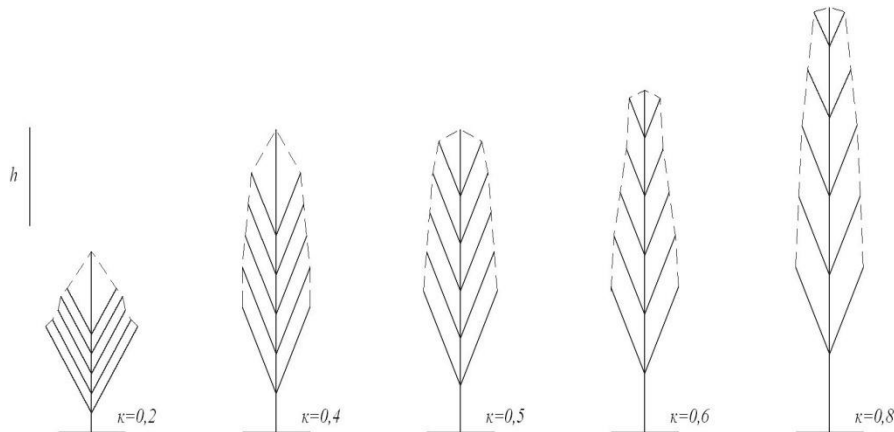


Рис. 3. Распределение жидкости в пятиуровневой системе с прямолинейными капиллярами

Во всех рассмотренных многоуровневых капиллярных системах проявляется следующая особенность распределения в них воды. Фигура, образованная при соединении воображаемой линией, связывающей между собой водные мениски в капиллярных ветвях и в вертикальном капилляре, напоминает специфическую форму дерева или листа. В качестве примера на рис. 3 по результатам расчета по (19) и (20) построено распределение жидкости в пятиуровневой системе с прямолинейными капиллярами, наклоненными под углом  $\beta=60^\circ$ . Величина  $k$  в данном случае означает отношение расстояния между ветвями к высоте подъема воды в одиночном вертикальном капилляре  $0 < k \leq 1$ .

Результаты проведенного математического моделирования позволяют высказать предположение, что своим специфическим габитусом растения и их отдельные части обязаны наличию в них проводящих ветвящихся капиллярных систем.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Лотова, Л.И.* Ботаника. Морфология и анатомия высших растений. – 4-е изд. доп. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2010. – 512 с.
2. *Тимонин А.К.* Ботаника. Высшие растения. – М.: Академия, 2007. – Т. 3. – 349 с.
3. *Вернигоров Ю.М., Кипнис И.А.* Математическое моделирование распределения жидкости в ветвящихся капиллярных системах // Вестник Донского гос. техн. ун-та. – 2010. – Т. 10. – № 8 (51). – С. 1195-1206.
4. *Бронштейн И.Н., Семендяев К.А.* Справочник по математике для инженеров и учащихся вузов. – СПб.: Изд-во «ЛАНЬ», 2009.

Статью рекомендовал к опубликованию д.т.н., профессор А.П. Бабичев.

**Кипнис Иосиф Аншелевич** – ООО «Научно-производственная фирма «КАСИОР»; e-mail: ikipnis@yandex.ru; 119571, г. Москва, Ленинский пр., 154; тел.: 89165205843; зам. генерального директора по науке; к.т.н.

**Вернигоров Юрий Михайлович** – Донской государственный технический университет; e-mail: jvernigorov@dstu.edu.ru; 344000, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1; д.т.н.; профессор.

**Kipnis Iosif Anshelevich** – Scientific and production firm “RASIOR” ltd; e-mail ikipnis@yandex.ru; 154, Leninskiy pr., Moscow, 119571, Russia; phone: +79165205843; associate general director on science; cand. of eng. sc.

**Vernigorov Yury Mihailovich** – Don State Technical University; e-mail: jvernigorov@dstu.edu.ru; Russia, 344000, Rostov-on-Don, 1, Gagarina sq., phone: +79282291508; dr. of eng. sc.; professor.