

Раздел IV. Математика, механика, химия

УДК 517.51:51.37

И.И. Левин, М.В. Хисамутдинов, В.И. Шмойлов

ФУНКЦИЯ ВЕЙЕРШТРАССА И R/φ -ХАРАКТЕРИСТИКИ

Рассматривается подход к изучению недифференцируемых функций, основные идеи которого связаны с r/φ -алгоритмом, предложенным для суммирования расходящихся непрерывных дробей. Вводится модификация функции Вейерштрасса, названная «функцией Вейерштрасса на интервале». Эта функция определена не значением функции в произвольной точке x бесконечного интервала, как то имеет место в классическом случае, а совокупностью значений функции Вейерштрасса в точках, равномерно распределенных по фиксированному интервалу $[x_0, x_0 + \Delta]$. Для функции Вейерштрасса вводятся r/φ -характеристики. Приводятся примеры вычислений этих характеристик. Установлено, что для функции Вейерштрасса существуют «предельные» r/φ -характеристики. Определено, что при интервале Δ , стремящемся к нулю, r -характеристики функции Вейерштрасса совпадают со значением модуля функции Вейерштрасса в точке x_0 , в которой устанавливается предел функции. Также показано, что при усреднении значений φ -характеристик, полученных на различных интервалах при $\Delta \rightarrow 0$, можно получить «предельную» φ -характеристику. Экспериментально устанавливается непрерывность функции Вейерштрасса в классическом смысле.

Функция Вейерштрасса; недифференцируемые функции; расходящиеся дроби; r/φ -алгоритм; r/φ -характеристики.

I.I. Levin, M.V. Khisamutdinov, V.I. Shmoylov

THE WEIERSTRASS FUNCTION AND R/φ -FEATURES

The paper presents an approach to the study of non-differentiable functions. The basic idea is to use r/φ -algorithm proposed for the summation of divergent continued fractions. A modification of the Weierstrass function was introduced. It is called «Weierstrass function on the interval». This function is not defined by the value function at a point x of an infinite interval, as it is in the classical case, but as a set of values of the Weierstrass points uniformly distributed over a fixed time interval $[x_0, x_0 + \Delta]$. Weierstrass functions are introduced for r/φ -characteristics. Examples of characteristics calculations were provided. The «limits» r/φ -characteristics for the Weierstrass function were found. It was determined that in the interval Δ , tends to zero, r -Weierstrass function characteristics coincide with the value of the modulus of the Weierstrass point x_0 , which establishes the limit of the function. When averaged φ -values characteristics obtained at various intervals for $\Delta \rightarrow 0$, we obtained the "marginal" φ -characteristic. It was experimentally established the continuity of the Weierstrass function in the classical sense.

Weierstrass function; non-differentiable functions; divergent fraction; r/φ -algorithm; r/φ -features.

Введение. "Негладкий анализ" – интенсивно развивающийся раздел математики, в котором изучаются недифференцируемые функции. Быстрому становлению этого направления способствовали как потребности современной науки, так и возросшие возможности вычислительной техники. Сформировались такие главы негладкого анализа, как выпуклый анализ, теория минимакса, недифференцируемая оптимизация и другие. В [1] предполагается, что важным средством в исследовании недифференцируемых функций могут быть понятия верхней и нижней

производной Дини. Одним из перспективных подходов в изучении недифференцируемых функций рассматривается подход, связанный с использованием фрактального анализа. В [2] с помощью средств фрактального анализа изучаются свойства непрерывной недифференцируемой функции, весьма близкой к знаменитой функции Вейерштрасса. Тем не менее следует признать, что вопрос с построением математического аппарата, эффективного при исследовании недифференцируемых функций, остаётся открытым.

Применим к изучению свойств функции Вейерштрасса несколько необычный приём – не так давно предложенный способ суммирования расходящихся непрерывных дробей [3].

1. О некоторых свойствах функции Вейерштрасса. Рассмотрим функцию Вейерштрасса

$$\omega(a, b, x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x), \quad (1)$$

где $0 < b < 1$, $a = 2m - 1$, $m = 1, 2, \dots$

Ряд (1) мажорируется сходящимся рядом $\sum_{n=0}^{\infty} b^n$. Функция Вейерштрасса имеет период, равный 2, что следует из применения формулы косинуса суммы двух углов. Вейерштрасс установил [4], что у непрерывной функции (1) не существует производной, если $ab > \frac{3\pi}{2} + 1$.

На рис. 1 представлен график функции Вейерштрасса при $a = 9$ и $b = 0,6$. На интервале $-2 \leq x \leq 2$ показано 8192 значений функции.

Исследуем поведение функции Вейерштрасса в окрестности точки x_0 . Пусть $x_0 = 0,1$. Зафиксируем параметры функции Вейерштрасса: $a = 7$, $b = 0,9$. Определим интервал Δ , который будет разбит на n равных подинтервалов. Положим $\Delta = 10^{-10}$, число подинтервалов $k = 2^{21} = 2097512$. На концах подинтервалов, последовательно приближаясь к точке x_0 , вычисляются значения функции Вейерштрасса. Погрешность при вычислении функции не более 10^{-15} . Можно определить количество членов ряда при заданной погрешности ε по формуле

$$n = \log_b \varepsilon.$$

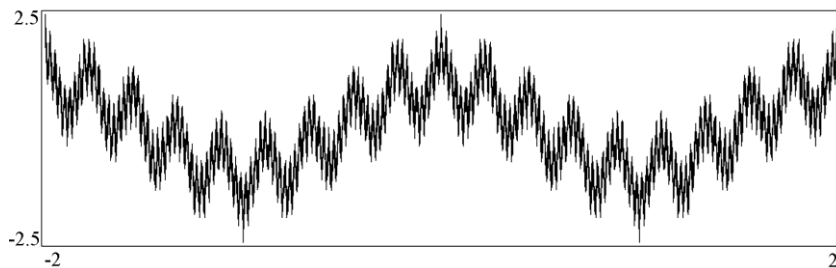


Рис. 1. График функции Вейерштрасса.

Погрешность $\varepsilon = 10^{-15}$ обеспечивается при сложении не менее 328 членов ряда $\sum_{n=0}^{\infty} 0,9^n$. Необходимо обратить внимание на технические трудности, связанные с вычислением значений функции Вейерштрасса. Основная сложность заклю-

чается в вычислении аргумента косинуса, то есть величины $a^n \pi x$. Для решения данной задачи необходимо вычислить число a^n без округления мантиссы, что требует использования q двоичных разрядов, определяемых соотношением:

$$q = n \log_2 a.$$

Таким образом, для заданных $a = 7$ и $n = 328$ число разрядов q равно 921. Далее число a^n умножается на x и из целой части полученного числа $a^n x$ вычитаются "двойки", так что в результате целая часть числа примет значения 0 или 1. Оставшееся число умножается на π и производится вычисление косинуса приведенного аргумента.

На рис. 2 показан график распределения значений функции Вейерштрасса на интервале $0,1 \div 0,1000000001$.

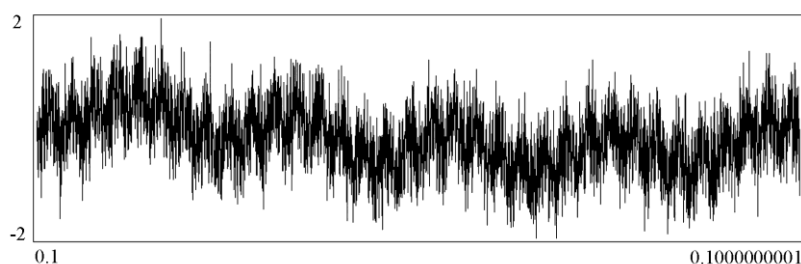


Рис. 2. График значений функции Вейерштрасса на интервале $0,1 \div 0,1000000001$

На рис. 3 представлены первые и последние сто значений функции Вейерштрасса на интервале $0,1 \div 0,1000000001$ при разбиении интервала на 2^{21} подинтервалов. Пунктирной линией показано значение функции Вейерштрасса в точке $x_0 = 0,1$, равное величине $0.233176679133662\dots$

Первые и последние шестнадцать значений функции Вейерштрасса, полученных на интервале $\Delta = 10^{-10}$, приведены в табл. 1.

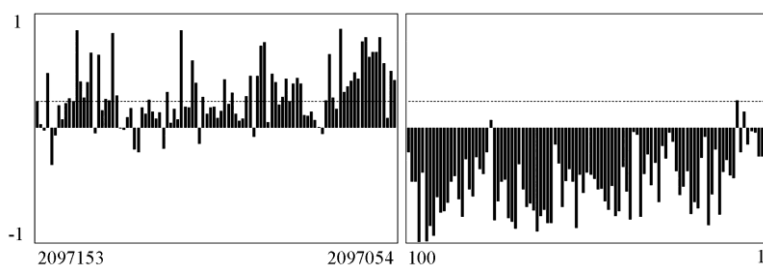


Рис. 3. График значений функции Вейерштрасса при $x \rightarrow x_0$

Таблица 1

Значения функции Вейерштрасса при $x \rightarrow x_0, \Delta = 10^{-10}$

Номер отсчета, k	Значение функции	Номер отсчета, k	Значение функции
1	-6.25295466594902e-02	2097138	6.58705767988363e-01
2	-2.46059762683363e-01	2097139	4.02279072733480e-01
3	-2.50442222816751e-01	2097140	2.65183931577267e-01

Окончание табл. 1

Номер отсчета, k	Значение функции	Номер отсчета, k	Значение функции
4	-3.68471510642392e-02	2097141	4.06768989569054e-01
5	-2.44733031714151e-02	2097142	8.50289818676165e-01
6	-1.45979895538211e-01	2097143	2.37568124209613e-01
7	1.45500477666179e-01	2097144	2.61479861132985e-01
8	-2.09814349222072e-01	2097145	2.16874728369376e-01
9	2.43878170479272e-01	2097146	7.42738407640374e-02
10	-4.38116756819190e-01	2097147	1.98941408343906e-01
11	-4.13815910644200e-01	2097148	-6.37797916245480e-02
12	-2.76569127387281e-01	2097149	-3.18268645926570e-01
13	-3.84249833520620e-01	2097150	4.78659303361735e-01
14	-7.56032435891457e-01	2097151	-2.30638116883090e-02
15	-1.84374744877942e-01	2097152	3.21174235040281e-02
16	-5.76671388409889e-01	2097153	2.33176679133662e-01

Из табл. 1 можно заключить, что значение функции Вейерштрасса в ближайшей точке $x_0 + 10^{-10} / 2^{21}$, которое составляет величину 0,0321174235..., ни в коей мере не характеризует значения функции в x_0 , равное величине 0,2331766791...

Рассмотрим характер значений функции Вейерштрасса на экстремально малом интервале, а именно при $\Delta = 10^{-200}$. На рис. 4 показан график распределения 4096-ти значений функции Вейерштрасса с параметрами $a=7$, $b=0,9$ на интервале $\Delta = 10^{-200}$.

На рис. 5 представлены первые и последние сто значений функции Вейерштрасса на интервале $0,1 \div (0,1+10^{-200})$ при разбиении интервала на 2^{21} подинтервалов. Пунктирной линией показано значение функции Вейерштрасса в точке $x_0 = 0,1$.

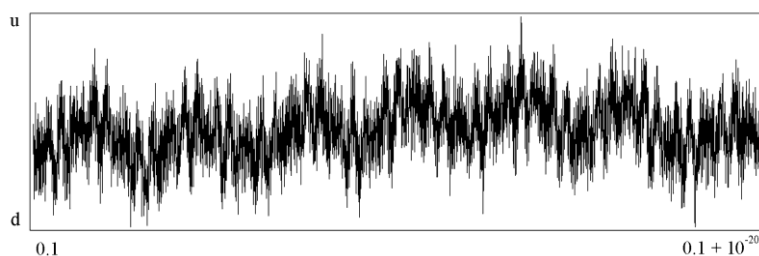


Рис. 4. График значений функции Вейерштрасса на интервале $0,1 \div (0,1+10^{-200})$, $u = 0.233176679167$, $d = 0.233176679100$

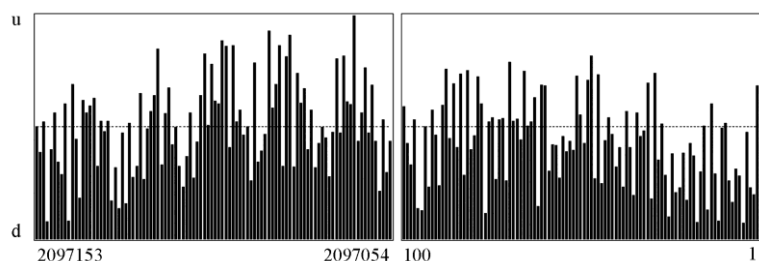


Рис. 5. График значений функции Вейерштрасса при $x \rightarrow x_0$, $u = 0.233176679167$, $d = 0.233176679100$

Первые и последние шестнадцать значений функции Вейерштрасса, полученных на интервале $\Delta = 10^{-200}$, приведены в табл. 2.

Таблица 2

Значения функции Вейерштрасса при $x \rightarrow x_0, \Delta = 10^{-200}$

Номер отсчета, k	Значение функции	Номер отсчета, k	Значение функции
1	2.33176679145689e-01	2097138	2.33176679139683e-01
2	2.33176679113599e-01	2097139	2.33176679137684e-01
3	2.33176679115616e-01	2097140	2.33176679141364e-01
4	2.33176679131997e-01	2097141	2.33176679112461e-01
5	2.33176679105118e-01	2097142	2.33176679129824e-01
6	2.33176679119075e-01	2097143	2.33176679146028e-01
7	2.33176679121118e-01	2097144	2.33176679105808e-01
8	2.33176679111253e-01	2097145	2.33176679140444e-01
9	2.33176679117685e-01	2097146	2.33176679119439e-01
10	2.33176679134588e-01	2097147	2.33176679123117e-01
11	2.33176679133199e-01	2097148	2.33176679137782e-01
12	2.33176679105757e-01	2097149	2.33176679126739e-01
13	2.33176679119677e-01	2097150	2.33176679105471e-01
14	2.33176679140439e-01	2097151	2.33176679135110e-01
15	2.33176679109013e-01	2097152	2.33176679126020e-01
16	2.33176679133808e-01	2097153	2.33176679133662e-01

В табл. 2 значения функции Вейерштрасса в различных точках интервала $\Delta = 10^{-200}$ совпадают между собой до десятого десятичного знака. Таким образом, можно считать экспериментально подтвержденной непрерывность функции Вейерштрасса по Гейне, ибо для функции Вейерштрасса имеет место соотношение

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

2. Алгоритм суммирования расходящихся непрерывных дробей. Было обращено внимание, что аналогичный осциллирующий характер имеют значения подходящих расходящихся непрерывных дробей. Поэтому при анализе функции Вейерштрасса была предпринята попытка использовать так называемый r/φ -алгоритм, предложенный для суммирования расходящихся непрерывных дробей, нашедший впоследствии разнообразные применения в вычислительной математике [5–8]. Остановимся на описании r/φ -алгоритма.

Бесконечной непрерывной дробью, или цепной дробью, называют выражение вида

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \vdots + \frac{a_n}{b_n + \vdots}}},$$

где a_i и $b_i, i = 1, 2, \dots$ – в общем случае независимые переменные.

Часто непрерывную дробь записывают в компактном виде в форме Гершеля:

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1} \frac{a_2}{b_2 + \dots} \frac{a_n}{b_n + \dots}.$$

Непрерывная дробь называется *сходящейся*, если последовательность ее подходящих дробей имеет конечный предел. Непрерывная дробь *расходится*, если последовательность ее подходящих дробей предела не имеет. В [3] предложено иное, нежели традиционное, определение сходимости непрерывных дробей:

Непрерывная дробь сходится и имеет своим значением в общем случае комплексное число $z = r_0 e^{i\varphi_0}$, если существуют пределы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n |P_i / Q_i|} = r_0, \quad (2)$$

$$\pi \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k_n}{n} = |\varphi_0|, \quad (3)$$

где P_i / Q_i – значения i -й подходящей дроби из совокупности, включающей n подходящих дробей, k_n – число отрицательных подходящих дробей из n подходящих дробей.

Этот способ выходит за рамки традиционных методов суммирования, ибо позволяет по последовательности вещественных подходящих дробей определить комплексное число, которое представлено непрерывной дробью. Признаком комплексности такой расходящейся непрерывной дроби с вещественными элементами служат перемены знаков ее подходящих дробей, причем эти перемены знаков происходят сколь угодно много раз. Другими словами, комплексная единица e^i устанавливается из «поведения» подходящих дробей непрерывной дроби. Параметры же комплексного числа $z = r_0 e^{i\varphi_0}$, т.е. его модуль r_0 и аргумент φ_0 могут быть определены, в частности r/φ -алгоритмом, т.е. формулами (2) и (3).

В случае непрерывных дробей, сходящихся в классическом смысле, аргумент φ_0 примет значения 0 или π . Если $\varphi_0 = 0$, то значение сходящейся непрерывной дроби будет совпадать со значением модуля. Если $\varphi_0 = \pi$, то значение сходящейся непрерывной дроби будет отрицательное число: $z = r_0 e^{i\pi} = -r_0$.

Знак аргумента комплексного числа $e^{i\varphi_0}$ определяется из динамики распределения значений подходящих дробей на “периоде”. Эти правила определения знака установлены на тестовых непрерывных дробях, имеющих комплексные значения [3].

В табл. 3 представлены результаты суммирования расходящейся цепной дроби

$$\ln(-2) = -\frac{3}{1} - \frac{3}{2} - \frac{3}{3} - \frac{6}{2} - \frac{6}{5} - \dots - \frac{3n}{2} - \frac{3n}{2n+1} - \dots \quad (4)$$

Дробь (4) имеет комплексное значение, так как

$$\ln(-2) = 3,2171505117\dots e^{i1,3536398454\dots},$$

которое, естественно, не может приближаться цепной дробью с вещественными элементами и, тем не менее, суммирование при помощи r/φ -алгоритма позволяет установить значение этой цепной дроби по ее подходящим дробям.

Таблица 3

Определение значения расходящейся цепной дроби (4)

$$r_0 = 3.2171505117\dots, \varphi_0 = 1.3536398454\dots$$

Номер звена дроби	Значение подходящей дроби	Модуль комплексного числа, r_n	Погрешность, $\varepsilon_r = r_0 - r_n $	Аргумент комплексного числа, φ_n	Погрешность, $\varepsilon_\varphi = \varphi_0 - \varphi_n $
1	-3.0000000	3.000000000	0.2171505117	3.1415926535	1.7879528081
2	6.0000000	4.2426406871	1.0254901754	1.5707963267	0.2171564813
4	-3.0000000	3.000000000	0.2171505117	1.5707963267	0.2171564813
8	-97.5000000	4.9614481602	1.7442976485	1.5707963267	0.2171564813
16	1.4880473	3.5474336503	0.3302831386	1.3744467859	0.0208069405
32	3.1985122	3.6050160485	0.3878655367	1.3744467859	0.0208069405
64	62.8693924	3.3885474566	0.1713969449	1.3744467859	0.0208069405
128	0.9165216	3.1810462758	0.0361042359	1.3499030933	0.0037367521
256	1.7095765	3.2148854739	0.0022650377	1.3621749396	0.0085350941
512	3.9037050	3.2112688498	0.0058816618	1.3499030933	0.0037367521
1024	-15.4772571	3.2219262392	0.0047757275	1.3560390164	0.0023991710
2048	2.6358581	3.2194825453	0.0023320336	1.3529710549	0.0006687905
4096	11.1007665	3.2127253440	0.0044251676	1.3529710549	0.0006687905
8192	-0.6961262	3.2169015620	0.0002489496	1.3533545501	0.0002852953
16384	-1.7591587	3.2167104407	0.0004400709	1.3533545501	0.0002852953
32768	-6.4347291	3.2170964982	0.0000540134	1.3536421715	0.0000023260
65536	5.5879135	3.2171496506	0.0000008610	1.3536421715	0.0000023260
131072	-3.9038315	3.2171884212	0.0000379094	1.3536182030	0.0000216423
262144	16.0431708	3.2171480639	0.0000024477	1.3535942346	0.0000456108
524288	-0.0551483	3.2171287791	0.0000217325	1.3536421715	0.0000023260
1048576	-0.2709104	3.2171427009	0.0000078107	1.3536361793	0.0000036660
2097152	-0.7308612	3.2171496552	0.0000008564	1.3536361793	0.0000036660
4194304	-1.8537413	3.2171502478	0.0000002638	1.3536391754	0.0000006699
8388608	-7.2124648	3.2171495794	0.0000009323	1.3536399244	0.0000000790

В первой колонке даны номера n подходящих дробей разложения (4). Номера подходящих дробей составляют степень 2: $n = 2^i, i = 1 \div 23$. Значения подходящих дробей с этими номерами приведены в соседней колонке. Как и следовало ожидать, значения подходящих дробей $\{P_n/Q_n\}$ с ростом n не стремятся к какому-либо пределу. Для чисел же, расположенных в третьей колонке, напротив, стремление к пределу можно без труда обнаружить, – значения асимптотически приближаются к величине $3.2171505117\dots$, т.е. к модулю комплексного числа $\ln(-2)$. Даже беглого взгляда на пятую и шестую колонки достаточно, чтобы убедиться, что с ростом количества подходящих дробей разложения (4) все более точно устанавливается значение аргумента искомого комплексного числа.

Способ суммирования при помощи r/φ -алгоритма оказался применим не только к обыкновенным непрерывным дробям, т.е. к цепным дробям, но и к непрерывным дробям иных классов, что указывает на некоторую универсальность найденного метода суммирования. В частности, r/φ -алгоритм дал возможность предложить практически удобный способ определения всех нулей полинома n -й степени. Но главное, этот алгоритм позволил рассматривать представления вещественных и комплексных корней алгебраических уравнений через отношения определителей матриц Тейлора бесконечно высокого порядка, содержащих коэффициенты исходного уравнения, как аналитическую запись корней уравнения n -й степени через его коэффициенты [9]. Этот же алгоритм помог понять природу трудностей, возникающих при решении бесконечных систем линейных алгебраических уравнений, и дал возможность по-новому взглянуть на расходящиеся разностные схемы [10].

3. Определение r/φ -характеристик функции Вейерштрасса. Для функции Вейерштрасса можно получить некоторые характеристики, которые по аналогии с r/φ -алгоритмом назовём r/φ -характеристиками.

Введём для функции Вейерштрасса (1) r/φ -характеристики.
 r -характеристика:

$$r(a, b, [x_0, x_0 + \Delta]) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n \left| \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x_i) \right|}, \quad (5)$$

где $\omega(a, b, x_i) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x_i)$ – значение функции Вейерштрасса в точке x_i равномерно делимого интервала $[x_0, x_0 + \Delta]$, на котором определяется r -характеристика функции (1).

φ -характеристика:

$$\varphi(a, b, [x_0, x_0 + \Delta]) = \pi \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k_n}{n}, \quad (6)$$

где k_n – число значений функции Вейерштрасса $\omega(a, b, x_i)$, меньших значения функции Вейерштрасса в точке x_0 , из общего числа n значений функции $\omega(a, b, x_i)$ при равномерном делении интервала $[x_0, x_0 + \Delta]$.

В табл. 4 даны результаты вычисления по формулам (5) и (6) r/φ -характеристик функции Вейерштрасса с параметрами $a = 7$, $b = 0,9$ в точке $x_0 = 0,1$ на интервале $\Delta = 2$. Вычисления r/φ -характеристик последовательно производились при равномерном разбиении интервала на 2^n подинтервалов.

Во второй колонке табл. 4 приведены значения функции Вейерштрасса в точках x_i , которые соответствуют последнему подинтервалу при равномерном разбиении исходного интервала $\Delta = 2$ на 2^n фрагментов, причём приближение к точке $x_0 = 0,1$ осуществляется справа (рис. 6).

Таблица 4

Определение r/φ -характеристик в точке $x_0 = 0,1$ при $x \rightarrow x_0$, $\Delta = 2$

Число разбиений интервала, n	Значение функции	r -характеристика	$\mathcal{E}_r = r_n - r_{n-1} $	Модуль φ -характеристики	$\mathcal{E}_\varphi = \varphi_n - \varphi_{n-1} $
1	2.33176679133662e-01	0.2331766791	-	0.0000000000	-
2	-2.33176679133663e-01	0.2331766791	0.0000000000	1.0471975512	1.0471975512
4	2.20578052927634e+00	0.5728434969	0.3396668178	1.2566370614	0.2094395102
8	1.72460318109052e+00	0.8918458265	0.3190023296	1.3962634016	0.1396263402
16	-1.33344264922251e+00	1.6104199560	0.7185741294	1.4783965429	0.0821331413
32	3.93834935811930e+00	1.9020217070	0.2916017510	1.6183962155	0.1399996726
64	-3.07225675894610e-01	0.8562175775	1.0458041295	1.8366233975	0.2182271820
128	5.61180636551890e-01	0.6094354070	0.2467821705	1.8752142196	0.0385908221
256	-3.93218785952536e-01	0.6834781925	0.0740427855	1.8091661974	0.0660480222
512	-7.33153914477866e-02	0.7097744888	0.0262962962	1.8126928372	0.0035266398
1024	-1.54795932698954e+00	0.8269265857	0.1171520970	1.7623568545	0.0503359827
2048	-2.53586318675446e-01	0.8685291388	0.0416025531	1.7478846389	0.0144722156
4096	-1.60428662512486e+00	0.8676116487	0.0009174901	1.7521452803	0.0042606414
8192	-8.75203799049588e-01	0.8652818168	0.0023298320	1.7515922424	0.0005530379

Окончание табл. 4

Число разбиений интервала, n	Значение функции	r -характеристика	$\mathcal{E}_r = r_n - r_{n-1} $	Модуль φ -характеристики	$\mathcal{E}_\varphi = \varphi_n - \varphi_{n-1} $
16384	-1.18042244544664e+00	0.8526280822	0.0126537345	1.7586016368	0.0070093944
32768	1.51773388502056e+00	0.8623763065	0.0097482242	1.7498351830	0.0087664538
65536	2.71612129628740e-01	0.8679878699	0.0056115635	1.7487114150	0.0011237680
131072	-8.28042548021563e-02	0.8704404310	0.0024525610	1.7453931674	0.0033182476
262144	1.26462292644948e+00	0.8706299270	0.0001894960	1.7464784016	0.0010852342
524288	-3.41619609891292e-01	0.8685795342	0.0020503928	1.7488126601	0.0023342585
1048576	3.21418793964801e-01	0.8702390273	0.0016594931	1.7475919381	0.0012207220
2097152	1.01082077196144e-01	0.8711364686	0.0008974413	1.7467149273	0.0008770108

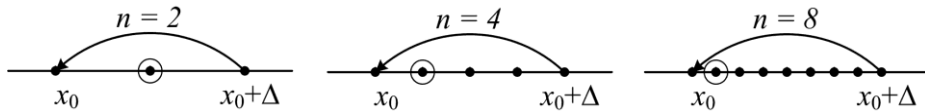


Рис. 6. Точки x_i , соответствующие последнему подинтервалу при $x \rightarrow x_0$

В третьей и пятой колонках табл. 4 даны значения r/φ -характеристик функции Вейерштрасса на интервале $\Delta = 2$, найденные по формулам (5) и (6). При вычислении r/φ -характеристик использовались осциллирующие значения функции Вейерштрасса, которые определялись последовательно в точках x_i интервала $\Delta = 2$, разбиваемого всякий раз на 2^n частей.

На рис. 7 и 8 показаны r/φ -характеристики функции Вейерштрасса, полученные по формулам (5) и (6) на интервале $0,1 \div 2,1$ при равномерном разбиении этого интервала на 2^{21} подинтервалов.

В табл. 5 приведены результаты вычисления r/φ -характеристик функции Вейерштрасса (1) с параметрами $a = 7, b = 0,9$ в точке $x_0 = 0,1$ на интервале $\Delta = 10^{-10}$. Вычисления r/φ -характеристик последовательно производились при делении интервала 10^{-10} на 2^n равных частей. Максимальное число подинтервалов, на которое разбивается интервал 10^{-10} , равно 2^{21} . Интервал Δ находится справа от точки x_0 .

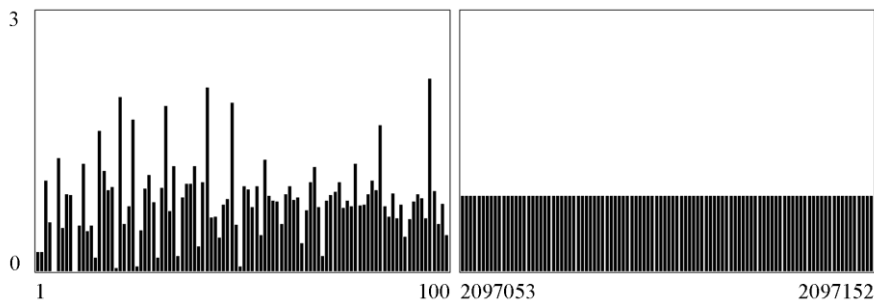


Рис. 7. График значений r -характеристики функции Вейерштрасса на интервале $0,1 \div 2,1$ при $x \rightarrow x_0$.

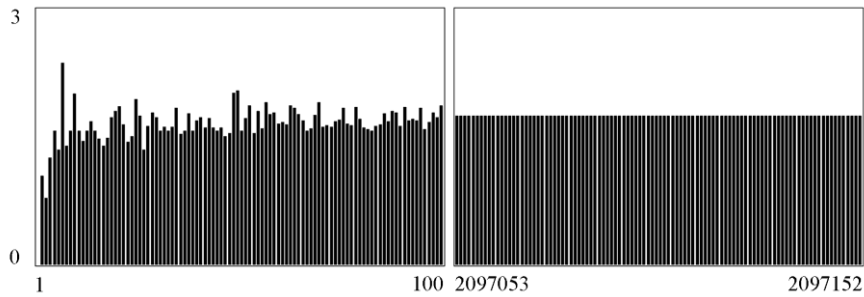


Рис. 8. График значений φ -характеристики функции Вейерштрасса на интервале $0,1 \div 2,1$ при $x \rightarrow x_0$.

Таблица 5

Определение r/φ -характеристик в точке $x_0 = 0,1$ при $x \rightarrow x_0$, $\Delta = 10^{-10}$

Число разбиений интервала, n	Значение функции	r -характеристика	$\varepsilon_r = r_{2^n} - r_{2^{n-1}} $	Модуль φ -характеристики	$\varepsilon_\varphi = \varphi_{2^n} - \varphi_{2^{n-1}} $
1	-6.25295466594903e-02	0.1207494598	-	1.5707963268	-
2	-2.32422470684058e-01	0.1502044625	0.0294550027	2.0943951024	0.5235987756
4	-4.33432595932641e-01	0.2487735235	0.0985690610	1.8849555922	0.2094395102
8	9.76210134357022e-01	0.3572331963	0.1084596728	1.7453292520	0.1396263402
16	2.79440153989695e-01	0.3000386495	0.0571945468	1.8479956786	0.1026664266
32	2.97620826589979e-01	0.2603374663	0.0397011831	1.9991953250	0.1511996464
64	7.17181131573445e-01	0.2840429296	0.0237054632	2.0299521762	0.0307568512
128	6.23094349268071e-01	0.2626265647	0.0214163648	2.1187485338	0.0887963576
256	-3.78521098919205e-01	0.2536947912	0.0089317735	2.1758890752	0.0571405414
512	-3.58118950217237e-01	0.2574403291	0.0037455379	2.1740066121	0.0018824631
1024	-1.79932456844648e-01	0.2518220134	0.0056183157	2.1883874680	0.0143808559
2048	3.55831147394676e-01	0.2516579931	0.0001640203	2.1848557986	0.0035316694
4096	-9.15840411027385e-03	0.2508260074	0.0008319857	2.1861558837	0.0013000851
8192	1.70448789881532e-01	0.2512337268	0.0004077194	2.1906406481	0.0044847644
16384	5.95459423975212e-01	0.2506911217	0.0005426051	2.1924999691	0.0018593210
32768	4.93290552163453e-02	0.2485471559	0.0021439658	2.1969769370	0.0044769679
65536	1.41999451731051e-01	0.2479000095	0.0006471464	2.1966269704	0.0003499666
131072	-4.69773057812122e-02	0.2482948974	0.0003948879	2.1972429359	0.0006159655
262144	2.16874728369377e-01	0.2482663434	0.0000285540	2.1951421021	0.0021008338
524288	-3.18268645926570e-01	0.2477378704	0.0005284730	2.1960331200	0.0008910179
1048576	-2.30638116883090e-02	0.2474486938	0.0002891766	2.1981923727	0.0021592527
2097152	3.21174235040281e-02	0.2475438482	0.0000951544	2.1981529741	0.0000393986

В первой колонке табл. 5 приведено количество подинтервалов, на которые равномерно разбивается исходный интервал $\Delta = 10^{-10}$. Во второй колонке даны значения функции Вейерштрасса в точке x_i , соответствующей последнему подинтервалу при равномерном делении исходного интервала на 2^n фрагментов. В третьей ко-

лонке приведены значения r -характеристики функции Вейерштрасса в точке $x_0 = 0,1$ на интервале $\Delta = 10^{-10}$, вычисленные по формуле (5). Несмотря на то, что при определении r -характеристики использовались осциллирующие значения функции Вейерштрасса, которые находились последовательно в точках x_i интервала $\Delta = 10^{-10}$, разбиваемого всякий раз на 2^n равных частей ($n = 1, 2, \dots, 21$), в колонке 3 фиксировались числа, асимптотически стремящиеся к некоторому пределу. В колонке 4 приведена «погрешность», т.е. разность значений r_{2^n} и $r_{2^{n-1}}$, полученных при разбиении интервала Δ на 2^n и 2^{n-1} частей соответственно. В колонке 5 приведены значения модуля φ -характеристики функции Вейерштрасса в точке $x_0 = 0,1$ на том же интервале $\Delta = 10^{-10}$. Выше уже отмечалось, что за уровень отчёта, который определял, какие значения функции Вейерштрасса, вычисленные в точке x_i интервала Δ , относить к множеству k_n формулы (6), было взято значение функции Вейерштрасса в точке x_0 .

На рис. 9 показаны значения r -характеристики функции Вейерштрасса, вычисленные на интервале $0,1 \div (0,1+10^{-10})$ при равномерном разбиении этого интервала на 2^{21} подинтервалов. В левой части рис. 9 приведены значения r_n , найденные по формуле (5) при использовании значений функции Вейерштрасса на начальном участке интервала ($n = 1 \div 100$). В правой части рис. 9 значения r_n практически одинаковые. При их вычислении используется значительное число отчётов функции Вейерштрасса ($n = 2^{21} - i$, где $i = 100, 99, \dots, 1$).

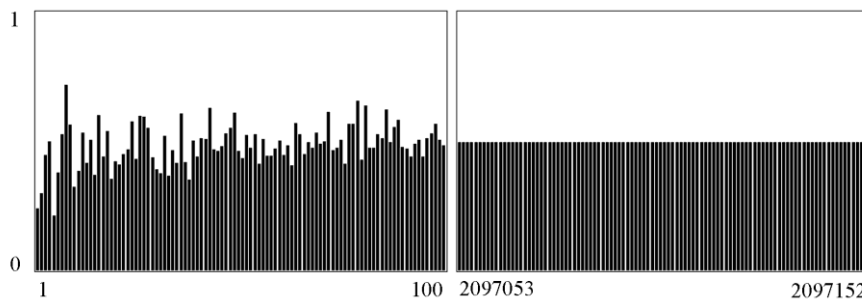


Рис. 9. График значений r -характеристики функции Вейерштрасса на интервале $0,1 \div (0,1+10^{-10})$ при $x \rightarrow x_0$

Из формулы (5) следует, что r -характеристика функции Вейерштрасса является функцией не только параметров a , b и x_0 , но и интервала Δ , который, как уже отмечалось выше, равномерно разбивается на n подинтервалов.

4. Определение предельных r/φ -характеристик функции Вейерштрасса.

Зависимость r -характеристики от интервала Δ имеет ярко выраженный характер, если интервал, на котором определяется r -характеристика по формуле (5), существенно меньше периода функции Вейерштрасса, равному, как уже отмечалось выше, двум. Если интервал $\Delta > 2$, то r -характеристика функции Вейерштрасса весьма слабо зависит от Δ , что легко объяснимо периодическим характером в расположении отсчетов значений функции в различных точках «большого» интервала.

В табл. 6 приведены значения r/φ -характеристик при различных интервалах Δ . Интервал Δ расположен справа от точки $x_0 = 0,1$. Параметры функции Вейерштрасса $a = 7$, $b = 0,9$, число дробления интервалов $n = 4096$.

Таблица 6

Значения r/φ -характеристик функции Вейерштрасса

Интервал, Δ	r -характеристика	Модуль φ -характеристики	Интервал, Δ	r -характеристика	Модуль φ -характеристики
10^0	8.651433596418818e-01	1.9568817310	10^{-177}	2.331766790704081e-01	1.7667145409
10^{-1}	7.025592194035419e-01	1.6823661904	10^{-178}	2.331766789472140e-01	2.1953575219
10^{-2}	6.597091448592025e-01	2.2428993194	10^{-179}	2.331766789579683e-01	2.2237292398
10^{-3}	5.772967252326342e-01	2.1347800702	10^{-180}	2.331766791570658e-01	1.4730289206
10^{-4}	5.841863118852511e-01	1.1402363378	10^{-181}	2.331766790431087e-01	2.0274276241
10^{-5}	4.835840536675451e-01	1.5550768615	10^{-182}	2.331766789740239e-01	2.3916591376
10^{-6}	4.644177523639081e-01	2.5496205939	10^{-183}	2.331766791538051e-01	1.4454240059
10^{-7}	3.740502219643384e-01	1.6202551323	10^{-184}	2.331766791387625e-01	1.5267051436
10^{-8}	3.195769220421554e-01	1.7682481472	10^{-185}	2.331766790066978e-01	2.5266164983
10^{-9}	2.704785929803233e-01	2.2329308780	10^{-186}	2.331766790938192e-01	1.9269764068
10^{-10}	2.508260074266846e-01	2.1861558837	10^{-187}	2.331766791205590e-01	1.7191727433
10^{-11}	2.455366327977468e-01	1.5428080105	10^{-188}	2.331766790736043e-01	2.2643698087
10^{-12}	1.916368040897422e-01	2.0289612305	10^{-189}	2.331766790926040e-01	2.1094755651
10^{-13}	1.569066828256516e-01	2.4108292172	10^{-190}	2.331766791576466e-01	1.2123158373
10^{-14}	2.235238427564517e-01	1.3879137669	10^{-191}	2.331766791230988e-01	1.7651809345
10^{-15}	1.957064193857357e-01	1.5374403882	10^{-192}	2.331766790838561e-01	2.4560706052
10^{-16}	1.111252323129603e-01	2.5741582959	10^{-193}	2.331766791353927e-01	1.5106022767
10^{-17}	1.488911727796592e-01	1.8932370666	10^{-194}	2.331766791253475e-01	1.7966198651
10^{-18}	1.658817685470640e-01	1.7168723338	10^{-195}	2.331766791039917e-01	2.3709554515
10^{-19}	1.175111445017620e-01	2.2835398883	10^{-196}	2.331766791141506e-01	2.1692862136
10^{-20}	1.348367903952111e-01	2.1102423682	10^{-197}	2.331766791336307e-01	1.6064526750
10^{-21}	2.311859597586808e-01	1.2422211615	10^{-198}	2.331766791213168e-01	2.0780366344
10^{-22}	1.854589461988532e-01	1.7651809345	10^{-199}	2.331766791190254e-01	2.2198952239
...	10^{-200}	2.331766791405942e-01	1.2115490341

Из табл. 6 следует, что при $\Delta \rightarrow 0$ r -характеристика стремится к значению 0.233176679133662..., т.е. к значению функции Вейерштрасса в точке $x_0=0,1$.

На рис. 10 и 11 показаны значения r - и φ -характеристики в зависимости от величины интервала Δ , на котором эти характеристики определяются.



Рис. 10. Зависимость r -характеристики от значения интервала Δ

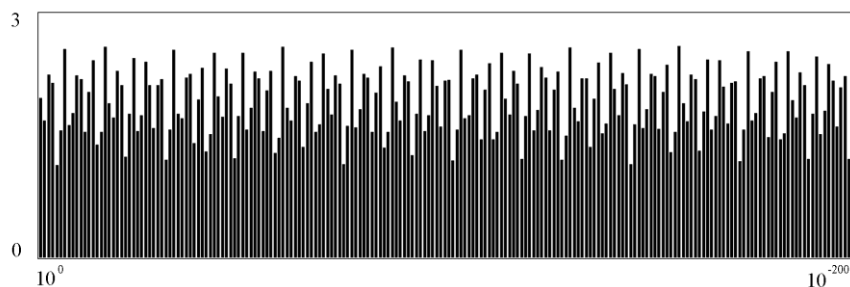


Рис. 11. Зависимость φ -характеристики от значения интервала Δ

В табл. 7 приведены значения модуля усредненных φ -характеристик при различном числе k значений φ -характеристик. Усреднение проводилось по формуле, аналогичной формуле (5), только вместо значений функции Вейерштрасса в точках x_i использовались значения модулей φ -характеристик, имеющиеся в третьей колонке табл. 6.

Таблица 7

Значения усредненных φ -характеристик функции Вейерштрасса

k	Модуль усредненной φ -характеристики	k	Модуль усредненной φ -характеристики
1	1.9568817310e+00	184	1.8717528899e+00
2	1.8144397655e+00	185	1.8747743395e+00
3	1.9472944675e+00	186	1.8750496993e+00
4	1.9925627512e+00	187	1.8741842649e+00
5	1.7820856839e+00	188	1.8760606074e+00
6	1.7420707722e+00	189	1.8772188418e+00
7	1.8394829242e+00	190	1.8729262147e+00
8	1.8105341312e+00	191	1.8723483419e+00
9	1.8057861881e+00	192	1.8749828252e+00
10	1.8445363667e+00	193	1.8728954980e+00
11	1.8732500759e+00	194	1.8724961952e+00
12	1.8431984763e+00	195	1.8747523886e+00
13	1.8568632528e+00	196	1.8761415672e+00
14	1.8918162828e+00	197	1.8746716570e+00
15	1.8531526461e+00	198	1.8756421213e+00
16	1.8316464024e+00	199	1.8772230995e+00
...	...	200	1.8731378770e+00

Из табл. 7 следует, что при увеличении числа k значений модуля φ -характеристик, усредненная φ -характеристика стремится к определенному значению, а именно к 1.87...

На рис. 12 показаны значения усредненных модулей φ -характеристик в зависимости от количества значений k значений φ -характеристик.

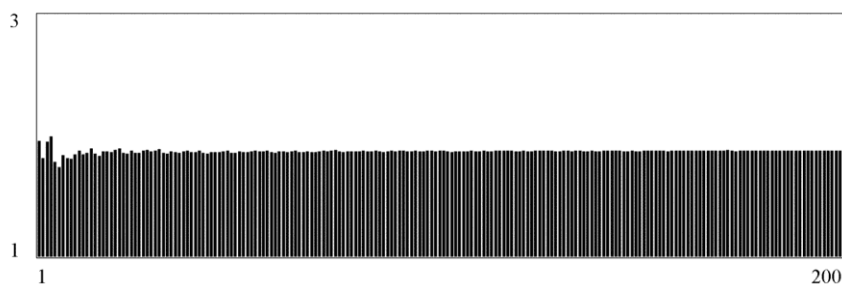


Рис. 12. Зависимость усредненных φ -характеристик от значений k

Заключение. Опираясь на проведенные исследования, можно ввести в рассмотрение некоторую модификацию функции Вейерштрасса, которую назовем «функцией Вейерштрасса на интервале» и обозначим $W(a, b, [x_0, x_0 + \Delta])$. Эта функция определена не значением функции в произвольной точке x бесконечного интервала, как то имеет место в классическом случае, а совокупностью равномерно распределенных значений функции Вейерштрасса на фиксированном интервале изменения переменной $[x_0, x_0 + \Delta]$. При этих условиях «функция Вейерштрасса на интервале» имеет единственные r - и φ -характеристики, определенные выше. Показано, что при интервале Δ , стремящемся к нулю, r -характеристики функции Вейерштрасса совпадают со значением модуля функции Вейерштрасса в точке x_0 , в которой устанавливается предел функции. Также показано, что при усреднении значений φ -характеристик, полученных на различных интервалах при $\Delta \rightarrow 0$, можно получить также «предельную» φ -характеристику.

Метод r/φ -характеристик может быть использован для анализа других быстроосциллирующих функций. Так как при построении r/φ -характеристик основные идеи заимствованы из ранее построенного алгоритма суммирования расходящихся непрерывных дробей, то предложенный способ анализа быстроосциллирующих функций можно рассматривать в качестве одного из приложений r/φ -алгоритма.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Демьянов В.Ф., Рубинов А.М. Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление. – М.: Наука, 1990. – 431 с.
2. Ерофеева Л.Н. Фрактальная размерность недифференцированных функций // Труды Нижегородского государственного технического университета. – 2011. – № 3 (90). – С. 353-357.
3. Шмойлов В.И. Периодические цепные дроби. – Львов: Академический экспресс, 1998. – 219 с.
4. Рисе Ф., Сёкифальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. – М.: Мир, 1979. – 592 с.
5. Шмойлов В.И. Непрерывные дроби. В 3-т. Т2. Расходящиеся непрерывные дроби. НАН Украины, Ин-т прикл. проблем механики и математики. – Львов: Меркатор, 2004. – 558 с.
6. Шмойлов В.И., Коваленко В.Б. Некоторое применения алгоритма суммирования расходящихся непрерывных дробей // Вестник Южного научного центра РАН. – 2012. – № 4 (149). – С. 3-13.
7. Шмойлов В.И. Непрерывные дроби и r/φ -алгоритм. – Таганрог: Изд-во ТТИ ЮФУ, 2012. – 608 с.
8. Шмойлов В.И., Кириченко Г.А. Определение значений расходящихся непрерывных дробей и рядов // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2012. – № 4 (129). – С. 210-222.
9. Шмойлов В.И. Решение алгебраических уравнений при помощи r/φ -алгоритма. – Таганрог: Изд-во ТТИ ЮФУ, 2011. – 330 с.
10. Шмойлов В.И. Расходящиеся системы линейных алгебраических уравнений. – Таганрог: Изд-во ТТИ ЮФУ, 2010. – 205 с.

Статью рекомендовал к опубликованию д.т.н., профессор Н.И. Витиска.

Левин Илья Израилевич – Научно-исследовательский институт многопроцессорных систем им. А.В. Каляева федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Южный федеральный университет»; e-mail: levin@mvs.tsure.ru; 347922, г. Таганрог, ул. Ленина, 224/1, кв. 65; тел.: 88634623226; зам. директора по науке; д.т.н.

Хисамутдинов Максим Владимирович – e-mail: L-V-P@yandex.ru; 347927, г. Таганрог, Безымянный проезд, 7/1, кв. 8; тел.: 89085077088; научный сотрудник.

Шмойлов Владимир Ильич – Южный научный центр РАН; e-mail: Shmoylov40@at.infotectt; 347902, г. Таганрог, ул. Свободы, 27-б, кв. 6; тел.: 88634318910, 88634368337, факс: 88634360376; научный сотрудник.

Levin Ilya Israilevich – Kalyaev Scientific Research Institute of Multiprocessor Computer Systems at Southern Federal University; e-mail: levin@mvs.tsure.ru; 224/1, Lenin street, ap. 65, Taganrog, 347922, Russia; phone: +78634623226; deputy director of science; dr. of eng. sc.

Khisamutdinov Maxim Vladimirovich – e-mail: L-V-P@yandex.ru; 7/1, Bezimianir proezd, kv. 8, Taganrog, 347927, Russia; phone: +79085077088; researcher.

Shmoylov Vladimir Iyich – Southern Scientific Center of Russian Academy of Sciences; e-mail: levin@mvs.tsure.ru; 27-6, Svobody street, kv. 6, Taganrog, 347902, Russia; phones: 88634318910, 88634368337, fax: +78634360376; researcher.

УДК 517.524

В.Ф. Гузик, В.И. Шмойлов, Г.А. Кириченко

НЕПРЕРЫВНЫЕ ДРОБИ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКЕ

Рассматриваются применения непрерывных дробей при решении различных задач. Показано, что непрерывные дроби имеют существенные преимущества в сравнении со степенными рядами при аппроксимации элементарных и специальных функций. Непрерывные дроби могут быть использованы при суммировании расходящихся рядов, а также при построении эффективных итерационных алгоритмов решения систем линейных алгебраических уравнений. Описывается алгоритм определения значений расходящихся в классическом смысле непрерывных дробей. Этот алгоритм позволил построить практически удобный способ определения всех нулей полинома n -й степени. Рассматриваемый в статье метод суммирования используется при решении бесконечных систем линейных алгебраических уравнений (БСЛАУ). Это метод позволяет находить не только действительные, но и комплексные корни БСЛАУ, если они имеются. Показывается целесообразность использования непрерывных дробей при построении однородных вычислительных структур.

Бесконечные системы линейных алгебраических уравнений; непрерывные дроби; r/ϕ -алгоритм; однородные вычислительные структуры.

V.F. Guzik, V.I. Shmoylov, G.A. Kirichenko

CONTINUOUS FRACTIONS AND THEIR APPLICATION IN COMPUTATIONAL MATHEMATICS

Discusses the application of continued fractions for solving various tasks. It is shown that the continuous fractions have essential advantages in comparison with respectable rows at approximation of elementary and special functions. Continuous fractions can be used in summing divergent series, as well as for the creation of effective iterative algorithms solving systems of linear algebraic equations. Describe an algorithm for determining the values of divergent in the classical sense of continued fractions. This algorithm is allowed to build almost a convenient way