УДК 681.327

Л.С. Берштейн, С.Л. Беляков, А.В. Боженюк

МЕТОД МАГУ ДЛЯ НАХОЖДЕНИЯ НЕЧЕТКОГО МНОЖЕСТВА БАЗ НЕЧЕТКОГО ТЕМПОРАЛЬНОГО ГРАФА*

Рассмотрено понятие нечеткого множества баз нечеткого темпорального графа, который является обобщением, с одной стороны, нечеткого, с другой стороны – темпорального графов. В нечетком темпоральном графе степень связности вершин изменяется в дискретном времени. Большинство изоморфных преобразований темпоральных нечетких графов изменяют их внешнее представление, не меняя их сигнатуры. В связи с этим, актуальными являются вопросы, связанные с рассмотрением инвариантов темпоральных нечетких графов. В работе введены понятия конъюнктивного и дизъюнктивного нечетких множеств баз как инварианты темпорального нечеткого графа. Рассмотрен метод нахождения всех баз нечеткого темпорального графа с наибольшей степенью нечеткости, что позволяет находить конъюнктивные и дизъюнктивные нечеткие множества баз рассматриваемого нечеткого темпорального графа. Данный метод является расширением метода Магу для нечеткого темпорального графа. Рассмотрен пример нахождения нечеткого множества баз нечеткого темпорального графа.

Нечеткий темпоральный граф; степень связности; нечеткое множество баз.

L.S. Bershtein, S.L. Beliakov, A.V. Bozhenyuk

MAGHOUT METHOD FOR DEFINITION OF FUZZY BASE SET OF FUZZY TEMPORAL GRAPH

In this paper the notion of fuzzy base set of a fuzzy temporal graph is considered. The fuzzy temporal graph is a generalization of a fuzzy graph on the one hand, and a temporal graph on the other hand. The incidence of graph vertices is changed in the discrete time in the fuzzy temporal graph. The majority of isomorphic transformations temporal fuzzy graphs alter their appearance without changing their signatures. In this regard, relevant are the issues related to the consideration of invariants of temporal fuzzy graphs. The method of definition of a fuzzy base set is considered. This method is an extension of Maghout method for the fuzzy temporal graph. The example of definition of fuzzy base set is considered too.

Fuzzy temporal graph; subgraph of fuzzy temporal graph; incidence degree; fuzzy base set.

Теория графов привлекает большое внимание специалистов различных областей знания. Она используется для изучения многих сложных природных явлений. Наряду с традиционными применениями ее в таких науках, как физика, электротехника, химия, она проникла и в науки, считавшиеся раньше далекими от нее – экономику, социологию, лингвистику и др. Традиционно теория графов используется для представления отношений между элементами сложных структур различной природы [1–5]. При этом данные отношения между элементами являются постоянными и не меняются во времени. Такие графы в работе [6] были названы «статическими». В случае, когда отношения между элементами некоторой структуры изменяются во времени, традиционные «статические» графы не очень подходят для их описания и моделирования. В связи с этим является актуальным использование графов модели, в которой связи между элементами (вершинами графа) изменяются во времени, т.е. темпорального графа [7]. В случае, когда в темпоральном графе связи между вершинами являются нечеткими, приходим к понятию нечеткого темпорального графа [8–10].

* Работа поддержана грантами РФФИ № 12-01-00032а, №13-07-1303.

Однако, использование как нечетких, так и темпоральных нечетких графов как моделей различных систем имеет трудности. Эти связано с тем, что большинство изоморфных преобразований нечетких графов изменяют их внешнее представление, не меняя их сигнатуры. В связи с этим актуальными являются вопросы, связанные с рассмотрением инвариантов нечетких темпоральных графов.

В работе [11] введено понятие нечеткой базы нечеткого темпорального графа, которое является расширением нечеткой базы нечеткого графа, и является инвариантом относительно изоморфных преобразований рассматриваемого нечеткого темпорального графа, что позволяет производить его структурный анализ.

Пусть задан темпоральный нечеткий граф [7, 10] $G=(X,\{\tilde{\Gamma}_t\},T)$, где X – множество вершин графа с числом вершин $|X| = n$; $t = \{1,2,\ldots,T\}$ – множество натуральных чисел, определяющих дискретное время; $\{\tilde{\Gamma}_t\}$ – семейство соответствий, или отображений множества вершин X в себя в момент времени t из T.

Обозначим через $\tilde{G}_t = (X,\tilde{U}_t)$ нечеткий суграф темпорального нечеткого графа $G=(X,\{\tilde{\Gamma}_t\},T)$, где X – множество вершин, $\tilde{U}_t = \{\mu_t(x_i,x_j) \,|\, (x_i,x_j) \in X^2\}$ – нечеткое множество ребер в момент времени t с функцией принадлежности $\mu_t : X^2 \to [0,1]$.

Минимальной нечеткой базой со степенью α в момент времени t назовем подмножество вершин $B^t{}_\alpha \subset X$, из которого достижима любая вершина графа со степенью достижимости не менее $\alpha \in [0,1]$ и которое является минимальным в том смысле, что не существует подмножества $B' \subset B^t{}_\alpha$, обладающего таким же свойством достижимости.

Пусть $\tau_{X_k} = \{X_{k_1}, X_{k_2}, \ldots, X_{k_l}\}$ – семейство минимальных нечетких баз в момент времени t, состоящих из k вершин со степенями $\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2}, \ldots, \alpha_{k_l}$. Обозначим через $\alpha^{\max}_{X_k} = \max\{\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2}, \ldots, \alpha_{k_l}\}$. Величина $\alpha^{\max}_{X_k}$ означает, что в суграфе $\tilde{G}_t = (X,\tilde{U}_t)$ существует подмножество состоящее из k вершин, из которого достижимы все оставшиеся вершины со степенью не менее $\alpha^{\max}_{X_k}$ и не существует подмножества, состоящего из k вершин, из которого достижимы все оставшиеся вершины со степенью более $\alpha^{\max}_{X_k}$. Если семейство $\tau_{X_k} = \varnothing$, то определим $\alpha^{\max}_{X_k} = \alpha^{\max}_{X_{k-1}}$.

Множество $\tilde{B}^t{}_X = \{<\alpha^{\max}_{X_1}/1>, <\alpha^{\max}_{X_2}/2>, \ldots, <\alpha^{\max}_{X_n}/n>\}$ является нечетким множеством баз в момент времени t нечеткого суграфа $\tilde{G}_t$.

Определение 1. Множество $\tilde{B}_{\&} = \bigcap_{t=\overline{1,T}} \tilde{B}^t_X = \{<\alpha_1/1>, <\alpha_2/2>, \ldots, <\alpha_n/n>\}$ назовем конъюнктивным нечетким множеством баз темпорального нечеткого графа $G = (X,\{\tilde{\Gamma}_t\},T)$.

Конъюнктивное нечеткое множество баз определяет наилучшую степень достижимости всех вершин графа из базы, состоящей из 1, 2,…,n вершин в любой момент времени $t \in T$.

Определение 2. Множество $\tilde{B}_{\vee} = \bigcup_{t=\overline{1,T}} \tilde{B}^t_X = \{<\beta_1/1>, <\beta_2/2>, ..., <\beta_n/n>\}$ назовем дизъюнктивным нечетким множеством баз темпорального нечеткого графа $G=(X,\{\tilde{\Gamma}_t\},T)$.

Дизъюнктивное нечеткое множество баз определяет наилучшую степень достижимости всех вершин графа из базы, состоящей из 1, 2,…,n вершин в некоторый момент времени $t \in T$.

Обозначим через $\tilde{R}(B)$ нечеткое множество вершин, достижимых из произвольного множества $B \subset X$ в момент времени *t*, т.е., $\tilde{R}(B) = \bigcup_{x_i \in X} \tilde{\Gamma}(x_i)$, где $\tilde{\Gamma}(x_i)$ – нечеткое транзитивное замыкание вершины x_i в момент времени *t*. Тогда множество B_α является нечеткой базой в момент времени *t* со степенью α тогда и только тогда, когда выполняются условия:

$$\tilde{R}(B_\alpha) = \{<\mu_j/x_j>|x_j \in X \& (\forall j = \overline{1,n})(\mu_j \geq \alpha)\}, \qquad (1)$$

$$(\forall B' \subset B_\alpha)[\tilde{R}(B') = \{<\mu'_j/x_j>| x_j \in X \& (\exists j = \overline{1,n})(\mu'_j < \alpha)\}]. \qquad (2)$$

Условие (1) означает, что любая вершина либо входит во множество B_α, либо достижима из некоторой вершины этого же множества со степенью не менее α. А условие (2) говорит о том, что любое подмножество $B' \subset B_\alpha$ свойством (1) не обладает. Из определения нечеткой базы вытекают следующее свойство.

Пусть $\gamma(x_i, x_j)$ – степень достижимости вершины x_j из вершины x_i в момент времени *t*. Тогда справедливо высказывание:

$$(\forall x_i, x_j \in B^t{}_\alpha)[\gamma(x_i, x_j) < \alpha]. \qquad (3)$$

Иными словами, степень достижимости любой вершины $x_j \in B_\alpha$ из любой другой вершины $x_i \in B_\alpha$ в момент времени *t* меньше значения α.

Таким образом, нечеткой базой графа в момент времени *t* со степенью $\alpha \in [0,1]$ является такое подмножество вершин $B_\alpha \subset X$, которое удовлетворяет следующим условиям:

1. Каждая вершина графа достижима хотя бы из одной вершины множества B_α в момент времени *t* и при этом степень достижимости не меньше величины α, т.е. $(\forall x_j \in X/B_\alpha)[\exists x_i \in B_\alpha \mid \gamma(x_i, x_j) \geq \alpha]$.

2. Во множестве B_α нет вершины, которая достижима из другой вершины множества B_α в момент времени *t* со степенью большей или равной α, т.е. выполняется условие (3).

Рассмотрим подход к нахождению нечетких баз нечеткого темпорального графа. Данный подход основан на расширении метода Магу [1], который был применен для нахождения нечетких множеств внутренней, внешней устойчивости, нечетких множеств баз и антибаз, нечеткого множества живучести нечеткого графа [12–17].

Пусть B_α является нечеткой базой в момент времени t со степенью α. Тогда, для произвольной вершины $x_i \in X$ должно выполняться одно из условий:

а) $x_i \in B_\alpha$;

б) если $x_i \notin B_\alpha$, то существует вершина $x_j \in B_\alpha$, для которой степень достижимости $\gamma(x_j, x_i) \geq \alpha$ в момент времени *t*.

Иными словами, справедливо высказывание:

$$(\forall x_i \in X)[x_i \in B_\alpha \vee (x_i \notin B_\alpha \rightarrow (\exists x_j \in B_\alpha \mid \gamma(x_j, x_i) \geq \alpha))]. \qquad (4)$$

С каждой вершиной $x_i \in X$ свяжем булеву переменную p_i, принимающую значение 1 при $x_i \in B_\alpha$ и 0 при $x_i \notin B_\alpha$. Высказыванию $\gamma(x_j, x_i) \geq \alpha$ поставим в соответствие нечеткую переменную $\xi_{ji} = \alpha$.

Рассматривая выражение (4) для всех возможных значений *i* и *j*, получаем истинность нечеткого высказывания: $\Phi_B^t = \underset{i}{\&}(p_i \vee (\overline{p}_i \rightarrow (\underset{j}{\vee}(p_j \& \gamma_{ji}))))$.

Учитывая взаимосвязь между операциями импликация и дизъюнкция ($a \rightarrow b = \overline{a} \vee b$), преобразуем данное выражение к виду

$$\Phi_B^t = \underset{\mathrm{i}}{\&}(\mathrm{p_i} \vee \mathrm{p_i} \vee \underset{\mathrm{j}}{\vee}(\mathrm{p_j} \,\&\, \gamma_{\mathrm{ji}})).$$

Принимая во внимание, что величина $\xi_{jj} = 1$, окончательно получаем

$$\Phi_B^t = \underset{i}{\&}(\underset{j}{\vee}(p_j \& \gamma_{ji})). \qquad (5)$$

В последнем выражении раскроем скобки и приведем подобные члены, используя правила нечеткого поглощения. В результате выражение (5) будет представлено в виде:

$$\Phi_B^t = \underset{i=\overline{1,l}}{\vee}(p_{1_i} \,\&\, p_{2_i} \,\&\ldots\&\, p_{k_i} \,\&\, b_i). \qquad (6)$$

Справедливо следующее свойство: пусть в выражении (6) дальнейшее упрощение на основе правил нечеткого поглощения невозможно. Тогда для каждого *i*-го дизъюнктивного члена совокупность всех вершин, соответствующих переменным, которые в нем присутствуют, дает нечеткую базу с вычисленной степенью b_i в момент времени *t*.

По полученному выражению определяем нечеткие множества $\tilde{B}^t{}_X$ в моменты $t = \overline{1,T}$. Далее определяем нечеткие множества баз $\tilde{B}_\& = \bigcap_{t=\overline{1,T}} \tilde{B}_X^t$ и $\tilde{B}_\vee = \bigcap_{t=\overline{1,T}} \tilde{B}_X^t$ темпорального нечеткого графа.

Пример 1. Рассмотрим темпоральный нечеткий граф [18] $\tilde{G} = (X, \{\tilde{\Gamma}_t\}, T)$, у которого множество вершин $X = \{x_1, x_2, x_4\}$, время $T = \{1, 2, 3\}$, $n = 4$, $N = 3$, а семейство соответствий $\{\Gamma_t\}$ задано в виде:

$\Gamma_1(x_1)=\{<0{,}2/x_2>\}$, $\Gamma_2(x_1)=\{<0{,}5/x_2>\}$, $\Gamma_2(x_2)=\{<0{,}4/x_3>\}$, $\Gamma_3(x_2)=\{<0{,}6/x_3>\}$, $\Gamma_1(x_3)=\{<0{,}2/x_4>\}$, $\Gamma_2(x_3)=\{<0{,}3/x_4>\}$, $\Gamma_1(x_4)=\{<0{,}2/x_1>\}$, $\Gamma_2(x_4)=\{<0{,}9/x_2>\}$, $\Gamma_3(x_4)=\{<0{,}1/x_1>, <1/x_2>\}$.

Графически темпоральный нечеткий граф можно задать в виде ориентированного графа (рис. 1), на дугах которого указано нечеткое множество на множестве времени $T = \{1, 2, 3\}$.

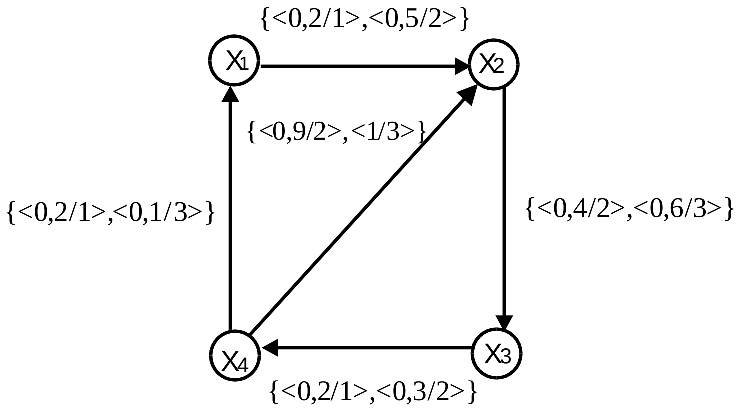

Рис. 1. Пример нечеткого темпорального графа

Таким образом, темпоральный нечеткий граф сводится к семейству T нечетких суграфов на одном и том же множестве вершин X, приведенном на рис. 2–4.

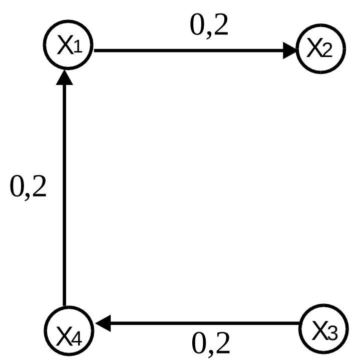

Рис. 2. Нечеткий суграф $\tilde{G}_1$ *для времени t=1*

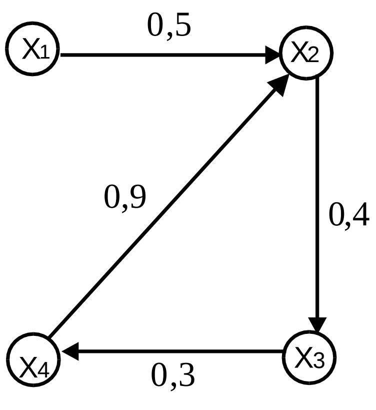

Рис. 3. Нечеткий суграф $\tilde{G}_2$ *для времени t=2*

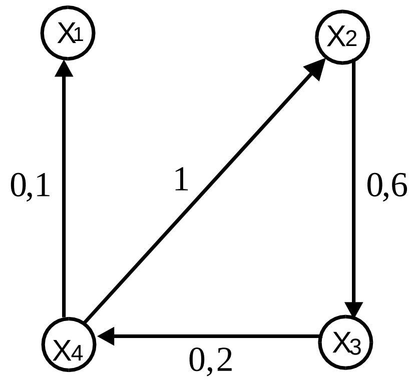

Рис. 4. Нечеткий суграф $\tilde{G}_3$ *для времени t=3*

Определяем нечеткие множества баз:

$\tilde{B}^1{}_X = \{<0{,}2/1>,<1/4>\}$,

$\tilde{B}^2{}_X = \{<0{,}3/1>,<0{,}4/2>,<0{,}9/3>,<1/4>\}$

и $\tilde{B}^2{}_X = \{<0{,}1/1>,<0{,}6/2>,<1/3>,<1/4>\}$.

Отсюда конъюнктивное и дизъюнктивное нечеткие множества баз нечеткого темпорального графа определяются:

$\tilde{B}_{\&} = \{<0{,}2/1>,<0{,}2/2>,<0{,}2/3>,<1/4>\}$

и $\tilde{B}_{\vee} = \{<0{,}3/1>,<0{,}6/2>,<1/3>,<1/4>\}$ соответственно. Таким образом, для нечеткого темпорального графа, представленного на рис. 1, в любой момент времени существует база, состоящая из одной вершины со степенью достижимости не менее 0,2, и в некоторый момент времени существует база, состоящая из двух вершин, со степенью достижимости 0,6.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Кофман А.* Введение в прикладную комбинаторику. – М.: Наука, 1975.
2. *Кристофидес Н.* Теория графов. Алгоритмический подход. – М.: Мир, 1978.
3. *Харари Ф.* Теория графов. – М.: Мир, 1973.
4. *Родзин С.И.* Вычислительный интеллект: немонотонные логики и графическое представление знаний // Программные продукты и системы. – 2002. – № 1. – С. 20-22.
5. *Родзин С.И.* Организация параллельных эволюционных вычислений // Вестник компьютерных и информационных технологий. – 2010. – № 9. – С. 7-13.
6. *Kostakos V.* Temporal graphs. In Proc. of Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. – 2008. – Vol. 388, Issue 6. – P. 1007-1023.
7. *Берштейн Л.С., Боженюк А.В.* Использование темпоральных графов как моделей сложных систем // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2010. – № 4 (105). – С. 198-203.
8. *Берштейн Л.С., Боженюк А.В., Розенберг И.Н.* Определение сильной связности нечетких темпоральных графов // ОПиПМ. – 2011. – Т. 18. – Вып. 3. – С. 414-415.
9. *Берштейн Л.С., Боженюк А.В., Розенберг И.Н.* Метод нахождения сильной связности нечетких темпоральных графов // Вестник Ростовского государственного университета путей сообщения. – 2011. – № 3 (43). – С. 15-20.
10. *Берштейн Л.С., Беляков С.Л., Боженюк А.В.* Использование нечетких темпоральных графов для моделирования в ГИС // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2012. – № 1 (126). – С. 121-127.

11. *Боженюк А.В.* Определение нечеткого множества баз нечеткого темпорального графа // Сборник научных трудов SWorld. Материалы международной научно-практической конференции «Современные проблемы и пути их решения в науке, транспорте, производстве и образовании ‘2012». – Вып. 4. – Т. 3. – Одесса: КУПРИЕНКО, 2012. – С. 20-24.
12. *Берштейн Л.С., Боженюк А.В.* Оценка степени изоморфизма на основе нечетких множеств внутренней устойчивости и клик нечетких графов // Программные продукты и системы. – 2002. – № 1. – С. 12-15.
13. *Берштейн Л.С., Боженюк А.В.* Нечеткая раскраска и оценка степени изоморфизма нечетких графов // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2002. – № 3. – С. 116-122.
14. *Боженюк А.В.* Определение внешней устойчивости нечеткого темпорального графа // Сборник научных трудов SWorld. Материалы Международной научно-практической конференции «Современные направления теоретических и прикладных исследований ‘2012». – Вып. 1. – Т. 10. – Одесса: Куприенко, 2012. – С. 23-25.
15. *Боженюк А.В., Гинис Л.А.* Об использовании нечетких внешне устойчивых множеств для анализа нечетких когнитивных карт // Обозрение прикладной и промышленной математики. – 2007. – Т. 14. – Вып. 5. – С. 857.
16. *Bershtein L.S., Bozhenuk A.V.* Maghout Method for Determination of Fuzzy Independent, Dominating Vertex Sets and Fuzzy Graph Kernels // International Journal of General Systems. – 2001. Т. 30, № 1. – С. 45-52.
17. *Bozhenyuk A., Rozenberg I.* Allocation of Service Centers in the GIS with the Largest Vitality Degree // Advances in Computational Intelligence. / S. Greco et al. (Eds.): IPMU 2012, Part II, Series: Communications in Computer and Information Science, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2012. – Vol. 298. – P. 98-106.
18. *Берштейн Л.С., Боженюк А.В.* Определение внутренней устойчивости нечеткого темпорального графа // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2012. – № 5 (130). – С. 75-80.

Статью рекомендовал к опубликованию д.т.н., профессор В.П. Карелин.

Берштейн Леонид Самойлович – Федеральное государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Южный федеральный университет»; e-mail: lsb@tti.sfedu.ru; 347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44; тел.: 88634371695; кафедра информационно-аналитических систем безопасности; д.т.н.; профессор; зав. кафедрой.

Беляков Станислав Леонидович – e-mail: beliacov@yandex.ru; кафедра информационно-аналитических систем безопасности; д.т.н.; профессор.

Боженюк Александр Витальевич – e-mail: avb002@yandex.ru; кафедра информационно-аналитических систем безопасности; д.т.н.; профессор.

Bershtein Leonid Samoilovich – Federal State-Owned Autonomy Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”; e-mail: lsb@tti.sfedu.ru; 44, Nekrasovskiy, Taganrog, 347928, Russia; phone: +78634371695; the department of information-analytical systems of safety; dr. of eng. sc.; professor; chief of department.

Beliacov Stanislav Leonidovich – e-mail: beliacov@yandex.ru; the department of information-analytical systems of safety; dr. of eng. sc.; professor.

Bozhenyuk Alexandr Vitalievich – e-mail: avb002@yandex.ru; the department of information-analytical systems of safety; dr. of eng. sc.; professor.