

УДК 517.977.55:612.76

П.А. Кручинин, Е.А. Касаткин**СТАБИЛОМЕТРИЧЕСКИЙ ТЕСТ СО СТУПЕНЧАТЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ
И ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО БЫСТРОДЕЙСТВИЯ***

Рассматривается задача моделирования стабилметрического теста со ступенчатым воздействием. Тест состоит в следующем. Человек стоит на стабилметрической платформе перед экраном, на котором изображена мишень и отображается движение центра давления человека, определяемое по показаниям стабилоанализатора. В начале теста центр мишени соответствует среднему положению центра давления человека на опорную плоскость. В ходе теста производят изменение положения мишени и человека просят быстро изменить положение туловища только за счет изменения угла в голеностопном суставе таким образом, чтобы совместить образ центра давления с центром мишени и удерживать его в окрестности этого положения. Этому тесту ставится в соответствие решение задачи быстрого действия для изменения положения перевернутого маятника, управляемого с помощью момента в опорном шарнире. Скорость изменения момента предполагается ограниченной. Приводимое моделирование позволяет высказать гипотезу о причине возвратного движения человека на начальной стадии.

Стабилометрия; управление движением; оптимальное быстрое действие.

P.A. Kruchinin, E.A. Kasatkin**STABILOMETRIC TEST WITH THE VISUAL STEP DISTURBANCE
AND OPTIMAL SPEED-OF-RESPONSE PROBLEM**

The problem of stabilometric test modeling with visual step disturbance is considered. The test consists in the following. The person stands on a force plate, look at the screen on which the target and center movement of the pressure person are displayed. COP position is given by force plate indications. At the test beginning the center of a target corresponds to average COP position on the basic plane. During test target position make change and the person is asked to change quickly body position due to change of an ankle angle so that to combine COP image with the center of a target and to hold it in a vicinity of the last. The solution of a speed-of-response problem for change the inverted pendulum position by means of the torque in a reference point is put in compliance for this test. Speed of torque change is supposed limited. Given model allows to assume the reason of the person returnable motion at an initial stage.

Stabilometry; motion control; optimal solution of speed-of-response problem.

В литературе встречается решение задач оптимального быстрого действия для моделей движения человека [1, 2]. Исследование таких задач может помочь объяснить некоторые особенности результатов, наблюдаемых при обследованиях. Рассмотрим с этой точки зрения выполнение человеком стабилметрического теста со ступенчатым воздействием. Этот тест последнее время стал использоваться в исследованиях [3, 4] и состоит в следующем. Человек стоит на платформе стабилоанализатора перед экраном, на котором изображена мишень и отображается движение центра давления человека, определяемое по показаниям стабилоанализатора. В начале теста центр мишени совмещён со средним положением центра давления человека на опорной плоскости. В ходе теста производят изменение положения мишени и человека просят быстро изменить положение туловища за счет изменения угла в голеностопном суставе таким образом, чтобы совместить образ центра давления на экране с центром мишени и удерживать его в окрестности последнего. Величина смещения задается в результате предварительной калибровки в соответ-

* Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 12-01-00839).

ствии со способностями и возможностями обследуемого. Перед проведением записи человек совершает необходимое движение несколько раз для тренировки.

При проведении теста стабилоанализатор определяет траекторию центра давления по опорной поверхности. Характерный вид зависимости от времени сагиттальной стабилограммы показан сплошной линией на рис. 1. Хорошо видно, что прежде чем начать движение в направлении новой задаваемой позиции центр давления совершает возвратное движение в направлении, противоположном направлению движения цели. Аналогичный участок наблюдается и в заключительной части движения. Этот эффект устойчив и наблюдается у подавляющего числа обследуемых. Объяснение возвратного движения на начальном участке в литературе не известно. Для объяснения такого движения рассмотрим задачу быстрогодействия для изменения положения перевернутого маятника, управляемого с помощью момента, приложенного в опорном шарнире.

Для описания движения человека в сагиттальной плоскости используем традиционную модель перевернутого маятника [5, 6], изображенную на рис. 2. Предполагаем, что тело человека в ходе теста допустимо моделировать недеформируемым стержнем массы m_p , закрепленным шарнирно в точке O , соответствующей голеностопному суставу.

Центр масс стержня расположен в точке C , удаленной от точки O на расстояние l . Момент инерции стержня относительно фронтальной оси, проходящей через точку O , равен J . Отклонение стержня от вертикали опишем углом θ .

Будем считать, что стопа неподвижна относительно платформы. Уравнения движения для малых значений угла θ и скорости его изменения запишем, как традиционно принято [5] для этой задачи

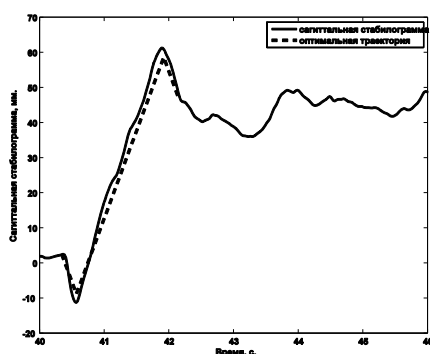


Рис. 1. Сагиттальная стабилограмма при выполнении теста со ступенчатым воздействием. Пунктирной линией показана траектория оптимального быстрогодействия

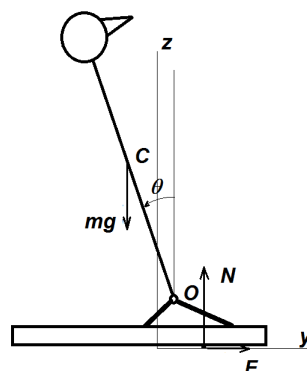


Рис. 2. Схема приложения сил и моментов в сагиттальной плоскости

$$J\ddot{\theta} = m_p g l \theta + M_x. \quad (1)$$

Для сравнения результатов испытаний используем задачу быстрогодействия в следующей форме: необходимо решение уравнения (1) перевести из начального положения $\theta(0) = \theta_0$ и $\dot{\theta}(0) = 0$ в положение $\theta(T) = \theta_f$ и $\dot{\theta}(T) = 0$ за минимальное время T с помощью значений момента в голеностопном суставе, у которого скорость изменения ограничена величиной $|\dot{M}_x| \leq U_{\max}$. Будем считать, что и в

начальный и в конечный моменты времени система находится в положении равновесия, и момент принимает значения $M_x(0) = -m_p gl\theta_0$ и $M_x(T) = -m_p gl\theta_f$. Заметим, что хорошо известное решение задачи быстродействия с ограничением величины момента [7, 8] требует однократного мгновенного изменения величины момента и не дает объяснения отмеченным участкам возвратного движения.

Для упрощения математического описания задачи введём безразмерное время

$$\tau = t/t_*, \text{ где } t_* = \sqrt{\frac{J}{m_p gl}} \quad (2)$$

и перейдём к безразмерным переменным $\varphi = \frac{\theta - \theta_0}{\theta_*}$ и $m = \frac{M_x - M_{xf}}{m_p gl\theta_*}$, где M_{xf}

- значение момента в голеностопном суставе, необходимое для удержания равновесия в финальной позе при $\theta = \theta_f$. В качестве характерного значения угла выберем величину изменения угла в голеностопном суставе при выполнении теста со ступенчатым возмущением $\theta_* = \theta_f - \theta_0$. Управлением u будем считать скорость изменения безразмерного момента. Для этих переменных обезразмеренные уравнения движения примут вид

$$\varphi'' = \varphi + m; \quad m' = u. \quad (3)$$

Здесь через (') обозначено дифференцирование по безразмерному времени τ . Необходимо решение системы (3) перевести из начального положения

$$\varphi(0) = 1; \quad \varphi'(0) = 0 \quad m(0) = -1 \quad (4)$$

в положение

$$\varphi(\tau_f) = 0; \quad \varphi'(\tau_f) = 0; \quad m(\tau_f) = 0 \quad (5)$$

за минимальное время с помощью ограниченного по модулю управления

$$|u| \leq u_m = \frac{U_{\max}}{m_p gl\theta_* t_*}.$$

Эта задача относится к хорошо исследованному классу задач оптимального управления [7]. Её особенность состоит в задании специфических краевых условий. Используем для решения принцип максимума Понтрягина. Рассматриваемая нами задача описывается линейной управляемой системой третьего порядка (3), все собственные числа которой действительны. Известно [7], что в этом случае оптимальное управление принимает только постоянные значения $u = \pm u_m$ и имеет не более двух переключений в моменты τ_1 и τ_2 . Тогда задачу можно решать, рассматривая траектории системы (3), удовлетворяющие краевым условиям (4) и (5).

Будем предполагать, что на начальном участке движения при $\tau \in [0, \tau_1]$ управление принимает значение u_1 , которое равно $-u_m$ либо u_m . Тогда после первого переключения на втором участке движения при $\tau \in [\tau_1, \tau_2]$ управление меняет знак и принимает значение $-u_1$. На заключительном участке $\tau \in [\tau_2, \tau_f]$ управление снова примет значение u_1 .

Решение системы (3) для интервала времени $\tau \in [0, \tau_1]$ с учетом начальных условий (4) имеет вид

$$\begin{cases} \varphi_1(\tau) = \frac{u_1}{2}(e^\tau - e^{-\tau}) - u_1\tau + 1 \\ \varphi_1'(\tau) = \frac{u_1}{2}(e^\tau + e^{-\tau}) - u_1 \\ m_1(\tau) = -1 + u_1\tau \end{cases}$$

Для интервала времени $\tau \in [\tau_1, \tau_2]$ с учетом условий в точке первого переключения

$$\varphi_2(\tau_1) = \varphi_1(\tau_1); \quad \varphi_2'(\tau_1) = \varphi_1'(\tau_1) \quad m_2(\tau_1) = m_1(\tau_1)$$

решение системы (3) имеет вид

$$\begin{cases} \varphi_2(\tau) = -\frac{u_1}{2}(e^{\tau-\tau_1} - e^{-\tau+\tau_1}) + u_1(\tau - \tau_1) + 1 - u_1\tau_1, \\ \varphi_2'(\tau) = -\frac{u_1}{2}(e^{\tau-\tau_1} + e^{-\tau+\tau_1}) + u_1, \\ m_2(\tau) = -1 - u_1(\tau - \tau_1) + u_1\tau_1. \end{cases}$$

Наконец для интервала времени $\tau \in [\tau_2, \tau_f]$ с учетом финальных условий (5) решение системы (3) имеет вид

$$\begin{cases} \varphi_3(\tau) = \frac{u_1}{2}(e^{\tau-\tau_f} - e^{-\tau+\tau_f}) - u_1(\tau - \tau_f), \\ \varphi_3'(\tau) = \frac{u_1}{2}(e^{\tau-\tau_f} + e^{-\tau+\tau_f}) - u_1, \\ m_3(\tau) = u_1(\tau - \tau_f). \end{cases}$$

В таком случае соотношения сопряжения решений в точке второго переключения

$$\varphi_2(\tau_2) = \varphi_3(\tau_2); \quad \varphi_2'(\tau_2) = \varphi_3'(\tau_2) \quad m_2(\tau_2) = m_3(\tau_2)$$

позволяют замкнуть систему уравнений для отыскания траектории, удовлетворяющей начальным и финальным условиям при кусочно-постоянном управлении с двумя переключениями. После преобразований получим систему трансцендентных уравнений относительно переменных τ_1, τ_2, τ_f

$$\begin{cases} -\frac{u_1}{2}(e^{\tau-\tau_1} - e^{-\tau+\tau_1}) + u_1(\tau - \tau_1) + 1 - u_1\tau_1 = \frac{u_1}{2}(e^{\tau-\tau_f} - e^{-\tau+\tau_f}) - u_1(\tau - \tau_f), \\ -\frac{u_1}{2}(e^{\tau-\tau_1} + e^{-\tau+\tau_1}) + u_1 = \frac{u_1}{2}(e^{\tau-\tau_f} + e^{-\tau+\tau_f}) - u_1, \\ -1 - u_1(\tau - \tau_1) + u_1\tau_1 = u_1(\tau - \tau_f). \end{cases} \quad (6)$$

Для анализа решений этой системы введем новые переменные

$$x = e^{\tau_1}; \quad y = e^{\tau_2}; \quad z = e^{\tau_f/2}. \quad (7)$$

Тогда система (6) примет вид

$$\begin{cases} \frac{y}{z^2}(z^2 - 1) = 2(\beta z - 1); \\ \frac{2y}{\beta z}(\beta z - 1) = z^2 - 1; \\ \beta x = \frac{y}{z}, \end{cases} \quad (8)$$

где

$$\beta = e^{-\frac{1}{2u_1}}.$$

Исключим из этой системы переменные x и y , которые удовлетворяют соотношениям

$$x = \sqrt{\frac{z}{\beta}}; \quad y = \sqrt{\beta z^3}. \quad (9)$$

учитывая положительность x , y и z получим уравнение 4-й степени для отыскания z

$$z^4 - 4\beta z^3 + 6z^2 - \frac{4}{\beta}z + 1 = 0. \quad (10)$$

Для исследования знака величины u_1 перепишем уравнение (10) в виде

$$(z-1)^4 = 4\frac{\beta-1}{\beta}z(z^2\beta-1). \quad (11)$$

Левая часть этого равенства положительна. Так как $z > 1$ и из положительности левой части первого равенства системы (8) следует $\beta z > 1$, то должно выполняться неравенство $\beta z^2 > 1$. Тогда из равенства (11) должно выполняться условие $\beta > 1$, и величина u_1 должна быть отрицательна.

Таким образом, управление безразмерной системой формируется следующим образом

$$u = \begin{cases} -u_m & \text{при } \tau \in [0, \tau_1] \cup [\tau_2, \tau_f] \\ +u_m & \text{при } \tau \in [\tau_1, \tau_2] \end{cases}.$$

В которых для отыскания значений τ_1, τ_2, τ_f необходимо найти минимальный действительный корень полинома (10) превышающий 1 при $u_1 = -u_m$, вычислить величины x и y из соотношений (9) и вычислить значения безразмерных времен из (7).

Приближенное моделирование показаний стабилоанализатора в соответствии с [6] позволяет сравнить результаты модельных показаний для разработанного управления, с реальной записью. Сагитальная стабиллограмма в первом приближении отображает значения момента в голеностопном суставе, нормированные весом человека. Пунктирной линией на рис. 1 представлено приближенное расчетное значение величины $m_x = \frac{M_x}{m_p g}$, вычисленное для значений параметров при-

ближенно соответствующих антропометрическим данным обследуемого $l=0,8$ м, $m_p=71$ кг, $t_* = 0,33$ с и $U_{\max}=35$ н м/с. Эта кривая хорошо накладывается на траекторию центра давления. Отличие этой траектории от других реализаций движения

человека довольно велико. Это объясняется тем, что полученное программное движение неустойчиво, и при реальном движении человек, по-видимому, не включает управленческие механизмы, стабилизирующие вертикальную позу. Основной рисунок движения остается неизменным.

Вышеизложенное позволяет выдвинуть гипотезу о связи реального движения человека при выполнении теста с движением, реализуемым на основании алгоритма быстрого действия с ограничением на скорость изменения момента в голеностопном суставе. Происхождение этого ограничения и влияние на него прочих факторов требует дополнительного исследования.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Pandy M.G., Zajac F.E., Sim E., Levine W.S.* An optimal control model for maximum height human jumping // *Journal of Biomechanics*. – 1990. – Vol. 23. – P. 1185-1198.
2. *Happee R.* Time optimality in the control of human movements // *Biological cybernetics*. – 1992. – Vol. 66. – P. 357-366.
3. *Слива С.С., Войнов И.Д., Слива А.С.* Стабилоанализаторы в адаптивной физической культуре и спорте // IV Международная научная конференция по вопросам состояния и перспективам развития медицины в спорте высших достижений «СПОРТМЕД-2009». – М.: Экспоцентр, 2009. – С. 121-123.
4. *Муртазина Е.П.* Функциональные особенности выполнения стабилографических тестов у испытуемых с различными антропометрическими данными // *Известия ЮФУ. Технические науки*. – 2009. – № 9 (98). – С. 123-127.
5. *Гурфинкель В.С., Коц Я.М., Шик М.Л.* Регуляция позы человека. – М.: Наука, 1965. – 256 с.
6. *Кручинин П.А.* Механические модели в стабилометрии // *Российский журнал биомеханики*. – 2014. – Т. 18, № 2. – С. 184-193.
7. *Атанс М., Фалб П.* Оптимальное управление. – М.: Машиностроение, 1968. – 764 с.
8. *Кручинин П.А.* Об использовании решения задачи оптимального быстрого действия при анализе результатов стабилометрического теста со ступенчатым воздействием // Доклады 11-й Международной научно-технической конференции «Физика и радиоэлектроника в медицине и экологии». Кн. 1. – Владимир, 2014. – С. 255-259.

REFERENCES

1. *Pandy M.G., Zajac F.E., Sim E., Levine W.S.* An optimal control model for maximum height human jumping, *Journal of Biomechanics*, 1990, Vol. 23, pp. 1185-1198.
2. *Happee R.* Time optimality in the control of human movements, *Biological cybernetics*, 1992, Vol. 66, pp. 357-366.
3. *Sliva S.S., Voynov I.D., Sliva A.S.* Stabiloanalizatory v adaptivnoy fizicheskoy kul'ture i sporte [The stabile-analyzers in adaptive physical culture and sports], *IV Mezhdunarodnaya nauchnaya konferentsiya po voprosam sostoyaniya i perspektivam razvitiya meditsiny v sporte vysshikh dostizheniy «SPORTMED-2009»* [IV international scientific conference on the state and prospects of development of medicine in the sport of high achievements "SPORTMED-2009"]. Moscow: Ekspotsentr, 2009, pp. 121-123.
4. *Murtazina E.P.* Funktsional'nye osobennosti vypolneniya stabilograficheskikh testov u ispytuemykh s razlichnymi antropometricheskimi dannymi [Functional features of performance postural tests at examinees with the various anthropometrical data], *Izvestiya YuFU. Tekhnicheskie nauki* [Izvestiya SFedU. Engineering Sciences], 2009, No. 9 (98), pp. 123-127.
5. *Gurfinkel' V.S., Kots Ya.M., Shik M.L.* Regulyatsiya pozy cheloveka [Regulation poses]. Moscow: Nauka, 1965, 256 p.
6. *Kruchinin P.A.* Mekhanicheskie modeli v stabilometrii [Mechanical model stabilometry], *Rossiyskiy zhurnal biomekhaniki* [Russian Journal of Biomechanics], 2014, Vol. 18, No. 2, pp. 184-193.
7. *Atans M., Falb P.* Optimal'noe upravlenie [Mechanical model stabilometry]. Moscow: Mashinostroenie, 1968, 764 p.

8. *Kruchinin P.A.* Ob ispol'zovanii resheniya zadachi optimal'nogo bystrodeystviya pri analize rezultatov stabilometricheskogo testa so stupenchatym vozdeystviem [About the use of solving the problem of optimal performance in the analysis of the results of the stabilometric test with manual exposure], *Doklady 11-y Mezhdunarodnoy nauchno-tekhnicheskoy konferentsii «Fizika i radioelektronika v meditsine i ekologii»* [Proc. of 11-th International scientific-technical conference "Physics and Radioelectronics in medicine and ecology"]. Kn. 1. Vladimir, 2014, pp. 255-259.

Статью рекомендовал к опубликованию профессор А.М. Формальский.

Кручинин Павел Анатольевич – Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова; e-mail: pkruch@mech.math.msu.su; 119992 Москва, Ленинские горы; тел.: +74959393383; к.ф.-м.н.; доцент.

Касаткин Евгений Александрович – e-mail: wildfan@yandex.ru; студент

Kruchinin Pavel Anatolievich – Moscow Lomonosov State University; e-mail: pkruch@mech.math.msu.su; Lenin hills, Moscow, 119992, Russia; тел.: +74959393383; cand. of phis.-math. sc.; associate professor.

Kasatkin Eugeny Aleksandrovich – e-mail: wildfan@yandex.ru; student.