УДК 621.373+519.622

В.Н. Бирюков, А.М. Пилипенко

АНАЛИЗ ПОГРЕШНОСТИ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ АВТОГЕНЕРАТОРОВ ВО ВРЕМЕННОЙ ОБЛАСТИ*

Рассмотрены свойства численных методов решения дифференциальных уравнений жестких и колебательных цепей. В качестве исследуемых цепей были выбраны различные виды генераторов – идеальный осциллятор, генератор колебаний, близких по форме к гармоническим, и релаксационный генератор. Выбор указанных цепей в качестве тестовых для исследования свойств численных методов объясняется тем, что моделирование автогенераторов представляет наибольшие трудности для современных средств схемотехнического проектирования радиоэлектронных устройств. Основная цель данной работы заключается в оценке точности численных методов анализа во временной области жестких и колебательных радиотехнических цепей с помощью исследования погрешностей основных параметров моделируемого процесса – амплитуды, периода и постоянной составляющей генерируемых колебаний. Такой подход, во-первых, удовлетворяет практическим потребностям разработчиков радиоэлектронной аппаратуры, во-вторых, позволяет оценить точность моделирования не только в конце интервала наблюдения, а на всем его протяжении без существенных ограничений на длительность временного интервала. Представленные в работе результаты описывают характер погрешностей оценки амплитуды и периода при гармонических колебаниях и иллюстрируют появление больших случайных ошибок при сильной нелинейности цепей, генерирующих релаксационные колебания.

Моделирование; обыкновенные дифференциальные уравнения; автоколебательные цепи; релаксационный генератор; погрешность решения.

V.N. Biryukov, A.M. Pilipenko

ANALYSIS OF THE ERROR OF OSCILLATOR’S NUMERICAL SIMULATION IN THE TIME DOMAIN

The simulation features of harmonic and relaxation oscillators are considered when using the modern software packages for electronic circuits design. The advantages and disadvantages of the numerical methods for solving differential equations of stiff and oscillatory circuits are shown. Different types of generators (ideal oscillator, oscillator close to the harmonic and relaxation oscillator) were chosen as a test circuits. The choice of these devices for test is due to the fact that the modeling of self-excited oscillators represents the greatest difficulties for computer-aided circuit design. To estimate the accuracy of numerical methods the basic parameters of the simulated process (amplitude and period of the oscillations) error analysis was carried out. This approach, firstly satisfies the practical requirements, and secondly, allows estimating the simulation accuracy not only at the end of the observation interval, and over its entire length without any significant restrictions on the length of the interval. Properties presented in the paper are associated with periodic error of the solution in the analysis of harmonic oscillators. The disadvantage of numerical methods for the analysis of strongly nonlinear circuits, generating relaxation oscillations, is the appearance of large random errors.

Time-domain simulation; ordinary differential equations; oscillatory circuits; relaxation oscillator; error analysis.

Введение. Интенсивная разработка в последние десятилетия новых методов анализа высокодобротных цепей, в частности автогенераторов, в частотной области объясняется, по-видимому, неудовлетворительной точностью анализа указанных цепей во временной области [1, 2]. Несмотря на то, что численные методы

* Работа выполнена при поддержке стипендии Президента Российской Федерации молодым ученым и аспирантам (СП-398.2012.5).

решения дифференциальных уравнений цепей продолжают совершенствоваться, их точность по-прежнему не считается достаточной для практических целей. Ситуация объясняется, в частности, тем, что деление обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) на жесткие и осциллирующие [3] в некоторой мере условно, поскольку ОДУ радиотехнических цепей, как правило, и жесткие, и осциллирующие одновременно. Вторая трудность анализа радиотехнических цепей обусловлена тем, что задача Далквиста, на которой тестируются свойства численных методов решения ОДУ, дает приближенные сведения о погрешности численных методов на всей комплексной плоскости. В частности, константа главного члена асимптотической локальной погрешности с изменением направления на комплексной плоскости может менять знак, что делает условным даже порядок метода [4]. По той же причине и тестовая задача идеального осциллятора [5, 6] не позволяет уверенно оценивать погрешность методов в цепях с конечной добротностью.

В общем случае универсальной оценки погрешности численного метода решения ОДУ не существует, как и гарантии выполнения опционных максимальных погрешностей в электронных симуляторах. В результате на практике предлагается, кроме понятия «погрешность метода», ввести понятие его «достоверности» [7]. Интересно отметить, что аналогичная ситуация сложилась и с понятием «погрешность моделирования компонентов радиочастотных интегральных схем» [8].

В данной работе рассматривается возможность оценки погрешности численных методов решения ОДУ не стандартным путем исследования локальной и (или) глобальной погрешности метода, а с помощью анализа погрешностей основных параметров моделируемого процесса – в данном случае периода и амплитуды генерируемых колебаний. С одной стороны, такая постановка задачи удовлетворяет практическим потребностям, с другой – анализируемая погрешность является разновидностью глобальной погрешности, отличаясь от последней тем, что определяется не в конце интервала наблюдения, а на всем его протяжении и не накладывает ограничений на протяженность интервала.

1. Модель автогенератора. Простейшей моделью генератора колебаний может служить цепь из параллельно включенных емкости *C*, индуктивности *L* и нелинейного резистивного элемента с отрицательным (при малых амплитудах) дифференциальным сопротивлением. В этом случае дифференциальное уравнение автогенератора относительно напряжения на его выходе имеет вид [2]

$$\frac{d^2u}{dt^2}+\frac{1}{C}\frac{df(u)}{du}\frac{du}{dt}+\frac{1}{LC}u=0, \tag{1}$$

где $f(u)$ – вольт-амперная характеристика (ВАХ) нелинейного резистивного элемента.

Дифференциальное уравнение (1) является уравнением Ван дер Поля, если ВАХ нелинейного элемента описывается полиномом третьей степени

$$f(u)=-au+bu^3, \tag{2}$$

где a и b – положительные константы.

Получение точного решения уравнения Ван дер Поля для случая произвольных потерь вызывает значительные трудности [9]. Точное стационарное решение уравнения (1) удается получить существенно проще, если аппроксимировать ВАХ кусочно-линейной зависимостью [9, 10]

$$f(u)=\begin{cases} G_1(u+2U_0),\ u<-U_0; \\ -G_0u,\ -U_0\le u\le U_0; \\ G_1(u-2U_0),\ u>U_0, \end{cases} \tag{3}$$

где G_0 и G_1 – модули дифференциальных проводимостей нелинейного элемента при $df/du < 0$ и $df/du > 0$ соответственно; $\pm U_0$ – значения напряжения, при которых дифференциальная проводимость df/du меняет знак на противоположный.

Аппроксимации (2) и (3) позволяют получить решение, сколь угодно близкое к гармоническому колебанию, или решение в виде релаксационных колебаний при любой жесткости модели автогенератора. При аппроксимации ВАХ кубическим полиномом дифференциальная проводимость нелинейного элемента описывается аналитической функцией, при аппроксимации кусочно-линейной функцией – имеет разрывы. Следует отметить, что на практике как мощные генераторы гармонических колебаний, так и генераторы релаксационных колебаний обычно работают в режиме с отсечкой тока активных элементов, следовательно, реально дифференциальные параметры транзисторов меняются во времени крайне быстро, т.е. близки к разрывным функциям.

Погрешность стационарного гармонического или близкого к гармоническому решения можно оценить двумя величинами: погрешностями оценки амплитуды и периода колебания соответственно

$$\varepsilon_A(t) = \left|U_m(t) - U_{m0}\right|;\ \varepsilon_T(t) = \left|\,T(t) - T_0\right|,$$

где $U_m(t)$ и $T(t)$ – оценки амплитуды и периода генерируемого колебания, полученные из решения ОДУ (1) численными методами; $U_{m\,0}$ и T_0 – точные значения амплитуды и периода автоколебания.

Для более тщательного анализа точности численного решения уравнения автогенератора была введена третья величина – погрешность постоянной оценки составляющей ε_0, равная среднему значению полученного колебания. В случае симметричной ВАХ нелинейного элемента автогенератора постоянная составляющая в точном решении ОДУ (1) должна отсутствовать.

Поскольку численное решение уравнения автогенератора дискретно, то для определения текущего значения амплитуды колебаний необходимо использовать интерполяцию. Численный эксперимент показал, что необходимую для анализа точность оценки амплитуды можно получить путем квадратичной интерполяции решения в точках локальных экстремумов.

2. Генератор «почти» гармонических колебаний. Рассмотрим модель автогенератора, описывающуюся ОДУ (1), где $f(u)$ аппроксимируется кусочно-линейной функцией (3). В работе [11] показано, что при кусочно-линейной зависимости $f(u)$ решение ОДУ (1) будет близким по форме к гармоническому колебанию при $\sigma/G_1 >> 1$, где $\sigma = \sqrt{C/L}$ – характеристическая проводимость LC-контура. Для получения режима колебаний, близких к гармоническим, будем полагать $L = 1$ Гн, $C = 1$ Ф, $G_0 = G_1 = G = 0{,}01$ См, $U_0 = 1$ В. При этом значения амплитуды и периода колебаний $U_{m\,0} \approx 2{,}475416990116814$ В и $T_0 \approx 6{,}2832125781953$ с соответственно.

Для анализа генераторов квазигармонических колебаний используются $A(\pi/2)$-устойчивые численные методы решения ОДУ. Для иллюстрации преимуществ $A(\pi/2)$-устойчивого метода на рис. 1 приведены текущие погрешности расчета амплитуды автогенератора методом трапеций (*TR*) 2-го порядка точности и *A*-устойчивым методом *RADAU* 5-го порядка при шаге численного решения $h = T/2^8$ (рис. 1, а) и $h = T/2^9$ (рис. 1,б). Предельно допустимая относительная погрешность для случая, показанного на рис. 1, а – $TOL = 10^{-5}$, на рис. 1,б – $TOL = 0{,}25\cdot10^{-5}$.

Более высокая точность метода трапеций объясняется тем, что этот метод обладает *P*-устойчивостью, а метод *RADAU* – нет [5]. Изменение погрешности в начале решения вызвано процессом установления стационарных колебаний. Поскольку $A(\pi/2)$-устойчивые методы не обладают *L*-устойчивостью, необходимой для анализа реальных цепей с высокой жесткостью, то указанные методы с порядком точности выше второго имеют ограничение шага такое же, как и метод трапеций, и на практике не используются [12].

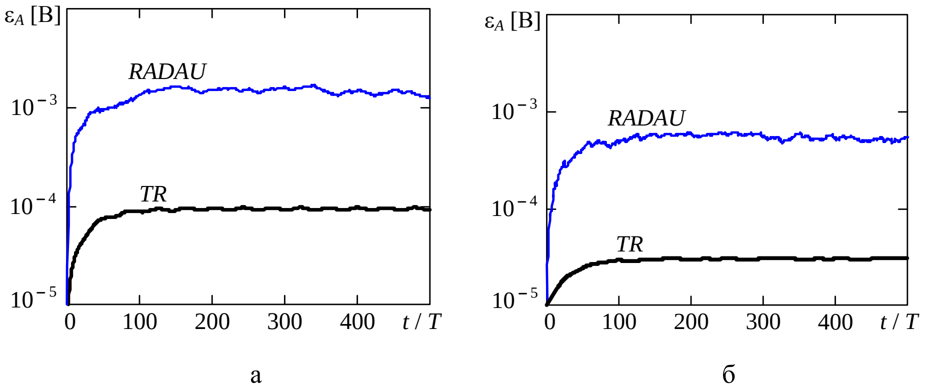

Рис. 1. Текущие погрешности оценки амплитуды «почти» гармонических колебаний нелинейного автогенератора при $h = T/2^8$, $TOL = 10^{-5}$ (а) и $h = T/2^9$, $TOL = 0{,}25{\cdot}10^{-5}$ (б) для методов TR и RADAU

До анализа погрешности реального автогенератора рассмотрим погрешность моделирования идеального осциллятора – параллельной LC-цепи без потерь (L = 1 Гн, C = 1 Ф, $G_0 = G_1 = 0$, $U_{m\,0}$ = 1 В, $T_0 = 2\pi$ с). На рис. 2 приведены текущие значения погрешностей численного решения методом трапеций уравнений состояния идеального осциллятора.

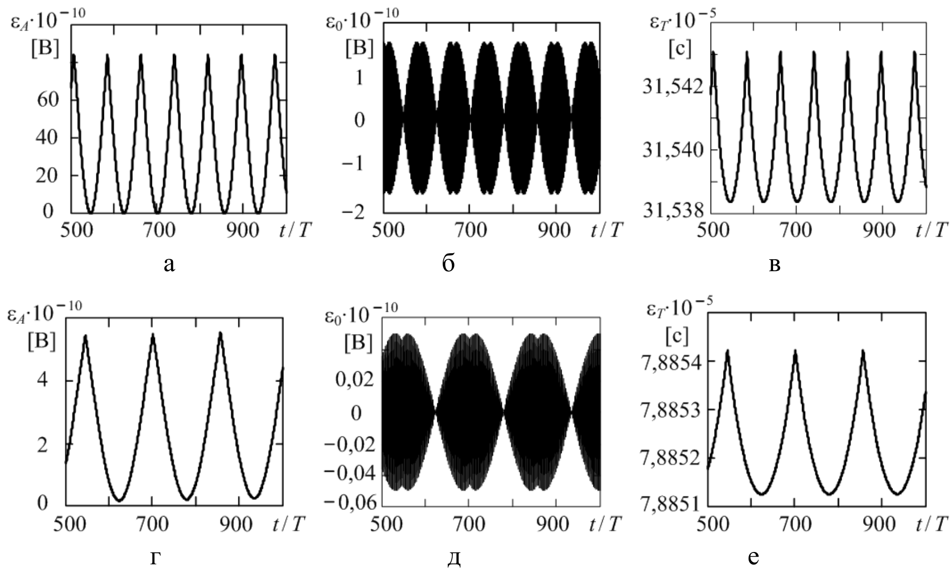

Рис. 2. Текущие погрешности оценки амплитуды, постоянной составляющей и периода колебаний идеального осциллятора при $h = T/2^8$ (а, б, в) при $h = T/2^9$ (г, д, е) для метода TR

Поскольку у метода трапеций коэффициент демпфирования равен нулю, то в начале анализа погрешности ε_A и ε_0 должны отсутствовать. Реально погрешность решения представляет собой периодическую функцию, максимальное значение и частота которой падают с уменьшением шага численного решения h. Причем максимальные значения погрешностей различных параметров колебания зависят от шага решения совершенно по-разному, а частота, с которой изменяются эти же погрешности, одинакова для всех параметров колебания.

На рис. 3 приведены погрешности численного решения методом трапеций уравнения автогенератора при кусочно-линейной аппроксимации ВАХ ($L = 1$ Гн, $C = 1$ Ф, $G_0 = G_1 = 0{,}01$ См, $U_0 = 1$ В, $U_{m\,0} \approx 2{,}475416990116814$ В и $T_0 \approx 6{,}2832125781953$ с). Отличие погрешностей реального (нелинейного) автогенератора «почти» гармонических колебаний от идеального осциллятора состоит в том, что в начале интервала наблюдения погрешность определения амплитуды и постоянной составляющей определяется погрешностью метода, намного превышающей погрешность ошибки для случая отсутствия потерь.

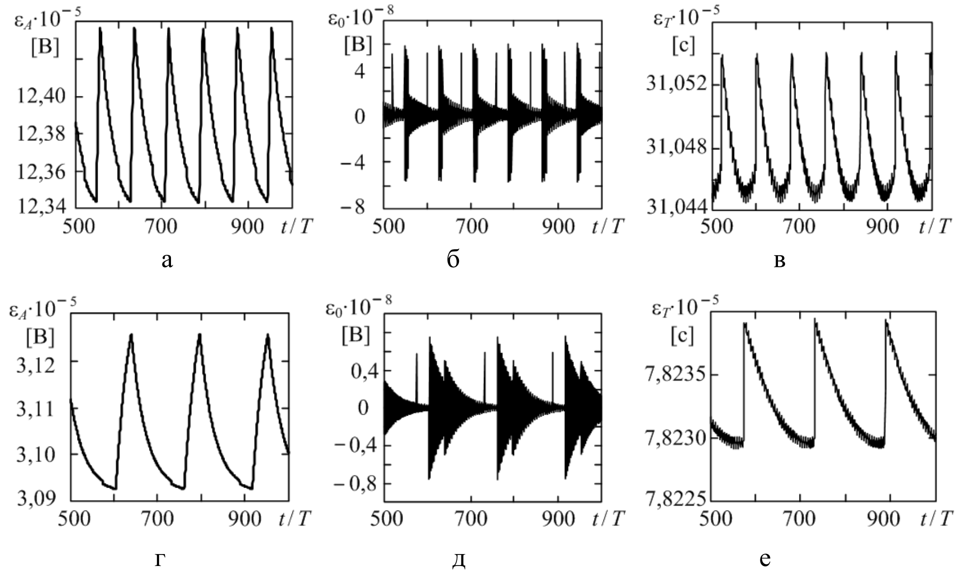

Рис. 3. Текущие погрешности оценки амплитуды, постоянной составляющей и периода «почти» гармонических колебаний нелинейного автогенератора при $h = T/2^8$ (а, б, в) при $h = T/2^9$ (г, д, е) для метода TR

Зависимости максимальных значений погрешностей оценки амплитуды, постоянной составляющей и периода колебаний от шага численного решения для идеального осциллятора и нелинейного автогенератора приведены в табл. 1. Результаты, представленные в табл. 1, показывают, что погрешности оценки амплитуды и постоянной составляющей для идеального осциллятора и нелинейного автогенератора отличаются качественно, – если погрешностью расчета амплитуды с уменьшением шага в цепи без потерь можно пренебречь, то в реальной цепи та же погрешность соизмерима с погрешностью расчета периода при любом шаге.

Таблица 1

Зависимости максимальных значений погрешностей расчета параметров колебаний от шага численного решения

Модель	$\varepsilon_{A\,\max}$	$\varepsilon_{0\,\max}$	$\varepsilon_{T\,\max}$
Идеальный осциллятор	$0{,}02\,h^4$	$0{,}02\,h^5$	$0{,}52\,h^2$
Нелинейный автогенератор	$0{,}2\,h^2$	$0{,}005\,h^3$	$0{,}48\,h^2$

Следует отметить, что все рассмотренные выше погрешности в установившемся режиме описываются периодическими функциями, причем частота этих функций уменьшается с уменьшением шага численного решения одинаково независимо от модели генератора. Приближенное выражение зависимости частоты от шага численного решения для всех рассмотренных выше погрешностей можно представить в виде

$$F_\varepsilon \approx 3{,}3\frac{h}{T^2}.$$

3. Генератор релаксационных колебаний. Основной трудностью анализа релаксационных генераторов считается высокая жесткость задачи. В [3] указывается, что в таком случае целесообразно использовать $L2$-устойчивые методы. Модель релаксационного генератора как генератора «почти» гармонических колебаний можно представить в виде дифференциального уравнения (1), но в случае релаксационных колебаний $\sigma/G_1 < 1$ [13]. Далее для получения режима релаксационных колебаний будем полагать L = 1 Гн, C = 1 Ф, G_0 = 4 См, G_1 = 10 См, U_0 = 1 В. При этом максимальное значение генерируемых импульсов $U_{m\,0} \approx 1{,}084334602144661$ В, период колебаний $T_0 \approx 18{,}16115240463$ с, жесткость модели автогенератора (отношение максимальной и минимальной постоянных времени) $\eta = 10^4$.

На рис. 4 приведены зависимости размаха генерируемых импульсов от времени наблюдения для $L2$-устойчивого метода *RADAU* и многошагового метода на основе формул дифференцирования назад (*BDF*). Следует отметить, что второй метод из всех неявных методов имеет минимальную L-устойчивость [3]. Эксперимент показывает, что при использовании программы *Mathcad* погрешность первого метода при одинаковой заданной точности намного превосходит погрешность второго, причем погрешность *RADAU* имеет явно выраженную огромную случайную составляющую.

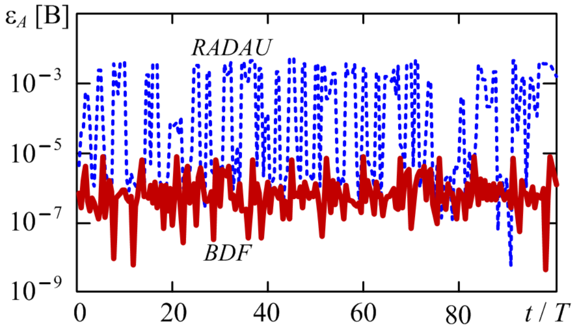

Рис. 4. Текущие погрешности оценки размаха колебаний релаксационного генератора при $h = T/2000$, $TOL = 0{,}25\cdot10^{-5}$ для методов BDF и RADAU

Полученный результат можно объяснить тем, что в данном случае в модели релаксационного генератора была использована модель резистивного элемента, ВАХ которого имеет разрывы производных. Разностная схема *RADAU* позволяет и в этом случае получить удовлетворительные результаты, однако алгоритм автоматического выбора шага в программе *RADAU* оказался намного менее устойчивым, чем алгоритм Гира, используемый в методе *BDF*. Если использовать аппроксимацию ВАХ нелинейного элемента аналитической функцией, то случайная составляющая в решении *RADAU* пропадает, однако, несмотря на весьма разную *L*-устойчивость, точность обоих методов при одинаковых шагах численного решения оказывается практически одинаковой.

Заключение. В данной работе, строго говоря, тестировались не столько методы численного решения ОДУ, сколько конкретные программы, реализующие методы [14]. Отличие методов от программ состоит в том, что при реализации методов или алгоритмов необходимо принимать ответственные, влияющие на результат, решения. Полученные результаты показывают, что программы методов *RADAU* и *BDF*, принципиально отличающиеся алгоритмом выбора шага, обладают существенно различными свойствами при решении жестких ОДУ. Метод *RADAU*, в принципе, обладает более высокой устойчивостью, чем *BDF*, однако в случае сильных нелинейностей программа, реализующая этот метод, не позволяет реализовать это преимущество.

Необходимо отметить, что рекомендация использовать *L*2-устойчивые методы для жестких задач [3, 15, 16] не является строго обоснованной. Дело в том, что любой *L*1-устойчивый метод может быть преобразован в *L*2-устойчивый, путем преобразования в двухшаговый. Например, функция ошибки неявного *L*1-устойчивого метода Эйлера имеет вид $R = 1/(1+h)$. Та же функция метода, состоящего из двух одинаковых полушагов метода Эйлера, $R = 1/(1+h/2)^2$, показывает, что такой искусственный метод обладает *L*2-устойчивостью, причем этот метод обладает еще и в четыре раза меньшей асимптотической погрешностью по сравнению с прототипом.

Оценка погрешности параметров процесса позволяет выбирать значительно более протяженный интервал наблюдения, чем оценка интервальной (глобальной) погрешности. Такой подход позволяет эффективнее обнаруживать ошибки, изменяющиеся медленно по сравнению с периодом исследуемого процесса, и/или встречающиеся редко (не на каждом периоде) случайные ошибки.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Глебов А.Л., Гурарий М.М., Жаров М.М., Егоров Ю.Б., Русаков С.Г., Стемпковский А.Л., Ульянов С.Л.* Актуальные проблемы моделирования в системах автоматизации схемотехнического проектирования / Под ред. А.Л. Стемпковского. – М.: Наука, 2003. – 430 с.
2. *Biryukov V.N., Pilipenko A.M.* An Approach to Estimate the Error of Oscillator Time-Domain Analysis // Proceedings of IEEE East-West Design and Test Symposium (EWDTS'2013). – 2013. – P. 223-226.
3. *Калиткин Н.Н.* Численные методы решения жестких систем // Математическое моделирование. – 1995. – Т. 7, № 5. – С. 8-11.
4. *Бирюков В.Н., Применко К.Л.* К оценке локальной погрешности разностных схем // Материалы Международной научной конференции «Информационное общество: идеи, технологии, системы». Ч. 3. – Таганрог: ТТИ ЮФУ, 2010. – С. 4-8.
5. *Petzold L.R., Jay L.O., Yen J.* Numerical solution ofhighly oscillatory ordinary differential equations // Acta Numerica. – 1997. – P. 437-483.
6. *Норенков И.П., Евстифеев Ю.А., Маничев В.Б.* Адаптивный метод ускоренного анализа многопериодных электронных схем // Известия вузов МВиССО СССР. Радиоэлектроника. – 1987. – Т. 30, № 6. – С. 47-51.

7. *Жук Д.М., Маничев В.Б., Сахаров М.К.* SADEL – библиотека «сверхточных» решателей для программного комплекса ПА10 (SADEL-PA10) // Всероссийская научно-техническая конференция «Проблемы разработки перспективных микро- и наноэлектронных систем (МЭС – 2012): сборник трудов. – М.: ИППМ РАН, 2012. – С. 147-152.
8. *Денисенко В.В.* Точность и достоверность моделирования МОП-транзисторов СБИС // Микроэлектроника. – 2009. – Т. 38, № 4. – С. 302-308.
9. *Бирюков В.Н., Пилипенко А.М. Ковтун Д.Г.* Оценка точности численного анализа генератора гармонических колебаний во временной области // Радиотехника. – 2011. – № 9. – С. 104-107.
10. *Бирюков В.Н., Гатько Л.Е.* Точное стационарное решение уравнения автогенератора // Нелинейный мир. – 2012. – Т. 10, № 9. – С. 613 – 616.
11. *Пилипенко А.М., Бирюков В.Н.* Исследование эффективности современных численных методов при анализе автоколебательных цепей // Радиоэлектроника. – 2013. – № 8. – URL: http://jre.cplire.ru/jre/aug13/ 9/text.html (дата обращения: 11.05.2014).
12. *Жук Д.М., Маничев В.Б., Ильницкий А.О.* Методы и алгоритмы решения дифференциально-алгебраических уравнений для моделирования динамики технических систем и объектов // Всероссийская научно-техническая конференция «Проблемы разработки перспективных микро- и наноэлектронных систем» (МЭС – 2008): сборник трудов. – М.: ИППМ РАН, 2008. – С. 109-113.
13. *Пилипенко А.М., Бирюков В.Н.* Оценка точности численного анализа релаксационного генератора // Журнал радиоэлектроники. – 2013. – № 11. – URL: http://jre.cplire.ru/jre/nov13 /6/text.html (дата обращения: 11.05.2014).
14. *Hairer E., Wanner G.* Solving Ordinary Differential Equations II: Stiff and Differential-Algebraic Problems. – Springer-Verlag, Heidelberg, 2010. – 614 p.
15. *Maffezzoni P.* A Versatile Time-Domain Approach to Simulate Oscillators in RF Circuits // IEEE Transactions on Circuits and Systems. – 2009. – V. 56, N. 3. – P. 594-603.
16. *Maffezzoni P., Codecasa L., D'Amore D.* Time-domain simulation of nonlinear circuits through implicit Runge-Kutta methods // IEEE Transactions. Circuits and Systems. – 2007. – V. 54, N. 2. – P. 391-400.

REFERENCES

1. *Glebov A.L., Gourary M.M., Zharov M.M., Egorov Yu.B., Rusakov S.G., Stempkovsky. A.L., Ulyanov S.L., ed. By A.L. Stempkovsky.* Aktual'nye problemy modelirovaniia v sistemakh avtomatizatsii skhemotekhnicheskogo proektirovaniia [Advanced circuit simulation methods in electronic design automation]. Moscow: Nauka, 2003, 430 p.
2. *Biryukov V.N., Pilipenko A.M.* An Approach to Estimate the Error of Oscillator Time-Domain Analysis, *Proceedings of IEEE East-West Design and Test Symposium (EWDTS'2013). 2013*, pp. 223-226.
3. *Kalitkin N.N.* Chislennye metody resheniia zhestkikh sistem [Numerical methods of solution of stiff systems], *Matematicheskoe modelirovanie* [Mathematical Models and Computer Simulations], 1995, Vol. 7, No. 5, pp. 8-11.
4. *Biryukov V.N., Primenko K.L.* K ocenke lokal'noj pogreshnosti raznostnyh shem [Estimation of the local error of difference schemes], *Materialy Mezhdunarodnoy nauchnoy konferencii «Informacionnoe obshhestvo: idei, tehnologii, sistemy»* [Proceedings of International conference «The informational society: ideas, production engineering, systems»], Part 3, Taganrog: TTI YuFU, 2010, pp. 4-8.
5. *Petzold L.R., Jay L.O., Yen J.* Numerical solution of highly oscillatory ordinary differential equations, Acta Numerica. 1997, pp. 437-483.
6. *Norenkov I.P., Evstifeev Yu.A., Manichev V.B.* Adaptivnyi metod uskorennogo analiza mnogoperiodnykh elektronnykh skhem [Adaptive method for fast analysis of multiperiod electronic circuits], *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii Radioelektronika* [Radioelectronics and Communications Systems], 1987, Vol. 0, No. 6, pp. 47-51.
7. *Zhuk D.M., Manichev V.B., Saharov M.K.* SADEL – biblioteka «sverkhtochnykh» reshatelei dlia programmnogo kompleksa PA10 (SADEL-PA10) [SADEL – extra precision solvers library for program suite PA10 (SADEL-PA10)]. *Vserossiiskaia nauchno-tekhnicheskaia konferentsiia «Problemy razrabotki perspektivnykh mikro i nanoelektronnykh sistem» (MES – 2012): sbornik trudov* [Problems of Perspective Micro- and Nanoelectronic Systems Development (MES – 2012). Proceedings]. Moscow, IPPM RAS, 2012, pp. 147-152.

8. *Denisenko V.V.* Tochnost' i dostovernost' modelirovaniya MOP-tranzistorov SBIS [The accuracy and validity of the simulation of VLSI MOS transistors], *Mikroelektronika* [Russian Microelectronics]. 2009, Vol. 38, No 4, pp. 302-308.
9. *Biryukov V.N., Pilipenko A.M., Kovtun D.G.* Otsenka tochnosti chislennogo analiza generatora garmonicheskikh kolebanii vo vremennoi oblasti [Estimation of the Numerical Methods' Accuracy of Oscillating Differential Equations Analysis in Time-Domain], *Radiotekhnika* [Radioengineering], 2011, No. 9, pp. 104-107.
10. *Biryukov V.N., Gatko L.E.* Tochnoe statsionarnoe reshenie uravneniia avtogeneratora [Exact stationary solution of the oscillator nonlinear differential equation], *Nelineinyi mir* [Nonlinear World], 2012, Vol. 10, No. 9, pp. 613-616.
11. *Pilipenko A.M., Biryukov V.N.* Issledovanie effektivnosti sovremennykh chislennykh metodov pri analize avtokolebatel'nykh tsepei [Research of efficiency of the modern numerical methods for the analysis of self-oscillatory circuits], *Zhurnal radioelektroniki* [Journal of Radio Electronics], 2013, No. 8. Available at: http://jre.cplire.ru/jre/aug13/9/text.html (accessed 28 October 2014).
12. *Zhuk D.M., Manichev V.B., Ilnitskij A.O.* Metody i algoritmy resheniia differentsial'no-algebraicheskikh uravnenii dlia modelirovaniia dinamiki tekhnicheskikh sistem i ob"ektov [Methods and algorithms of the decision of the differential-algebraic equations for modelling dynamics of technical systems and objects], *Vserossiiskaia nauchno-tekhnicheskaia konferentsiia «Problemy razrabotki perspektivnykh mikro- i nanoelektronnykh sistem» (MES-2008): sbornik trudov* [Problems of Perspective Micro- and Nanoelectronic Systems Development (MES-2008). Proceedings]. Moscow, IPPM RAS, 2008, pp. 108-113.
13. *Pilipenko A.M., Biryukov V.N.* Otsenka tochnosti chislennogo analiza relaksatsionnogo generatora [Accuracy estimation of the numerical methods of the analysis of the relaxation oscillator], *Zhurnal radioelektroniki* [Journal of Radio Electronics]. 2013, No. 11. Available at: http://jre.cplire.ru/jre/nov13/6/text.html (accessed 28 October 2014).
14. *Hairer E., Wanner G.* Solving Ordinary Differential Equations II: Stiff and Differential-Algebraic Problems. Springer-Verlag, Heidelberg, 2010, 614 p.
15. *Maffezzoni P.* A Versatile Time-Domain Approach to Simulate Oscillators in RF Circuits, *IEEE Transactions on Circuits and Systems,* 2009, Vol. 56, No. 3, pp. 594-603.
16. *Maffezzoni P., Codecasa L., D'Amore D.* Time-domain simulation of nonlinear circuits through implicit Runge-Kutta methods, *IEEE Transactions on Circuits and Systems,* 2007, Vol. 54, No. 2, pp. 391-400.

Статью рекомендовал к опубликованию д.т.н., с.н.с. В.В. Денисенко.

Бирюков Вадим Николаевич – Южный федеральный университет; e-mail: vnbiryukov@ya.ru; 347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44; тел.: 88634371632; кафедра теоретических основ радиотехники; к.т.н.; доцент.

Пилипенко Александр Михайлович – e-mail: ampilipenko@sfedu.ru; кафедра теоретических основ радиотехники; к.т.н.; доцент.

Biryukov Vadim Nikolaevich – Southern Federal University; e-mail: vnbiryukov@ sfedu.ru; 44, Nekrasovskiy, Taganrog, 347928, Russia; phone: +78634371632; the department of fundamentals of radio engineering; cand. of eng. sc.; associate professor.

Pilipenko Alexandr Mikhaylovich – e-mail: ampilipenko@sfedu.ru; the department of fundamentals of radio engineering; cand. of eng. sc.; associate professor.