

Дудкин Александр Арсентьевич – Государственное научное учреждение «Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси»; e-mail: doudkin@newman.bas-net.by; 220012, Беларусь, г. Минск, ул. Сурганова, 6; тел.: 375172842148, факс: 375172842175; д.т.н.; с.н.с.; доцент; заместитель заведующего лабораторией идентификации систем.

Doudkin Alexandr Arsent'evich – The State Scientific Institution «The United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus»; e-mail: doudkin@newman.bas-net.by; 6, Surganova street, Minsk, 220012, Belarus; phone: 375172842148, fax: 375172842175; dr. of eng. sc.; senior researcher; associate professor; deputy head of the laboratory of system identification.

УДК 004.382.2

О.В. Ершова, А.В. Чкан, Е.В. Кириченко, Е.А. Семерников

ОШИБКИ УСЕЧЕНИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ОПЕРАЦИЙ С ФИКСИРОВАННОЙ ТОЧКОЙ В АЛГОРИТМАХ БЫСТРОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

Рассматриваются ошибки вычисления быстрого преобразования Фурье (БПФ) с прореживанием по частоте в отсутствие масштабирования, обусловленные ограничением разрядности результатов арифметических операций умножения при обработке данных с фиксированной точкой в зависимости от размера преобразования, номера спектральной составляющей, а также от способа приведения результата к системной длине слова (усечение или округление данных). Получены аналитические выражения среднеквадратического значения ошибок вычисления БПФ белого гауссовского шума как при усечении, так и при округлении результатов операций умножения в алгоритме БПФ с прореживанием по частоте в отсутствие масштабирования. Показано, что в области низких частот для приближенной оценки уровня шумов, вызванных усечением разрядности результатов арифметических операций, можно использовать зависимость модуля математического ожидания ошибок усечения от номера спектрального отсчета. Поставлен математический эксперимент по вычислению погрешности арифметических операций БПФ для входной последовательности в виде белого гауссовского шума. Приведены графики среднеквадратических значений ошибок усечения и округления в зависимости от номера спектральной составляющей. Показано, что зависимость среднеквадратического значения ошибок усечения арифметических операций от номера спектральной составляющей носит асимметричный характер и приводит к значительным искажениям спектра в области низких частот. Моделирование показало совпадение уровней ошибок, полученных экспериментальным и аналитическим путём.

Эффект накопления ошибок; быстрое преобразование Фурье; анализ погрешностей; численное моделирование; цифровая обработка сигналов.

O.V. Yershova, A.V. Chkan, E.V. Kirichenko, E.A. Semernikov

TRUNCATION ERRORS OF THE RESULTS OF FIXED-POINT ARITHMETIC OPERATIONS IN THE FFT ALGORITHMS

The errors of decimation-in-frequency fast Fourier transform (DIF FFT) calculation (without scaling) caused by limitations of the length fixed-point results of arithmetic operations depending on the FFT size, the number of the spectrum component and the method of bringing the result to the system word length (truncation or rounding) are considered. Analytic expressions of root-mean-square (RMS) errors of spectrum calculation both for truncation and rounding of the results of multiplication in the DIF FFT algorithm (without scaling) depending on the FFT size and the number of the spectrum component were obtained. It is shown that in the range of low frequency it

is possible to use the dependence of the module of mathematical expectation of truncation errors from the number of a spectral sample for approximate estimation of the noise level caused by truncation of the results of arithmetic operations for the DIF FFT. The mathematical experiment was performed to calculate errors of arithmetic operations of FFT for a white Gaussian noise as the input process. The graphics of RMS value of truncation and rounding errors depending on the number of spectral component are presented. It is shown that the dependence of RMS value of truncation errors of arithmetic operations on the number of spectral component has asymmetrical behavior and lead to the significant spectrum distortions in the range of low frequency. The computational modeling has proved the matching of experimental and theoretical noise levels.

The effect of the accumulation of errors; the fast fourier transform; error analysis; numerical modeling; digital signal processing.

Введение. Дискретное преобразование Фурье, широко применяемое в цифровой обработке сигналов, на практике реализуется с помощью алгоритма быстрого преобразования Фурье (БПФ). При обработке чисел в формате с плавающей точкой обеспечивается достаточный диапазон представления данных, и поэтому для большинства приложений эффектами ограничения разрядной сетки можно пренебречь. Однако при использовании арифметики с фиксированной точкой данные эффекты могут оказывать существенное влияние на результаты вычислений [1].

Несмотря на более чем полувековой период использования аппаратных устройств, реализующих алгоритм БПФ, и множество публикаций по анализу возникающих в процессе его выполнения ошибок, нельзя сказать, что полностью исследованы все «тонкости» возникновения и накопления погрешностей, обусловленных ограничением разрядности данных. В печати и по настоящее время достаточно регулярно появляются материалы, посвященные анализу различных видов погрешностей [2–4]. Из работ последних лет следует обратить внимание на ряд документов фирмы Xilinx, в которых освещаются вопросы точности аппаратных вычислителей БПФ [5].

Представляемая работа обязана своим появлением тому, что в ходе практических разработок устройств БПФ был обнаружен эффект накопления ошибок, вызываемых усечением разрядности результатов арифметических вычислений, зависящий от номера спектральной составляющей.

1. Постановка задачи и некоторые допущения. Задачей данной статьи является получение аналитической зависимости среднеквадратического значения ошибки усечения от номера спектрального отсчета.

В результате анализа было установлено, что источником высоких значений ошибок усечения в области низких частот является ненулевое математическое ожидание ошибки усечения при выполнении операций умножения на поворачивающие множители при вычислении базовой операции (БО) алгоритма БПФ. В зависимости от траектории распространения данных ненулевое математическое ожидание ошибки для части спектральных отсчетов может накапливаться, что и приводит к общему росту ошибки.

Рассмотрим влияние ошибок, обусловленных ограничением разрядности данных, на примере реализации БПФ с прореживанием по частоте, состоящего из $N = 2^M$ отсчетов. Анализируемую ошибку будем представлять как разность выходных данных двух моделей вычисления БПФ: эталонной модели, использующей формат с плавающей точкой двойной точности float64 с 52-разрядной мантиссой, и модели, использующей формат с фиксированной точкой. В целях облегчения анализа сделаем несколько общих допущений для обеих моделей:

- ♦ входные данные БПФ представляют собой белый гауссовский шум;

- ◆ масштабирование данных на этапах БПФ не производится, считается, что данные не выходят за размер разрядной сетки, в качестве анализируемой величины при этом используется абсолютное значение ошибок;
- ◆ для обеспечения системной длины слова в арифметических операциях умножения используется операция усечения либо округления;
- ◆ для исключения влияния конечной разрядности поворачивающих множителей БПФ их значения представляются в формате с плавающей точкой, а тривиальные операции умножения на поворачивающие множители ± 1 и $\pm i$ производятся без потери точности.

2. Основные математические соотношения. Операция усечения m -разрядного числа A до b разрядов ($b < m$) состоит в отбрасывании $(m-b)$ младших разрядов числа, при этом ошибка усечения не превосходит шаг квантования. Если считать, что b разрядов соответствуют целой части числа, а отбрасываемая часть числа соответствует мантиссе, то ошибка усечения не превосходит значение 1, при этом математическое ожидание ошибки усечения равно $-0.5 \cdot Q$, где Q – значение младшего значащего разряда (МЗР), равное $Q = 2^{-b-1}$. Согласно [1] ошибка, возникающая при усечении числа, имеет равномерное распределение вероятностей на интервале между нулем и $-Q$.

Округление m -разрядного числа A до b разрядов ($b < m$) осуществляется к ближайшему целому числу, при этом математическое ожидание ошибки округления в точности равно 0, а сама ошибка округления по модулю не превосходит значение $0.5 \cdot Q$. Согласно [1] при округлении числа ошибка округления будет иметь равномерное распределение на интервале $(-1/2, 1/2) \cdot Q$. Среднее значение такой ошибки будет равно нулю, тогда как при усечении числа ее среднее значение отлично от нуля.

Математическое ожидание \bar{x}_0 и дисперсия σ_0^2 ошибок округления и усечения равны

$$\bar{x}_0 = \begin{cases} 0, & \text{– при округлении} \\ -0.5 \cdot Q, & \text{– при усечении} \end{cases} \quad (1)$$

$$\sigma_0^2 = \frac{Q^2}{12}. \quad (2)$$

Так как вычисления БПФ являются комплексными, то дисперсия ошибок умножения одной базовой операции умножения на комплексные поворачивающие множители равна $\sigma_B^2 = 2 \cdot \sigma_0^2$, так как состоит из суммы дисперсий ошибок реальной и мнимой частей результата.

Как известно, при отсутствии масштабирования алгоритм БО на i -м этапе вычисления БПФ с прореживанием по частоте имеет вид

$$\dot{A}_{i+1} = \dot{A}_i + \dot{B}_i \quad (3)$$

$$\dot{B}_{i+1} = (\dot{A}_i - \dot{B}_i) \cdot (\dot{W}_N)^l. \quad (4)$$

Здесь

- ◆ $(\dot{W}_N)^l$ – комплексный поворачивающий множитель БО;
- ◆ \dot{A}_i, \dot{B}_i – входные данные БО;
- ◆ $\dot{A}_{i+1}, \dot{B}_{i+1}$ – выходные данные БО.

На рис. 1 показан граф 32-точечного БПФ с прореживанием по частоте. Цифрами в кружках на рисунке обозначены степени поворачивающего множителя $\dot{W}_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$.

Из формул (3), (4) следует, что на i -м этапе вычисления БПФ в случае, если умножение на $(\dot{W}_N)^l$ не является тривиальным, в выходных ветвях БО возникают ошибки. При этом в БПФ с прореживанием по частоте погрешность арифметиче-

ских вычислений возникает только в выходной ветви B_{i+1} . Помимо этого, через БО распространяются ошибки арифметических вычислений, возникшие на предыдущих этапах.

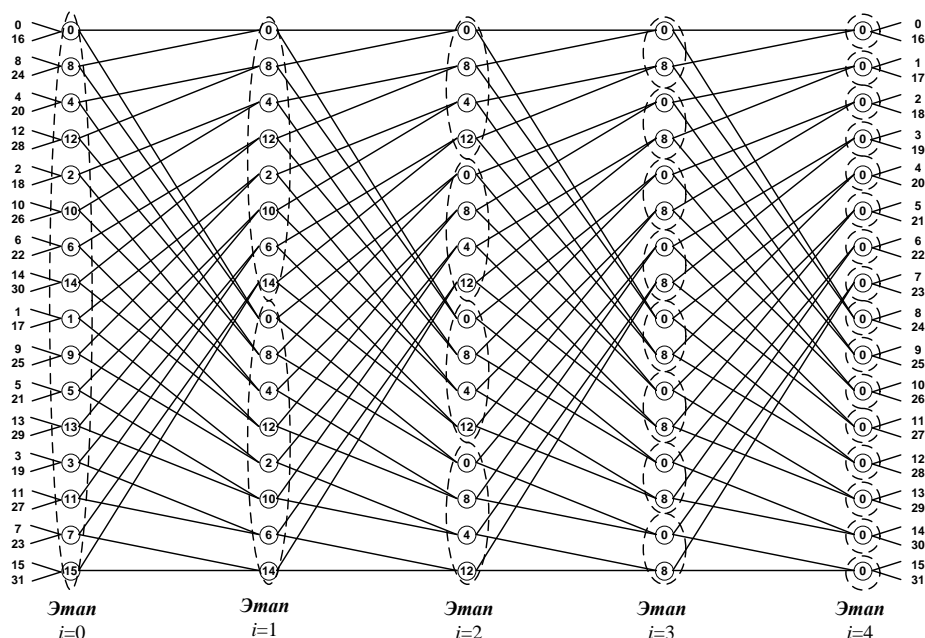


Рис. 1. Граф БПФ на 32 отсчета с прореживанием по частоте

Для анализа ошибок конечной разрядности данных при выполнении арифметических вычислений БПФ перечислим основные свойства графа алгоритма вычисления БПФ с прореживанием по частоте [6]. При этом воспользуемся двоичным представлением номера k -го спектрального отсчета

$$k = 2^{M-1}q_0 + 2^{M-2}q_1 + \dots + 2q_{M-2} + q_{M-1}, \quad (5)$$

а также двоично-инверсным представлением номера

$$k_{BR} = 2^{M-1}q_{M-1} + 2^{M-2}q_{M-2} + \dots + 2q_1 + q_0, \quad (6)$$

где $\{q_i\}$, $i = 0, 1, \dots, M-1$ – значения битов в двоичном представлении номера k спектрального отсчета, принимающие значения 0 или 1.

Свойство 1. На i -м этапе данные k -го спектрального отсчета выходят по выходу A БО, если $q_i = 0$, и по выходу B , если $q_i = 1$.

Свойство 2. Множество из $N/2$ БО на i -м этапе можно разбить на 2^i непересекающихся групп по 2^{M-1-i} БО в каждой (группы показаны на рис. 1 пунктирными овалами). Для произвольно выбранного k -го спектрального отсчета данные на i -м этапе проходят через БО одной из групп. Набор степеней поворачивающих множителей одинаков для всех групп и изменяется от 0 до $(\frac{N}{2} - 2^i)$ с шагом 2^i .

Свойство 3. В каждой группе БО присутствует по 2 БО с тривиальными умножениями на ± 1 и $\pm j$.

Свойство 4. Степени поворачивающих множителей на предпоследнем и последнем ($M-2$ и $M-1$) этапах равны 0 и $N/4$, что соответствует тривиальным умножениям на ± 1 и $\pm j$.

Свойства 1–4 будут использованы при расчете ошибок округления и усечения результатов произведения.

3. Зависимость ошибки округления результатов произведений от номера спектрального отсчета. Выведем зависимость между величиной ошибок округления результатов произведений и номером спектрального отсчета, основываясь на взаимосвязи между двоичным представлением номера спектрального отсчета и путями прохождения данных в графе (рис. 1).

Дисперсию ошибок округления результатов произведений k -го спектрального отсчета можно определить, исходя из следующих посылок:

- ◆ ошибка округления возникает только по выходу B базовой операции;
- ◆ тип выходной ветки (A или B) БО на i -м этапе определяется битом q_i (свойство 1);
- ◆ дисперсия ошибок равна сумме элементарных ошибок σ_B^2 , возникающих при прохождении данных через выходы B всех БО с нетривиальными умножениями;
- ◆ количество БО в группе на i -м этапе, являющихся источниками ошибок (содержащих нетривиальные умножения), равно $2^{M-1-i} - 2$.

Исходя из этих положений, можно математически записать выражение для мощности ошибок округления $E_i(k)$, возникших на i -м этапе:

$$E_i(k) = q_i \cdot 2 \cdot \sigma_0^2 \cdot (2^{M-1-i} - 2). \quad (7)$$

Суммарная ошибка округления $\sigma_F^2(k)$ для заданного k -го спектрального отсчета состоит из суммы случайных ошибок, возникших на всех i -х этапах, $i = 0 \dots M - 3$, кроме двух последних с тривиальными умножениями.

Формула для мощности ошибок округления k -го спектрального отсчета выглядит следующим образом:

$$\sigma_F^2(k) = 2 \cdot \sigma_0^2 \cdot \sum_{i=0}^{M-3} q_i \cdot (2^{M-1-i} - 2) \quad (8)$$

Произведем преобразование данного выражения:

$$\sigma_F^2(k) = 2 \cdot \sigma_0^2 \cdot \left[\sum_{i=0}^{M-1} q_i \cdot 2^{M-1-i} - \sum_{i=M-2}^{M-1} q_i \cdot 2^{M-1-i} - 2 \cdot \sum_{i=0}^{M-3} q_i \cdot 2^{M-1-i} \right]. \quad (9)$$

В этом случае среднеквадратическое значение ошибки округления k -го спектрального отсчета равно

$$\sqrt{\sigma_F^2(k)} = \sqrt{2 \cdot \sigma_0^2 \cdot \left[k_{BR} + q_{M-1} - 2 \cdot \sum_{i=0}^{M-1} q_i \right]}. \quad (10)$$

Максимальная дисперсия ошибки округления, равная $2 \cdot \sigma_0^2 \cdot (N - 2 \cdot M)$, будет иметь место при значениях $k = \frac{N}{4} - 1, \frac{N}{2} - 1, \frac{3 \cdot N}{4} - 1, N - 1$. Ошибка округления произведения для отсчетов с номерами $k = 0, \frac{N}{4}, \frac{N}{2}, \frac{3 \cdot N}{4}$ тождественно равна нулю.

Можно определить среднее для всех спектральных составляющих значение дисперсии ошибок округления:

$$\begin{aligned} \sigma_F^2 = \overline{\sigma_F^2(k)} &= 2 \cdot \sigma_0^2 \cdot \left[\overline{k_{BR}} + \overline{q_{M-1}} - 2 \cdot \sum_{i=0}^{M-1} \overline{q_i} \right] = \\ &= 2 \cdot \sigma_0^2 \cdot \left[\frac{N-1}{2} + 0.5 - 2 \cdot \sum_{i=0}^{M-1} 0.5 \right] = \sigma_0^2 \cdot (N - 2 \cdot M). \end{aligned} \quad (11)$$

Сравнивая полученное среднее значение дисперсии σ_F^2 с дисперсией ошибки БПФ в результате квантования входных данных, которая равна $\sigma_q^2 = 2 \cdot \sigma_0^2 \cdot N$, видим, что среднеквадратическое значение ошибки округлений результатов произведений в БПФ в $\sqrt{2}$ раз меньше, чем среднеквадратическое значение ошибки БПФ вследствие квантования входных данных.

4. Зависимость ошибки усечения результатов произведений от номера спектрального отсчета. Среднеквадратическое значение ошибки усечения результатов произведений для k -го спектрального отсчета можно определить, зная ее математическое ожидание (МО) и дисперсию на выходе БПФ. Дисперсия ошибки усечения равна дисперсии ошибки округления и вычислена ранее.

Для расчета зависимости МО ошибки усечения $\bar{x}_F(k)$ проанализируем поведение ошибок усечения при распространении их по графу БПФ (рис. 1).

Рассмотрим случай, когда на входах БО находятся данные с одинаковыми МО ошибки. Тогда на выходе B БО с нетривиальным умножением МО ошибки усечения всегда принимает значение $\bar{x}_0 = (1 + j) \cdot \bar{x}_0$, равное МО вновь возникающей ошибки усечения, а по выходу A всегда происходит сложение МО ошибок усечения, поступающих на входы БО. Если же умножение в данной БО является тривиальным, то на выходе A происходит сложение МО ошибок входов, а на выходе B – их вычитание.

Таким образом, видно, что возникновение ненулевых математических ожиданий ошибок усечения всегда происходит по выходу B БО с нетривиальным умножением, а накопление их происходит либо по траекториям, связанным с выходами A БО (преимущественно), либо по траекториям, связанным с выходами B БО с тривиальным умножением.

Поскольку когерентное накопление величины МО ошибки для заданного k -го спектрального отсчета происходит по выходам A БО, то для расчета МО ошибки на выходе БПФ требуется определить максимальный номер i_{max} этапа, на котором данные k -го отсчета проходят по выходу B . На этапах с номерами $i > i_{max}$ данные будут распространяться исключительно по выходам A БО, и поэтому МО ошибки на i_{max} -м этапе (на выходе БПФ), возникающей в результате суммирования, будет равно произведению МО единичной ошибки усечения \bar{x}_0 на количество БО с нетривиальным умножением в группе $(2^{M-1-i_{max}} - 2)$.

Таким образом, можно записать, что приближенное значение МО ошибки усечения на выходе БПФ равно

$$\bar{x}_F(k) \approx \bar{x}_0 \cdot (2^{M-1-i_{max}} - 2).$$

Значение i_{max} можно определить, исходя из свойства 1 графа БПФ:

$$i_{max} = E[\log_2(k)], \quad k \neq 0, \quad (12)$$

где $E[x]$ – целая часть x .

Приведенное выше приближенное выражение для МО $\bar{x}_F(k)$ справедливо для $i_{max} < M - 1$, так как на последних этапах участвуют БО только с тривиальными умножениями.

Для нулевой спектральной составляющей ошибка усечения результатов произведений тождественно равна нулю, так как данные на всех этапах распространяются только по выходам A базовых операций.

Для получения точного значения МО ошибки усечения на выходе БПФ необходимо учесть поправки для МО ошибок, возникающих на предыдущих к i_{max} -му этапу и распространяющихся далее через выходы B БО с тривиальными умножениями.

Для наглядности рассмотрим поведение МО ошибки усечения при распространении через БО с тривиальным умножением на примере спектрального отсчета $k=5$ в БПФ на $N=32$ отсчета (рис. 2).

На рис. 2 выходы B показаны сплошными линиями, выходы A – пунктирными; БО с тривиальными умножениями затемнены.

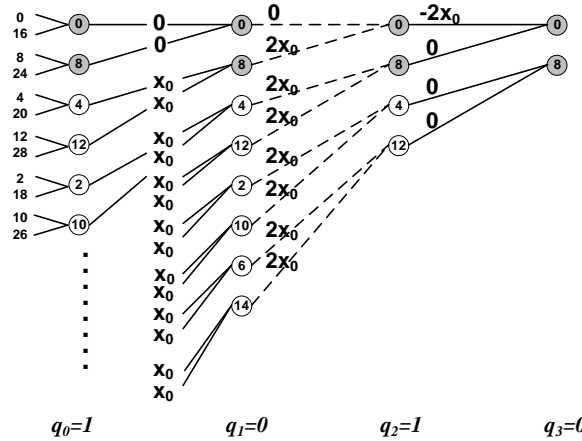


Рис. 2. Прохождение данных через граф БПФ с прореживанием по частоте, $N=32, k=5$

Поправка к МО ошибки усечения возникает только на i -х этапах ($i < i_{max}$), на которых данные распространяются по выходам B ($q_i = 1$). Если на следующем $(i+1)$ -м этапе данные будут проходить также по выходам B БО, то МО ошибки, возникающей на i -м этапе, на всех выходах БО, включая и БО с тривиальным умножением, тождественно равно нулю. Если на $(i+1)$ -м этапе данные будут проходить по выходам A БО ($q_{i+1} = 0$), то на выходе БО с тривиальным умножением на 1 МО ошибки усечения i -го этапа будет равно 0, а на всех остальных выходах группы БО – равно $2 \cdot \bar{x}_0$. Таким образом, на последующих этапах на входе A БО будет МО ошибки i -го этапа, на величину $2 \cdot \bar{x}_0$ меньшее, чем на входе B . Если и далее данные распространяются по выходам A , то ненулевое МО ошибки усечения i -го этапа на выходах БО сохраняется. Однако из условия $i < i_{max}$ следует, что при распространении данные хотя бы один раз пройдут по выходам B БО. В этом случае на выходе B БО с тривиальным умножением МО ошибки усечения i -го этапа станет равным $-2 \cdot \bar{x}_0$, а на выходах B всех остальных БО группы - тождественно равным нулю. Таким образом, вклад этапов с номерами $i < i_{max}$ в результирующее значение МО ошибки усечения на выходе БПФ можно описать формулой

$$-2 \cdot \bar{x}_0 \cdot \sum_{i=0}^{i_{max}-1} q_i \cdot (1 - q_{i+1}).$$

Произведение $q_i \cdot (1 - q_{i+1})$ описывает условия, при которых на i -м этапе возникает ошибка усечения, не обращающаяся в тождественный нуль на следующем этапе.

Таким образом, с учетом всего перечисленного, математическое ожидание результирующей ошибки усечения результатов произведений в БПФ с прореживанием по частоте будет равно

$$\bar{x}_F(k) = \bar{x}_0 \cdot \begin{cases} -2 \sum_{i=0}^{i_{max}-1} q_i (1 - q_{i+1}), & i_{max} = M - 1, \\ 2^{M-1-i_{max}} - 2 - 2 \cdot \sum_{i=0}^{i_{max}-1} q_i \cdot (1 - q_{i+1}), & i_{max} < M - 1. \end{cases} \quad (13)$$

Для спектральных составляющих с номерами $k = 0, \frac{N}{4}, \frac{N}{2}, \frac{3 \cdot N}{4}$ математическое ожидание ошибки усечения произведения тождественно равно нулю.

Средний квадрат модуля ошибки усечения результатов произведений $\overline{x^2(k)}$ для k -го спектрального отсчета с учетом формул (9) и (13) будет равен

$$\overline{x_F^2(k)} = \left[|\bar{x}_F(k)|^2 + 2 \cdot \left(k_{BR} + q_{M-1} - 2 \sum_{i=0}^{M-1} q_i \right) \sigma_0^2 \right]. \quad (14)$$

Так как рост ошибки усечения по сравнению с ошибкой округления обусловлен ненулевым значением модуля ее математического ожидания, то, согласно формуле (14), наибольшие значения погрешности усечения будут наблюдаться для спектральных отсчетов с наименьшими номерами $k, k \neq 0$. Самое большое значение погрешности будет у спектрального отсчета с номером $k = 1$: модуль МО величины ошибки усечения при больших значениях M будет равен $\sqrt{2} \cdot (N - 1)/4$.

5. Результаты моделирования. Для экспериментальной проверки полученных формул для ошибок БПФ была создана программная модель, имитирующая алгоритм БПФ с прореживанием по частоте в целочисленной арифметике. Для удобства сравнения результаты погрешности вычисляются в единицах МЗР $Q = 2^{-(b-1)}$, т.е. в абсолютном измерении.

В качестве входных данных используется белый гауссовский шум с дисперсией $\sigma_{вх}^2$. Среднее значение шума равняется нулю. Основные допущения, принятые при моделировании, перечислены выше.

Среднеквадратическое значение ошибки произведения для k -го спектрального отсчета получается на основе усреднения по $L=5000$ выборкам квадрата модуля разницы между значениями спектрального отсчета на выходе БПФ, полученных в арифметике с фиксированной и с плавающей точкой.

На рис. 3 и 4 показаны экспериментально полученные усредненные зависимости среднеквадратических значений ошибок спектральных составляющих, обусловленных усечением (рис. 3) и округлением (рис. 4) результатов произведений в БПФ с прореживанием по частоте. Размер БПФ составляет 1024 отсчета.

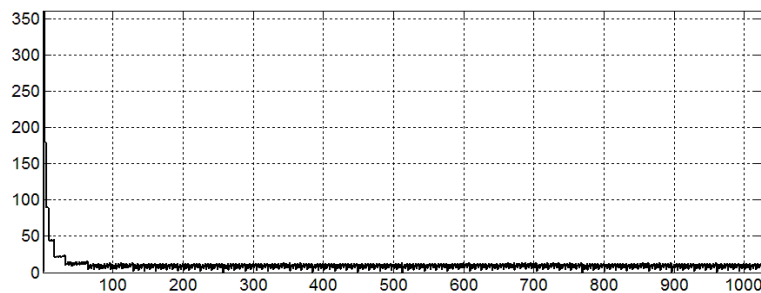


Рис. 3. Зависимость среднеквадратических значений ошибок спектральных составляющих, обусловленных усечением результатов произведений в БПФ с прореживанием по частоте

Из рис. 3 и рис. 4 видно, что ошибки усечения сосредоточены в начале спектра, а ошибки округления распределены равномерно по спектру.

На рис. 5 приведен график разности экспериментальных и полученных согласно формуле (10) среднеквадратических значений ошибок $\sqrt{\sigma_F^2(k)}$ спектральных составляющих, обусловленных округлением результатов произведения в БПФ для $N=1024$; данные приведены в единицах МЗР Q .

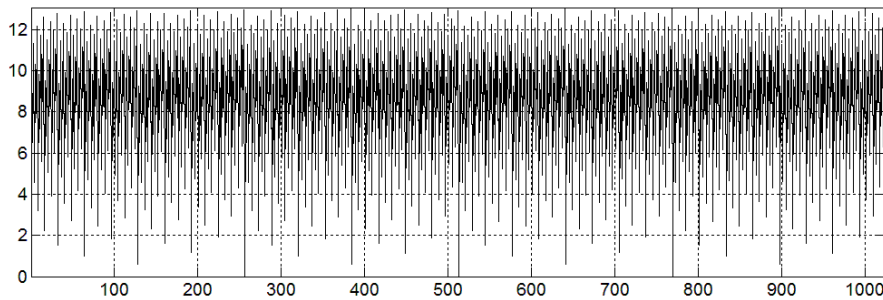


Рис. 4. Зависимость среднеквадратических значений ошибок спектральных составляющих, обусловленных округлением результатов произведений в БПФ с прореживанием по частоте

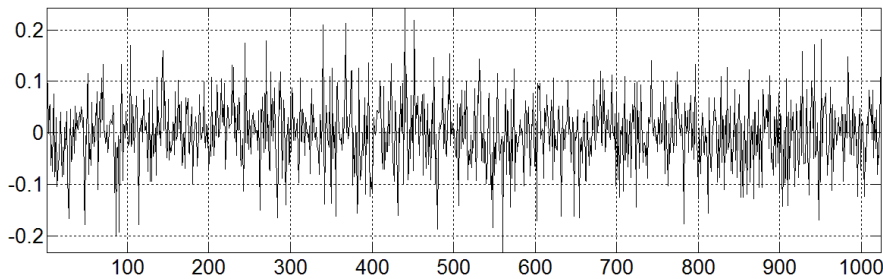


Рис. 5. Разница между экспериментальными и теоретическими значениями ошибок спектральных составляющих, обусловленных округлением результатов произведений в БПФ с прореживанием по частоте

Из анализа рис. 5 видно, что при усреднении по 5000 выборкам отличия экспериментальных данных от расчетных не превышают $\pm 0,25 \cdot Q$. Среднеквадратическая погрешность экспериментальной оценки ошибки округления определяется значением $\sqrt{2} \cdot \sigma_F(k) / \sqrt{5000}$ [8], что составляет при среднем значении ошибки БПФ $\sigma_F = \sqrt{\sigma_0^2 \cdot (N - 2 \cdot M)} = 9,147 \cdot Q$ значение, равное $0,1829 \cdot Q$. Полученная разница между экспериментальными и теоретическими значениями среднеквадратической оценки ошибки округления результатов произведений в БПФ укладывается в диапазон «трех сигм».

На рис. 6 приведена разность экспериментальной и теоретической (рассчитанной согласно формуле (14) величине $\sqrt{x_F^2(k)}$) оценок ошибки усечения результатов произведений в БПФ. Эксперимент показывает, что погрешность оценки среднеквадратической ошибки усечения также определяется дисперсией $\sigma_F^2(k)$ ошибок спектральных составляющих, обусловленных округлением результатов произведений в БПФ. Это, в свою очередь, указывает на то, что формула (13) для описания МО ошибки усечения является точной, а формула (14) позволяет верно рассчитывать среднеквадратическое значение ошибок усечения результатов произведения.

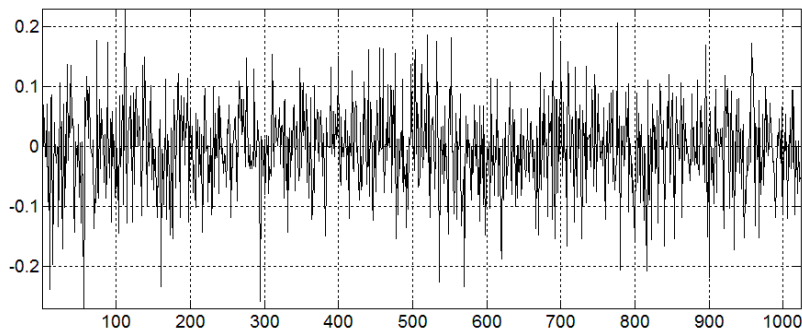


Рис. 6. Разница экспериментальной и расчетной величин ошибок спектральных составляющих, обусловленных усечением результатов произведений в БПФ с прореживанием по частоте

Заключение. 1. Получена аналитическая зависимость (11) величины средней мощности ошибки округления результатов произведений в БПФ с прореживанием по частоте в зависимости от размера БПФ.

2. Получена аналитическая зависимость (9) дисперсии ошибок округления результатов произведений в БПФ с прореживанием по частоте в зависимости от размера БПФ и номера спектральной составляющей.

3. Получена аналитическая зависимость (14) и алгоритм вычисления математического ожидания ошибок усечения результатов произведений в БПФ с прореживанием по частоте в зависимости от размера БПФ и номера спектральной составляющей.

Показано, что зависимость математического ожидания ошибки усечения в диапазоне значений $k=[1..N/4-1]$ от номера спектрального отсчета k имеет вид ступенчатой аппроксимации экспоненциального закона с максимальным значением, примерно равным $\sqrt{2} \cdot \frac{N}{4}$ при $k=1$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов. – М.: Мир, 1978. – 848 с.
2. Медведев С.Ю., Перов М.Ю., Якимов А.В. Точность цифровой оценки спектра сигнала // Труды 1-го совещания по проекту NATO SfP-973799 Semiconductors. – Н. Новгород, 2001. http://www.rf.unn.ru/NATO/1ws/SfP_Project_R.pdf.
3. Пяткин А.К. Оценка разрядности целочисленного вычислителя БПФ для заданного уровня соответствующих потерь в отношении сигнал/шум // Цифровая обработка сигналов. – 2005. – № 1. – С.46-49.
4. Аксенов О.Ю., Борисов Ю.И. К разрядности вычислителя БПФ при его реализации на процессоре Л1879ВМ1 (NM6403) // Цифровая обработка сигналов. – 2004. – № 2. – С. 40-43.
5. LogiCORE IP Fast Fourier Transform v9.0. Product Guide for Vivado. Design Suite. PG109 December 18, 2013.
6. http://www.xilinx.com/support/documentation/ip_documentation/xfft/v9_0/pg109-xfft.pdf.
7. Kaneko T. and Liu B. Accumulation of roundoff errors in fast Fourier transforms // J. Ass. Comput. Mach. – 1970. – Vol. 17. – P. 537–654.
8. Айфичер Э., Джервис Б. Цифровая обработка сигналов. Практический подход. – М.–СПб.: К., Вильямс, 2004. – 992 с.
9. Справочник по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1985. – 264 с.

REFERENCES

1. *Rabiner L., Gould B.* Teoriya i primeneniye tsifrovoy obrabotki signalov [Theory and application of digital signal processing]. Moscow: Mir, 1978, 848 p.
2. *Medvedev S.Yu., Perov M.Yu., Yakimov A.V.* Tochnost' tsifrovoy otsenki spektra signala [The accuracy of the digital spectrum estimation], *Trudy 1-go soveshchaniya po proektu NATO SfP-973799 Semiconductors* [Proceedings of the 1st meeting of the NATO project SfP-973799 Semiconductors]. Nizhny Novgorod, 2001. Available at: http://www.rf.unn.ru/NATO/1ws/SfP_Project_R.pdf.
3. *Pyatkin A.K.* Otsenka razryadnosti tselochislennogo vychislitelya BPF dlya zadannogo urovnya sootvetstvuyushchikh poter' v otnoshenii signal/shum [Evaluation bit integer calculator FFT for a given level of the corresponding losses in the signal-to-noise], *Tsifrovaya obrabotka signalov* [Digital signal processing], 2005, No. 1, pp. 46-49.
4. *Aksenov O.Yu., Borisov Yu.I.* K razryadnosti vychislitelya BPF pri ego realizatsii na protsessore L1879VM1 (NM6403) [To the capacity of the FFT calculator during its implementation on the processor LVM (NM6403)], *Tsifrovaya obrabotka signalov* [Digital signal processing], 2004, No. 2, pp. 40-43.
5. LogiCORE IP Fast. Fourier Transform v9.0. Product Guide for Vivado. Design Suite. PG109 December 18, 2013.
6. Available at: http://www.xilinx.com/support/documentation/ip_documentation/xfft/v9_0/pg109-xfft.pdf.
7. *Kaneko T. and Liu B.* Accumulation of roundoff errors in fast Fourier transforms, *J. Ass. Comput. Mach.*, 1970, Vol. 17, pp. 537-654.
8. *Ayficher E., Dzhervis B.* Tsifrovaya obrabotka signalov. Prakticheskiy podkhod [Digital signal processing. A practical approach]. Moscow–St. Petersburg: K., Vil'yams, 2004, 992 p.
9. *Spravochnik po teorii veroyatnostey i matematicheskoy statistike* [Handbook of probability theory and mathematical statistics]. Moscow: Nauka. Glavnaya redaktsiya fiziko-matematicheskoy literatury, 1985, 264 p.

Статью рекомендовал к опубликованию д.т.н., профессор Н.И. Витиска.

Ершова Ольга Владимировна – ООО «НИЦ супер-ЭВМ и нейрокомпьютеров»; e-mail: ershova150681@mail.ru; 347928, г. Таганрог Ростовской области, ул. Чехова, 2; тел.: 88634318910; программист 1 категории.

Чкан Андрей Викторович – e-mail: chkan_andrey@mail.ru; научный сотрудник

Кириченко Елена Викторовна – e-mail: e.v.kirichenko@yandex; научный сотрудник.

Семерников Евгений Андреевич – Южный научный центр РАН; e-mail: semernikov@mvs.tsure.ru; отдел информационных технологий и процессов управления; зав. отделом; к.т.н.

Yershova Olga Vladimirovna – “SRC of Supercomputers and Neurocomputers” Co Ltd; e-mail: ershova150681@mail.ru; 2 Chekhov street, Taganrog, 347928, Russia; phone: +78634318910; 1st category software developer.

Chkan Andrey Viktorovitch – e-mail: chkan_andrey@mail.ru; scientific associate.

Kirichenko Yelena Viktorovna – e-mail: e.v.kirichenko@yandex; scientific associate.

Semernikov Evgeny Andreevich – Southern Scientific Centre of the Russian Academy of Sciences; e-mail: semernikov@mvs.tsure.ru; the department of information technologies and control processes; head of department; cand. of eng. sc.