

## Раздел III. Применение суперкомпьютерных технологий

УДК 532.5.031

Л.А. Григорян, А.А. Семенякина

### ПАРАЛЛЕЛЬНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ЗАДАЧИ ТРАНСПОРТА ВЕЩЕСТВ НА ОСНОВЕ СХЕМ ПОВЫШЕННОГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ДИФфуЗИИ-КОНВЕКЦИИ\*

*Построены разностные аналоги операторов конвективного и диффузионного переноса, обладающие четвертым порядком погрешности аппроксимации относительно шага равномерной пространственной сетки, в том числе, в случае частичной заполненности ячеек. Исследование проведено в случае отсутствия влияния границы. Усложнение структуры разностных операторов позволило достичь требуемой локальной погрешности аппроксимации для внутренних узлов сетки, в том числе, в случае частичной заполненности ячеек сетки. Одновременно потребовалось увеличить требования к гладкости решения задачи. Предполагается, что функция решения имеет непрерывные производные по пространственным переменным до 5-ого порядка включительно и ограниченные производные – 6-ого порядка. В отличие от традиционного подхода при аппроксимации используется функция заполненности ячеек, обеспечивающая возможность повышения точности (гладкости) решений вблизи границ ступенчатой формы на равномерных сетках. Выполнено численное сравнение построенных схем четвертого порядка точности и традиционных, обладающих вторым порядком, на тестовой задаче, показавшее существенное превосходство по точности (в 60–70 раз) предложенных аппроксимаций на сетках, включающих 100x100 узлов для достаточно гладких тестовых функций решения. Построен параллельный алгоритм метода Зейделя решения сеточной задачи диффузии-конвекции, базирующийся на декомпозиции двумерной области по одному из координатных направлений с частичным перекрытием (в 3 узла) подобластей в памяти отдельных процессоров, показавший приемлемую эффективность при относительно небольшом числе процессоров (немногие десятки процессоров).*

*Схемы повышенного порядка точности; задачи диффузии-конвекции.*

L.A. Grigoryan, A.A. Semenyakina

### PARALLEL REALIZATION SUBSTANCE TRANSPORTATION PROBLEM BASED ON HIGH ACCURACY SCHEMES FOR DIFFUSION-ADVECTION EQUATIONS

*In this paper we construct difference analog of the operator of the convective and diffusive transport, having a fourth-order approximation error with respect to the uniform spatial grid step, including, in the case of partially filled cells. The study was conducted in the absence of the influence of the border. Complexity of the structure of difference operators allowed to reach the required local approximation error for internal nodes of the grid, including, in the case of a partially filled grid cells. At the same time it took to increase the demands on the smoothness of the solution. It is assumed that the function solution has continuous derivatives with respect to spatial variables to the fifth order are bounded derivatives – the second order. In contrast to the traditional approach used in the approxima-*

---

\* Работа выполнена в рамках реализации проекта № 606/36157 и в рамках работы по проекту по Программе Президиума РАН №1 «Фундаментальные проблемы математического моделирования».

tion of a function of filling cells, providing an opportunity to improve the accuracy of (smooth) solutions near the boundary stepped form on uniform grids. The numerical comparison of the constructed schemes of the fourth order of accuracy and traditional, having a second-order problem on the test showed significant superiority in accuracy (60–70 times) the proposed approximation on grids, including 100x100 nodes for sufficiently smooth test functions for the solution. Constructed parallel algorithm Seidel method for solving grid convection-diffusion problems, based on the two-dimensional domain decomposition according to one of the coordinate directions with partial overlap (3 knots) subdomains in memory of individual processors, which showed acceptable performance at a relatively small number of processors (a few tens of processors).

*Diffusion-advection problems; high order difference schemes.*

**Введение.** Уравнения диффузии – конвекции являются базовыми для широкого класса задач механики сплошной среды, в том числе, связанных с теплообменом, транспортом взвесей и аэрозолей в водной и воздушной средах [1, 2] и т.д. Несмотря на кажущуюся простоту постановок подобных задач вычислительные методы решения этих задач далеки от всеобъемлющего решения [3, 4]. Ряд вычислительных проблем, связанных с необходимостью повышения точности используемых схем, может быть решен за счет перехода к более точным шаблонам разностных схем, а также привлечения функции заполненности ячеек. Предполагается использование регулярных равномерных сеток, обеспечивающих возможность эффективного распараллеливания.

**Постановка задачи.** Задача транспорта веществ может быть представлена уравнением диффузии – конвекции – реакции [5–8]

$$c'_t + uc'_x + vc'_y = (\mu c'_x)'_x + (\mu c'_y)'_y + f$$

с граничными условиями

$$c'_n(x, y, t) = \alpha_n c + \beta_n,$$

где  $u, v$  – компоненты вектора скорости;  $\mu$  – коэффициент турбулентного обмена;  $f$  – функция, описывающая интенсивность и распределение источников.

Для численной реализации дискретной математической модели поставленной задачи вводится равномерная сетка:

$$w_n = \left\{ t^n = n\tau, x_i = ih_x, y_j = jh_y; \quad n = \overline{0..N_t}, i = \overline{0..N_x}, j = \overline{0..N_y}; \right. \\ \left. N_t \tau = T, N_x h_x = l_x, N_y h_y = l_y \right\},$$

где  $\tau$  – шаг по времени;  $h_x, h_y$  – шаги по пространству;  $N_t$  – верхняя граница по времени;  $N_x, N_y$  – границы по пространству.

Дискретные аналоги операторов конвективного  $uc'_x$  и диффузионного  $(\mu c'_x)'_x$  переноса второго порядка погрешности аппроксимации в случае частичной заполненности ячеек могут быть записаны в следующем виде [9–12]:

$$(q_0)_{i,j} uc'_x \approx (q_1)_{i,j} u_{i+1/2,j} \frac{c_{i+1,j} - c_{i,j}}{2h_x} + (q_2)_{i,j} u_{i-1/2,j} \frac{c_{i,j} - c_{i-1,j}}{2h_x}, \quad (1)$$

$$(q_0)_{i,j} (\mu c'_x)'_x \approx (q_1)_{i,j} \mu_{i+1/2,j} \frac{c_{i+1,j} - c_{i,j}}{h_x^2} - (q_2)_{i,j} \mu_{i-1/2,j} \frac{c_{i,j} - c_{i-1,j}}{h_x^2} -$$

$$- \left| (q_1)_{i,j} - (q_2)_{i,j} \right| \mu_{i,j} \frac{\alpha_x c_{i,j} + \beta_x}{h_x},$$

где  $q_i$  – коэффициенты, описывающие заполненность контрольных областей [11, 13–14].

**Погрешность аппроксимации задачи диффузии–конвекции.** Выражение (1)–(2) можно рассмотреть в случае  $(q_1)_{i,j} = (q_2)_{i,j} = 1$ . Для повышения погрешностей аппроксимаций выражений (1)–(2) необходимо исследовать на точность следующие аппроксимации:

– дискретный аналог оператора конвективного переноса в случае отсутствия влияния границы области:

$$uc'_x = u_{i+1/2,j} \frac{c_{i+1,j} - c_{i,j}}{2h_x} + u_{i-1/2,j} \frac{c_{i,j} - c_{i-1,j}}{2h_x}, \quad (3)$$

– дискретный аналог оператора диффузионного переноса в случае отсутствия влияния границы области:

$$(\mu c'_x)'_x = \mu_{i+1/2,j} \frac{c_{i+1,j} - c_{i,j}}{h_x^2} - \mu_{i-1/2,j} \frac{c_{i,j} - c_{i-1,j}}{h_x^2}, \quad (4)$$

Погрешность аппроксимации выражения (3) примет следующий вид:

$$\begin{aligned} uc'_x &= \frac{4u_{i,j} + (u_{i,j})'' h_x^2}{4} \left( (c_{i,j})' + (c_{i,j})'' \frac{h_x^2}{6} \right) + \\ &+ \frac{(u_{i,j})' h_x}{4} \left( (c_{i,j})'' h_x + (c_{i,j})^{(IV)} \frac{h_x^3}{12} \right) + O(h_x^4) = \\ &= u_{i,j} (c_{i,j})' + \frac{(c_{i,j})' (u_{i,j})''}{4} h_x^2 + \frac{u_{i,j} (c_{i,j})'''}{6} h_x^2 + \frac{(u_{i,j})' (c_{i,j})''}{4} h_x^2 + O(h_x^4). \end{aligned}$$

Таким образом, для аппроксимации оператора конвективного переноса  $uc'$  разностной схемой, обладающей четвертым порядком погрешности аппроксимации, необходимо аппроксимировать оператор  $uc' - c'u''h^2/4 - uc'''h^2/6 - u'c''h^2/4$  вторым порядком погрешности аппроксимации.

Найдем погрешность аппроксимации выражения (4); для этого воспользуемся разложением в ряд Тейлора [15–18] относительно узла  $(i, j)$  значения функций в узлах  $(i+1, j)$  и  $(i-1, j)$ :

$$\begin{aligned} (\mu c'_x)'_x &= \left( 2 \frac{\mu_{i,j}}{h_x} + (\mu_{i,j})'' \frac{h_x^2}{2} \right) \left( (c_{i,j})'' \frac{h_x}{2} + (c_{i,j})^{(IV)} \frac{h_x^3}{24} \right) + \\ &+ \left( (\mu_{i,j})' + (\mu_{i,j})''' \frac{h_x^2}{6} \right) \left( (c_{i,j})' + (c_{i,j})'' \frac{h_x^2}{6} \right) + O(h_x^4) = \mu_{i,j} (c_{i,j})'' + \\ &+ \mu_{i,j} (c_{i,j})^{(IV)} \frac{h_x^2}{12} + (\mu_{i,j})'' (c_{i,j})'' \frac{h_x^2}{4} + (\mu_{i,j})' (c_{i,j})' + (\mu_{i,j})' (c_{i,j})'' \frac{h_x^2}{6} + \\ &+ (\mu_{i,j})''' (c_{i,j})' \frac{h_x^2}{6} + O(h_x^4) = \left( \mu_{i,j} (c_{i,j})' \right)' + \mu_{i,j} (c_{i,j})^{(IV)} \frac{h_x^2}{12} + \\ &+ (\mu_{i,j})'' (c_{i,j})'' \frac{h_x^2}{4} + (\mu_{i,j})' (c_{i,j})'' \frac{h_x^2}{6} + (\mu_{i,j})''' (c_{i,j})' \frac{h_x^2}{6} + O(h_x^4). \end{aligned}$$

Таким образом, для аппроксимации оператора диффузионного переноса  $(\mu c')'$  разностной схемой, обладающей четвертым порядком погрешности аппроксимации, необходимо аппроксимировать оператор  $(\mu c')' - \mu c^{(IV)}h^2/12 - \mu''c''h^2/4 - \mu'c'''h^2/6 - \mu'''c'h^2/6$  вторым порядком погрешности аппроксимации.

**Схема повышенного порядка погрешности аппроксимации для оператора конвективного переноса.** Для аппроксимации оператора конвективного переноса  $uc'$  разностной схемой, обладающей четвертым порядком погрешности аппроксимации, необходимо аппроксимировать оператор  $uc' - c'u''h^2/4 - uc'''h^2/6 - u'c''h^2/4$  вторым порядком погрешности аппроксимации. Аппроксимация оператора конвективно-го переноса  $uc'$  разностной схемой, обладающей четвертым порядком точности, запишется в следующем виде:

$$\begin{aligned} (q_0)_i L(c) = & -(q_1)_i \frac{u_{i+1/2}}{12h} \frac{(q_1)_{i+1}}{(q_0)_{i+1}} c_{i+2} - \left( -(q_1)_i \frac{u_{i+1/2}}{12h} \left( 2 + \frac{(q_1)_i}{(q_0)_i} \right) + \right. \\ & \left. + (q_2)_i \frac{u_{i-1/2}}{12h} \frac{(q_1)_i}{(q_0)_i} + (q_1)_i \left( -\frac{u_{i+1/2}}{2h} + k_i^{(1)} + k_i^{(2)} \right) \right) c_{i+1} + \left( -(q_1)_i \frac{u_{i+1/2}}{12h} \left( 2 + \frac{(q_2)_{i+1}}{(q_0)_{i+1}} \right) + \right. \\ & \left. + (q_2)_i \frac{u_{i-1/2}}{12h} \left( 2 + \frac{(q_1)_{i-1}}{(q_0)_{i-1}} \right) + (q_2)_i \frac{u_{i-1/2}}{2h} - (q_1)_i \frac{u_{i+1/2}}{2h} - ((q_2)_i - (q_1)_i) k_i^{(1)} + ((q_2)_i + (q_1)_i) k_i^{(2)} \right) c_i + \\ & - \left( -(q_1)_i \frac{u_{i+1/2}}{12h} \frac{(q_2)_i}{(q_0)_i} + (q_2)_i \frac{u_{i-1/2}}{12h} \left( 2 + \frac{(q_2)_i}{(q_0)_i} \right) + (q_2)_i \left( \frac{u_{i-1/2}}{2h} + k_i^{(2)} - k_i^{(1)} \right) \right) c_{i-1} - \\ & - \left( -(q_2)_i \frac{u_{i-1/2}}{12h} \frac{(q_2)_{i-1}}{(q_0)_{i-1}} \right) c_{i-2}, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $k_i^{(1)} = \left( \frac{(q_1)_i}{(q_0)_i} (u_{i+1} - u_i) - \frac{(q_2)_i}{(q_0)_i} (u_i - u_{i-1}) \right) / (8h)$ ,

$$k_i^{(2)} = \frac{(q_1)_i}{(q_0)_i} \frac{u_{i+1} - u_i}{8h} + \frac{(q_2)_i}{(q_0)_i} \frac{u_i - u_{i-1}}{8h}.$$

**Схема повышенного порядка погрешности аппроксимации для оператора диффузионного переноса.** Для аппроксимации оператора диффузионного переноса  $(\mu c)'$  разностной схемой, обладающей четвертым порядком погрешности аппроксимации, необходимо аппроксимировать оператор  $(\mu c)' - \mu c^{(IV)}h^2/12 - \mu''c''h^2/4 - \mu'c'''h^2/6 - \mu'''c'h^2/6$  вторым порядком погрешности аппроксимации. Представление оператора диффузионного переноса  $(\mu c)'$  разностной схемой, обладающей четвертым порядком точности, которая может быть записана в следующем виде:

$$\begin{aligned} (q_0)_i L(c) = & -A_i c_i + B_{1,i} c_{i+1} + B_{2,i} c_{i-1} + B_{3,i} c_{i+2} + B_{4,i} c_{i-2}. \quad (6) \\ B_{1,i} = & (q_1)_i \frac{\mu_{i+1/2}}{h^2} + (q_1)_i \frac{\mu_{i+1}}{12h^2} \left( \frac{(q_1)_i}{(q_0)_i} + 2 \right) + (q_2)_i \frac{\mu_{i-1}}{12h^2} \frac{(q_1)_i}{(q_0)_i} - (q_1)_i k_i^{(3)} - (q_1)_i \frac{\mu_{i+1}'' - \mu_i''}{12}, \\ B_{2,i} = & (q_2)_i \frac{\mu_{i-1/2}}{h^2} + (q_1)_i \frac{\mu_{i+1}}{12h^2} \frac{(q_2)_i}{(q_0)_i} + (q_2)_i \frac{\mu_{i-1}}{12h^2} \left( \frac{(q_2)_i}{(q_0)_i} + 2 \right) - (q_2)_i k_i^{(3)} - (q_2)_i \frac{\mu_i'' - \mu_{i-1}''}{12}, \\ B_{3,i} = & -(q_1)_i \frac{\mu_{i+1}}{12h^2} \frac{(q_1)_{i+1}}{(q_0)_{i+1}}, \quad B_{4,i} = -(q_2)_i \frac{\mu_{i-1}}{12h^2} \frac{(q_2)_{i-1}}{(q_0)_{i-1}}, \\ A_i = & (q_1)_i \frac{\mu_{i+1/2}}{h^2} + (q_2)_i \frac{\mu_{i-1/2}}{h^2} - ((q_1)_i + (q_2)_i) k_i^{(3)} + (q_1)_i \frac{\mu_{i+1}}{12h^2} \left( \frac{(q_2)_{i+1}}{(q_0)_{i+1}} + 2 \right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + (q_2)_i \frac{\mu_{i-1}}{12h^2} \left( \frac{(q_1)_{i-1}}{(q_0)_{i-1}} + 2 \right) - (q_2)_i \frac{\mu_i'' - \mu_{i-1}''}{12} - (q_1)_i \frac{\mu_{i+1}'' - \mu_i''}{12} + (q_2)_i \frac{\mu_{i-1}}{12h^2} \frac{(q_1)_i}{(q_0)_i} + \\
 & + (q_1)_i \frac{\mu_{i+1}}{12h^2} \frac{(q_2)_i}{(q_0)_i} - (q_1)_i \frac{\mu_{i+1}}{12h^2} \frac{(q_1)_{i+1}}{(q_0)_{i+1}} - (q_2)_i \frac{\mu_{i-1}}{12h^2} \frac{(q_2)_{i-1}}{(q_0)_{i-1}}, \\
 k_i^{(3)} & = \frac{(q_1)_i}{(q_0)_i} \frac{\mu_{i+1} - \mu_i}{4h^2} - \frac{(q_2)_i}{(q_0)_i} \frac{\mu_i - \mu_{i-1}}{4h^2}, \quad \mu_i'' = \left( \frac{(q_1)_i}{(q_0)_i} c_{i+1} - 2c_i + \frac{(q_2)_i}{(q_0)_i} c_{i-1} \right) / h^2.
 \end{aligned}$$

**Сопоставление результатов расчета задачи транспорта веществ на основе схем второго и четвертого порядков точности.** На рис. 1 приведено поле, описывающее погрешность вычислений, полученное как разность между аналитическим и численным решением для задачи транспорта веществ, при этом начальное распределение задавалось функцией

$$C(x, y) = \begin{cases} \sin(\pi(x-10))\sin(\pi(y-10)), & x \in D, \\ 0, & x \notin D, \end{cases}$$

$$D: \{x \in [10, 20], y \in [10, 20]\}.$$

Моделирование производилось на сетке размерами 100x100 расчетных узлов, при этом параметры задавались следующим образом: размеры расчетной области  $lx=100$  м,  $ly=100$  м и по времени  $ht=0.001$  с; временной интервал равен 100с, горизонтальная составляющая равна 4 м/с, вертикальная – 3 м/с, коэффициент турбулентного обмена равен  $2 \text{ м}^2/\text{с}$ .

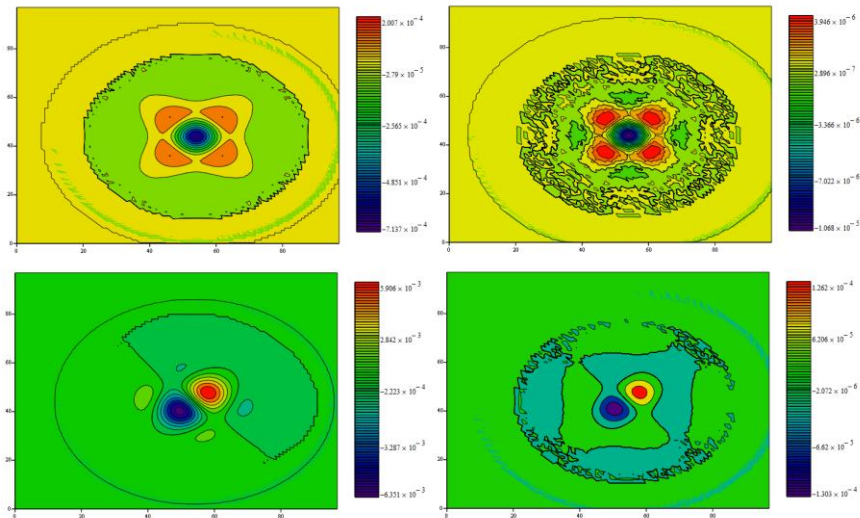


Рис. 1. Погрешность расчетов веществ: сверху – для задачи диффузии; снизу – для задачи диффузии-конвекции (слева – схемы второго порядка точности; справа – четвертого)

Из сопоставления результатов численных экспериментов на основе схем второго и четвертого порядков точности (рис. 1) следует, что для задачи диффузии удалось повысить точность в 66.7 раз, а для задачи диффузии – конвекции в 48.7 раз.

**Параллельная реализация задачи диффузии – конвекции методом Гаусса–Зейделя.** Идея параллельного варианта алгоритма метода Гаусса–Зейделя заключается в следующем [19–21]. Каждый процессор получает область, получен-

ную путем разбиения исходной области на части по одному координатному направлению с пересечением в трех узлах. Затем рассчитывается вектор невязки и его равномерная норма (максимальный по модулю элемент). На следующем шаге каждый процессор определяет максимальный по модулю элемент и передает его значение всем остальным процессорам. После передачи процессоры рассчитывают максимальный элемент, в котором будет храниться норма вектора невязки.

При расчете значения вектора решения только первый процессор не требует дополнительной информации и может независимо от других вычислителей обработать свою часть области, остальные процессоры ждут передачи данных от предыдущего вычислителя.

Передача данных по одному элементу не оптимальна, так как появляются временные затраты, связанные с организацией передач, их можно минимизировать путем увеличения объема пакета передаваемых данных, но при этом растет время задержек старта процессоров. Таким образом, возникает задача расчета (подбора) оптимального объема пакета передачи данных.

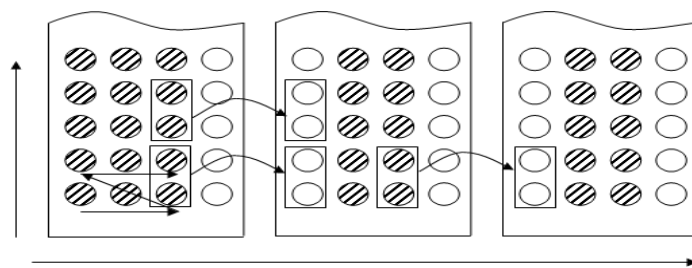


Рис. 2. Схема для расчета значения вектора решения на следующем временном слое

Результаты использования многопроцессорных технологий для расчета полей течений приведены в табл. 1.

Таблица 1

Количество процессоров	Время, с.	Ускорение	Эффективность
1	1447,415	1	1
2	795,307	1,82	0,91
3	598,875	2,42	0,81
4	504,043	2,87	0,71
5	399,695	3,62	0,72
6	352,892	4,1	0,68
7	304,012	4,76	0,68
8	287,366	5,04	0,63
9	270,897	5,34	0,59
10	262,657	5,51	0,55

Из табл. 1 видно, что параллельный алгоритм метода Гаусса–Зейделя может быть применен для реальных задач и применение параллельных технологий вносит существенный вклад в уменьшение времени расчета.

**Заключение.** Было установлено, что для аппроксимации оператора конвективного переноса  $uc'$  разностной схемой, обладающей четвертым порядком погрешности аппроксимации, необходимо аппроксимировать оператор  $uc' - c'u''h^2/4 - uc'''h^2/6 - u'c''h^2/4$  вторым порядком погрешности аппроксима-

ции, а для аппроксимации оператора диффузионного переноса  $(\mu c')'$  разностной схемой, обладающей четвертым порядком погрешности аппроксимации, необходимо аппроксимировать оператор  $(\mu c')' - \mu c^{(IV)} h^2 / 12 - \mu'' c'' h^2 / 4 - \mu' c''' h^2 / 6 - \mu''' c' h^2 / 6$  вторым порядком погрешности аппроксимации. Также построены схемы повышенного (четвертого) порядка точности для операторов конвективного и диффузионного переносов, учитывающие заполненность ячеек.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Dorodnitsyn L.V., Kornilina M.A., Chetverushkin B.N., Yakobovskii M.V. Computer modeling of gas flows containing chemically active components // Russian Journal of Physical Chemistry A. – 1997. – Т. 71, № 12. – С. 2059-2065.
2. Якобовский М.В. Инкрементный алгоритм декомпозиции графов // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Серия: Математическое моделирование и оптимальное управление. – 2005. – № 1. – С. 243.
3. Гуцин В.А., Матюшин П.В. Математическое моделирование и визуализация трансформации вихревой структуры течения около сферы при увеличении степени стратификации жидкости // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2011. – Т. 51, № 2. – С. 268-281.
4. Сухинов А.И. Прецизионные модели гидродинамики и опыт их применения в предсказании и реконструкции чрезвычайных ситуаций в Азовском море // Известия ТРТУ. – 2006. – № 3 (58). – С. 228-235.
5. Петров И.Б., Фаворская А.В., Санников А.В., Квасов И.Е. Сеточно-характеристический метод с использованием интерполяции высоких порядков на тетраэдральных иерархических сетках с кратным шагом по времени // Математическое моделирование. – 2013. – Т. 25, № 2. – С. 42-52.
6. Беклемишева К.А., Петров И.Б., Фаворская А.В. Численное моделирование процессов в твердых деформируемых средах при наличии динамических контактов с помощью сеточно-характеристического метода // Математическое моделирование. – 2013. – Т. 25, № 11. – С. 3-16.
7. Муратов М.В., Петров И.Б. Расчет волновых откликов от систем субвертикальных макротрещин с использованием сеточно-характеристического метода // Математическое моделирование. – 2013. – Т. 25, № 3. – С. 89-104.
8. Чистяков А.Е., Семенякина А.А. Применение методов интерполяции для восстановления донной поверхности // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2013. – № 4 (141). – С. 21-28.
9. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Тимофеева Е.Ф., Шишенина А.В. Математическая модель расчета прибрежных волновых процессов // Математическое моделирование. – 2012. – Т. 24, № 8. – С. 32-44.
10. Сухинов А.И., Никитина А.В., Чистяков А.Е., Семенов И.С. Математическое моделирование условий формирования заморозов в мелководных водоемах на многопроцессорной вычислительной системе // Вычислительные методы и программирование: новые вычислительные технологии. – 2013. – Т. 14, № 1. – С. 103-112.
11. Васильев В.С., Сухинов А.И. Прецизионные двумерные модели мелких водоемов // Математическое моделирование. – 2003. – Т. 15, № 10. – С. 17.
12. Сухинов А.И., Никитина А.В., Чистяков А.Е. Моделирование сценария биологической реабилитации Азовского моря // Математическое моделирование. – 2012. – Т. 24, № 9. – С. 3-21.
13. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Фоменко Н.А. Методика построения разностных схем для задачи диффузии-конвекции-реакции, учитывающих степень заполненности контрольных ячеек // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2013. – № 4 (141). – С. 87-98.
14. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Проценко Е.А. Математическое моделирование транспорта наносов в прибрежной зоне мелководных водоемов // Математическое моделирование. – 2013. – Т. 25, № 12. – С. 65-82.

15. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Шишени А.В. Оценка погрешности решения уравнения диффузии на основе схем с весами // Математическое моделирование. – 2013. – Т. 25, № 11. – С. 53-64.
16. Четверушкин Б.Н. Пределы детализации и формулировка моделей уравнений сплошных сред // Математическое моделирование. – 2012. – Т. 24, № 11. – С. 33-52.
17. Akayev A.A., Chetverushkin B.N., Iakobovski M.V., Kuzin A.K., Shabrov N.N., Orlov S.G. Generation of isosurface on a large mesh // В сборнике: Proceedings of the IASTED International Conference on Automation, Control, and Information Technology – Information and Communication Technology, ACIT-ICT 2010. – 2010. – С. 236-240.
18. Chetverushkin B., Gasilov V., Iakobovski M., Polyakov S., Kartasheva E., Boldarev A., Abalakin I., Minkin A. Unstructured mesh processing in parallel cfd project gimm // В книге: Parallel Computational Fluid Dynamics 2005. – 2006. – С. 501-508.
19. Гуцин В.А., Миткин В.В., Рождественская Т.И., Чапечкин Ю.Д. Численное и экспериментальное исследование тонкой структуры течения стратифицированной жидкости вблизи кругового цилиндра // Прикладная механика и техническая физика. – 2007. – Т. 48, № 1 (281). – С. 43-54.
20. Белоцерковский О.М., Гуцин В.А., Щенников В.В. Метод расщепления в применении к решению задач динамики вязкой несжимаемой жидкости // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1975. – Т. 15, № 1. – С. 197.
21. Коновалов А.Н. Метод скорейшего спуска с адаптивным попеременно-треугольным переусловливателем // Дифференциальные уравнения. – 2004. – Т. 40, № 7. – С. 953.
22. Коновалов А.Н. К теории попеременно-треугольного итерационного метода // Сибирский математический журнал. – 2002. – Т. 43, № 3. – С. 552.

## REFERENCES

1. Dorodnitsyn L.V., Kornilina M.A., Chetverushkin B.N., Yakobovskii M.V. Computer modeling of gas flows containing chemically active components, *Russian Journal of Physical Chemistry A*, 1997, Vol. 71, No. 12, pp. 2059-2065.
2. Yakobovskiy M.V. Inkrementnyy algoritm dekompozitsii grafov [The incremental algorithm of decomposition of graphs], *Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N.I. Lobachevskogo. Seriya: Matematicheskoe modelirovanie i optimal'noe upravlenie* [Bulletin of the Nizhny Novgorod University. N.I. Lobachevsky. Series: Mathematical modeling and optimal control], 2005, No. 1, pp. 243.
3. Gushchin V.A., Matyushin P.V. Matematicheskoe modelirovanie i vizualizatsiya transformatsii vikhrevoy struktury techeniya okolo sfery pri uvelichenii stepeni stratifikatsii zhidkosti [Mathematical modeling and visualization of the transformation of the vortex structure of the flow around a sphere with increasing degree of stratification of the liquid], *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki* [Journal of computational mathematics and mathematical physics], 2011, Vol. 51, No. 2, pp. 268-281.
4. Sukhinov A.I. Pretsizionnye modeli gidrodinamiki i opyt ikh primeneniya v predskazanii i rekonstruktsii chrezvychaynykh situatsiy v Azovskom more [Precision model of hydrodynamics and experience of their use in the prediction and reconstruction of emergencies in the sea of Azov], *Izvestiya TRTU* [Izvestiya TSURE], 2006, No. 3 (58), pp. 228-235.
5. Petrov I.B., Favorskaya A.V., Sannikov A.V., Kvasov I.E. Setochno-kharakteristicheskiy metod s ispol'zovaniem interpolatsii vysokikh poryadkov na tetraedral'nykh ierarkhicheskikh setkakh s kratnym shagom po vremeni [Grid-characteristic method using higher order interpolation in hierarchical tetrahedral meshes with multiple time step], *Matematicheskoe modelirovanie* [Mathematical modeling], 2013, Vol. 25, No. 2, pp. 42-52.
6. Beklemysheva K.A., Petrov I.B., Favorskaya A.V. Chislennoe modelirovanie protsessov v tverdykh deformiruemyykh sredakh pri nalichii dinamicheskikh kontaktov s pomoshch'yu setochno-kharakteristicheskogo metoda [Numerical simulation of processes in deformable rigid bodies in the presence of dynamic contacts with grid-characteristic method], *Matematicheskoe modelirovanie* [Mathematical modeling], 2013, Vol. 25, No. 11, pp. 3-16.
7. Muratov M.V., Petrov I.B. Raschet volnovykh otklikov ot sistem subvertikal'nykh makrotreshchin s ispol'zovaniem setochno-kharakteristicheskogo metoda [Calculation of wave responses from the sub-vertical microtrain using a grid-characteristic method], *Matematicheskoe modelirovanie* [Mathematical modeling], 2013, Vol. 25, No. 3, pp. 89-104.



8. *Chistyakov A.E., Semenyakina A.A.* Primenenie metodov interpolatsii dlya vosstanovleniya donnoy poverkhnosti [Use of interpolation methods for recovery bottom surface], *Izvestiya YuFU. Tekhnicheskie nauki* [Izvestiya SFedU. Engineering Sciences], 2013, No. 4 (141), pp. 21-28.
9. *Sukhinov A.I., Chistyakov A.E., Timofeeva E.F., Shishenya A.V.* Matematicheskaya model' rascheta pribrezhnykh volnovykh protsessov [The mathematical model of calculation of coastal wave processes], *Matematicheskoe modelirovanie* [Mathematical modeling], 2012, Vol. 24, No. 8, pp. 32-44.
10. *Sukhinov A.I., Nikitina A.V., Chistyakov A.E., Semenov I.S.* Matematicheskoe modelirovanie usloviy formirovaniya zamorov v melkovodnykh vodoemakh na mnogoprotsessornoy vychislitel'noy sisteme [Mathematical modeling of the formation of Zamora in shallow waters on a multiprocessor computer system], *Vychislitel'nye metody i programmirovaniye: novye vychislitel'nye tekhnologii* [Computational methods and programming: new computational technologies], 2013, Vol. 14, No. 1, pp. 103-112.
11. *Vasil'ev V.S., Sukhinov A.I.* Pritsizionnyye dvumernyye modeli melkikh vodoemov [Precision two-dimensional model of shallow pools], *Matematicheskoe modelirovanie* [Mathematical modeling], 2003, Vol. 15, No. 10, pp. 17.
12. *Sukhinov A.I., Nikitina A.V., Chistyakov A.E.* Modelirovanie stsenariya biologicheskoy reabilitatsii Azovskogo morya [The scenario modeling biological rehabilitation of the Azov sea], *Matematicheskoe modelirovanie* [Mathematical modeling], 2012, Vol. 24, No. 9, pp. 3-21.
13. *Sukhinov A.I., Chistyakov A.E., Fomenko N.A.* Metodika postroeniya raznostnykh skhem dlya zadachi diffuzii-konveksii-reaktsii, uchityvayushchikh stepen' zapolnennosti kontrol'nykh yacheek [Method of construction difference scheme for problems of diffusion-convection-reaction, takes into the degree filling of the control volume], *Izvestiya YuFU. Tekhnicheskie nauki* [Izvestiya SFedU. Engineering Sciences], 2013, No. 4 (141), pp. 87-98.
14. *Sukhinov A.I., Chistyakov A.E., Protsenko E.A.* Matematicheskoe modelirovanie transporta nanosov v pribrezhnoy zone melkovodnykh vodoemov [Mathematical modeling of sediment transport in the coastal zone of shallow reservoirs], *Matematicheskoe modelirovanie* [Mathematical modeling], 2013, Vol. 25, No. 12, pp. 65-82.
15. *Sukhinov A.I., Chistyakov A.E., Shishenya A.V.* Otsenka pogreshnosti resheniya uravneniya diffuzii na osnove skhem s vesami [Error estimation for the solution of the diffusion equation-based schemes with weights], *Matematicheskoe modelirovanie* [Mathematical modeling], 2013, Vol. 25, No. 11, pp. 53-64.
16. *Chetverushkin B.N.* Predely detalizatsii i formulirovka modeley uravneniy sploshnykh sred [The limits of detail and formulation of the model equations of continuous media], *Matematicheskoe modelirovanie* [Mathematical modeling], 2012, Vol. 24, No. 11, pp. 33-52.
17. *Akayev A.A., Chetverushkin B.N., Iakobovski M.V., Kuzin A.K., Shabrov N.N., Orlov S.G.* Generation of isosurface on a large mesh, *In the collection: Proceedings of the IASTED International Conference on Automation, Control, and Information Technology – Information and Communication Technology, ACIT-ICT 2010*, pp. 236-240.
18. *Chetverushkin B., Gasilov V., Iakobovski M., Polyakov S., Kartasheva E., Boldarev A., Abalakin I., Minkin A.* Unstructured mesh processing in parallel cfd project gimm, *In the book: Parallel Computational Fluid Dynamics 2005, 2006*, pp. 501-508.
19. *Gushchin V.A., Mitkin V.V., Rozhdestvenskaya T.I., Chashechkin Yu.D.* Chislennoe i eksperimental'noe issledovanie tonkoy struktury techeniya stratifitsirovannoy zhidkosti vblizi krugovogo tsilindra [Numerical and experimental study of the fine structure of the flow of stratified fluids near a circular cylinder], *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika* [Journal of applied mechanics and technical physics], 2007, Vol. 48, No 1 (281), pp. 43-54.
20. *Belotserkovskiy O.M., Gushchin V.A., Shchennikov V.V.* Metod rasshchepleniya v primenenii k resheniyu zadach dinamiki vyazkoy neszhimaemoy zhidkosti [Numerical and experimental study of the fine structure of the flow of stratified fluids near a circular cylinder], *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki* [Journal of computational mathematics and mathematical physics], 1975, Vol. 15, No. 1, pp. 197.
21. *Konovalov A.N.* Metod skoreyshego spuska s adaptivnym poperemennno-treugol'nym pereobuslovlivatelyem [The method of steepest descent with adaptive alternating triangular preamplification], *Differentsial'nye uravneniya* [Differential equations], 2004, Vol. 40, No. 7, pp. 953.

22. *Konovalov A.N.* К теории попеременно-треугольного итерационного метода [The theory of alternating triangular iterative method], *Sibirskiy matematicheskiy zhurnal* [Siberian mathematical journal], 2002, Vol. 43, No. 3, pp. 552.

Статью рекомендовал к опубликованию д.ф.-м.н., профессор А.А. Илюхин.

**Григорян Лусине Арсеновна** – Северо-Кавказский федеральный университет. Институт математики и естественных наук; e-mail: honey.lusine@mail.ru; 355029, г. Ставрополь, пр. Кулакова, 2; тел.: +79887506994; кафедра высшей алгебры и геометрии.

**Семенякина Алена Александровна** – Южный федеральный университет; e-mail: j.a.s.s.y@mail.ru; 347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44; тел.: 88634371606; кафедра высшей математики; аспирант.

**Grigoryan Lusine Arsenovna** – North-Caucasian Federal University. Institute of mathematics and natural Sciences; e-mail: honey.lusine@mail.ru; 2, Kulakov pr., Stavropol, 355029, Russia; phone: +79887506994; the chair of higher algebra and geometry.

**Semenyakina Alena Aleksandrovna** – Southern Federal University; e-mail: j.a.s.s.y@mail.ru; 44, Nekrasovskiy, Taganrog, 347928, Russia; phone: +78634371606; the department of higher mathematics; postgraduate student.

УДК 519.6

**А.В. Фаворская, И.Б. Петров, Н.И. Хохлов, Д.И. Петров**

#### **ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ АРКТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ С ПОМОЩЬЮ СЕТОЧНО-ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО МЕТОДА**

*В настоящее время внимание к освоению Арктического шельфа России вызвано необходимостью сейсмической разведки и последующей разработки месторождений углеводородов. Следует отметить, что сейсморазведка в шельфовых зонах Арктики имеет ряд особенностей, среди которых следует отметить наличие слоя воды и слоя льда. В настоящей работе при помощи сеточно-характеристического метода проводится численное моделирование волновых процессов в упругоакустических задачах, к которым относятся задачи шельфовой сейсморазведки. Рассматриваются постановки задач, в которых присутствуют вода, грунт и углеводородосодержащий слой, также лед, вода, грунт и углеводородосодержащий слой. Решаются система уравнений, описывающая состояние бесконечно малого объема сплошной линейно-упругой среды и система уравнений, описывающая акустическое поле. Используется сеточно-характеристический метод, позволяющий корректно учитывать все границы и контактные границы области интегрирования. Также для решения рассматриваемых задач было разработано контактное условие на границе между жидкостью и твердым телом.*

*Сеточно-характеристический метод; механика деформируемого твёрдого тела; упругоакустические задачи; шельфовая сейсморазведка; модель флюидонасыщенной трещины.*

**A.V. Favorskaya, I.B. Petrov, N.I. Khokhlov, D.I. Petrov**

#### **NUMERICAL MODELING OF ARCTIC PROBLEMS USING GRID-CHARACTERISTIC METHOD**

*Currently the attention to development of Russian Arctic shelf occurs because of the need of seismic prospecting and subsequent digging of hydrocarbon deposits. It should be noted that seismic prospecting in shelf areas of the Arctic has a number of features, among which the presence of a layer of water and ice layer is. In this paper using grid-characteristic method numerical modeling of wave processes in acoustic and elastic media is made which includes shelf seismic prospecting. We consider problem definition, in which there are water, sea ground and the hydrocarbon*