

22. *Konovalov A.N.* К теории попеременно-треугольного итерационного метода [The theory of alternating triangular iterative method], *Sibirskiy matematicheskiy zhurnal* [Siberian mathematical journal], 2002, Vol. 43, No. 3, pp. 552.

Статью рекомендовал к опубликованию д.ф.-м.н., профессор А.А. Илюхин.

Григорян Лусине Арсеновна – Северо-Кавказский федеральный университет. Институт математики и естественных наук; e-mail: honey.lusine@mail.ru; 355029, г. Ставрополь, пр. Кулакова, 2; тел.: +79887506994; кафедра высшей алгебры и геометрии.

Семенякина Алена Александровна – Южный федеральный университет; e-mail: j.a.s.s.y@mail.ru; 347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44; тел.: 88634371606; кафедра высшей математики; аспирант.

Grigoryan Lusine Arsenovna – North-Caucasian Federal University. Institute of mathematics and natural Sciences; e-mail: honey.lusine@mail.ru; 2, Kulakov pr., Stavropol, 355029, Russia; phone: +79887506994; the chair of higher algebra and geometry.

Semenyakina Alena Aleksandrovna – Southern Federal University; e-mail: j.a.s.s.y@mail.ru; 44, Nekrasovskiy, Taganrog, 347928, Russia; phone: +78634371606; the department of higher mathematics; postgraduate student.

УДК 519.6

А.В. Фаворская, И.Б. Петров, Н.И. Хохлов, Д.И. Петров

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ АРКТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ С ПОМОЩЬЮ СЕТОЧНО-ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО МЕТОДА

В настоящее время внимание к освоению Арктического шельфа России вызвано необходимостью сейсмической разведки и последующей разработки месторождений углеводородов. Следует отметить, что сейсморазведка в шельфовых зонах Арктики имеет ряд особенностей, среди которых следует отметить наличие слоя воды и слоя льда. В настоящей работе при помощи сеточно-характеристического метода проводится численное моделирование волновых процессов в упругоакустических задачах, к которым относятся задачи шельфовой сейсморазведки. Рассматриваются постановки задач, в которых присутствуют вода, грунт и углеводородосодержащий слой, также лед, вода, грунт и углеводородосодержащий слой. Решаются система уравнений, описывающая состояние бесконечно малого объема сплошной линейно-упругой среды и система уравнений, описывающая акустическое поле. Используется сеточно-характеристический метод, позволяющий корректно учитывать все границы и контактные границы области интегрирования. Также для решения рассматриваемых задач было разработано контактное условие на границе между жидкостью и твердым телом.

Сеточно-характеристический метод; механика деформируемого твёрдого тела; упругоакустические задачи; шельфовая сейсморазведка; модель флюидонасыщенной трещины.

A.V. Favorskaya, I.B. Petrov, N.I. Khokhlov, D.I. Petrov

NUMERICAL MODELING OF ARCTIC PROBLEMS USING GRID-CHARACTERISTIC METHOD

Currently the attention to development of Russian Arctic shelf occurs because of the need of seismic prospecting and subsequent digging of hydrocarbon deposits. It should be noted that seismic prospecting in shelf areas of the Arctic has a number of features, among which the presence of a layer of water and ice layer is. In this paper using grid-characteristic method numerical modeling of wave processes in acoustic and elastic media is made which includes shelf seismic prospecting. We consider problem definition, in which there are water, sea ground and the hydrocarbon

layer, and another problem definition, in which there are ice, water, sea ground and the hydrocarbon layer. We solve systems of equations describing the state of the infinitesimal volume of continuous linear-elastic medium and the system of equations describing the acoustic field. We use grid-characteristic method to correctly take into account all the boundaries and contacts into the integration area. Also for the solutions of these problems the contact conditions at the boundary between the liquid and the solid layers have been developed.

Grid-characteristic method; the mechanics of deformable solids; wave problems in coupled elastic-acoustic media; marine seismology; fluid-filled crack; structural acoustics.

Введение. Поиск месторождений углеводородов – одна их важнейших стратегических задач. На данный момент перспективной считается разработка месторождений в шельфовой зоне арктических морей, что требует развития методики гидросейсмической разведки и, прежде всего, численного моделирования возникающих задач [1].

В настоящей работе описывается модель волновых процессов в системах «вода – грунт» и результаты численного эксперимента по данной модели сеточно-характеристическим методом [2–6]. Приведена форма отклика от резервуара с углеводородами, расположенного на большой глубине, для различных начальных условий и мощности ледяного покрытия.

1. Постановка задачи. Решается полная система уравнений, описывающих состояние сплошной линейно-упругой среды, и полная система уравнений, описывающая акустическое поля. Компоненты скорости движения \vec{v} и симметричного тензора напряжений Коши $\boldsymbol{\sigma}$ в линейно-упругой среде описываются следующей системой уравнений [7]:

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \vec{v} = (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma})^T, \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{\sigma} = \lambda (\nabla \cdot \vec{v}) \mathbf{I} + \mu (\nabla \otimes \vec{v} + (\nabla \otimes \vec{v})^T). \quad (2)$$

Для численного моделирования морской воды и нефтесодержащих включений использовалось приближение идеальной жидкости [8] и решалась полная система уравнений, описывающая акустическое поле давления p и компонентов скорости \vec{v} :

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \vec{v} = -\nabla p, \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} p = -c^2 \rho (\nabla \cdot \vec{v}). \quad (4)$$

В (1), (2) λ , μ – параметры Ляме, определяющие свойства упругого материала; $\vec{a} \otimes \vec{b}$ – тензорное произведение векторов \vec{a} и \vec{b} ; $(\vec{a} \otimes \vec{b})^{ij} = a^i b^j$; \mathbf{I} – единичный тензор второго ранга. В (4) c обозначена скорость звука в идеальной жидкости. Скорость продольных волн в линейно-упругой среде можно найти по формуле

$$c_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad (5)$$

а скорость поперечных волн вычисляется в соответствии с

$$c_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}. \quad (6)$$

2. Численный метод. Для численного решения систем (1), (2) и (3), (4) используется сеточно-характеристический метод на криволинейных структурных сетках, позволяющий строить корректные численные алгоритмы для расчета граничных точек и точек, лежащих на поверхностях раздела двух сред с разными параметрами Ляме и (или) плотностями.

Систему (1), (2) в двумерном случае можно представить в следующем виде:

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial t} + \mathbf{A}_1 \frac{\partial \bar{q}}{\partial x_1} + \mathbf{A}_2 \frac{\partial \bar{q}}{\partial x_2} = 0. \quad (7)$$

В (7) под вектором \bar{q} понимается вектор, составленный из двух компонентов скорости и трех компонентов симметричного тензора напряжений:

$$\bar{q} \in \{v_1, v_2, \sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}\}^T.$$

Вначале применяется метод расщепления по пространственным координатам, в результате чего имеем две одномерных системы

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial t} = \mathbf{A}_j \frac{\partial \bar{q}}{\partial x_j}. \quad (8)$$

Каждая из этих систем является гиперболической и обладает полным набором собственных векторов с действительными собственными значениями, поэтому каждую из систем можно переписать в виде

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial t} = \mathbf{\Omega}_j^{-1} \mathbf{\Lambda}_j \mathbf{\Omega}_j \frac{\partial \bar{q}}{\partial x_j},$$

где матрица $\mathbf{\Omega}_j$ – матрица, составленная из собственных векторов; $\mathbf{\Lambda}_j$ – диагональная матрица, элементами которой являются собственные значения. Для всех координат матрица $\mathbf{\Lambda}$ имеет вид (индекс j далее опускается, где это возможно)

$$\mathbf{\Lambda} = \text{diag}\{c_p, -c_p, c_s, -c_s, 0\}.$$

После замены переменных $\bar{p} = \mathbf{\Omega} \bar{q}$ каждая из систем (8) распадается на пять независимых скалярных уравнений переноса

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial t} + \mathbf{\Lambda} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} = 0.$$

Одномерные уравнения переноса решаются с помощью метода характеристик либо обычными конечно-разностными схемами.

После того как все компоненты перенесены, восстанавливается само решение:

$$\bar{q}^{n+1} = \mathbf{\Omega}^{-1} \bar{p}^{n+1}.$$

Решение системы (3), (4) в двумерном случае, а также решение систем (1), (2) и (3),(4) в трехмерном случае проводится по аналогичным алгоритмам.

В программе реализовано применение TVD-разностных схем 2-го порядка точности [9], 15 различных лимитеров [10], в расчетах в основном используются ограничитель superbee [11] и сеточно-характеристические схемы 2–4 порядка точности [6].

3. Контактное условие между жидкостью и твердым телом. Пусть в части области интегрирования a решается система уравнений (1), (2) а в части области интегрирования b решается система уравнений (3), (4). Рассмотрим контактное условие между ними. Система (1), (2) в трехмерном случае имеет три выходящие характеристики, а система (3), (4) в трехмерном случае имеет одну выходящую характеристику. Таким образом, для нахождения всех четырех выходящих характеристик необходимо выполнение следующих контактных условий:

$$p^{b,n+1} = -(\sigma^{a,n+1} \cdot \vec{p}) \cdot \vec{p}, \quad (9)$$

$$\sigma^{a,n+1} \cdot \vec{p} - (\sigma^{a,n+1} \cdot \vec{p}) \cdot \vec{p} = 0, \quad (10)$$

$$\vec{v}^{a,n+1} \cdot \vec{p} = \vec{v}^{b,n+1} \cdot \vec{p}. \quad (11)$$

Условие (9) представляет собой равенство нормального компонента поверхностной плотности сил со стороны твердого тела давлению в идеальной жидкости, условие (10) обеспечивает равенство нулю тангенциального компонента поверхностной плотности сил со стороны твердого тела, а (11) задает равенство нормальных компонентов скоростей в идеальной жидкости и твердом теле. В (9)–(11) \vec{p} обозначена внешняя нормаль к твердому телу, являющаяся внутренней нормалью к жидкости.

Вычисляется вектор скорости \vec{V} , такой, чтобы условия (9)–(11) были выполнены. Далее для твердого тела используется граничное условие с заданной скоростью, а для жидкости используется граничное условие с заданной нормальной компонентой скорости.

4. Результаты численного моделирования. В данной работе исследовались волновые картины, возникающие в системах «вода – грунт» и «лед – вода – грунт», причем грунт содержал нефтесодержащее включение.

4.1. Система «вода – грунт». Рассматривается задача для системы «вода – грунт», т.е. со свободной поверхностью моря. Для численного эксперимента плотность воды бралась равной $1000 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, скорость звука $1500 \frac{\text{м}}{\text{с}}$. Для грунта плотностью $2500 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ важно знать как продольную составляющую скорости звука, равную $4500 \frac{\text{м}}{\text{с}}$, так и поперечную, составляющую $2250 \frac{\text{м}}{\text{с}}$.

Для выполнения расчёта строится трёхмерная прямоугольная сетка на 10000 узлов, шаг по времени равнялся 10^{-3} с, и 10 м по пространству. Глубина моря составляет 1000 м.

На рис. 1 представлен результат отражения плоского возмущения среды от грунта, не содержащего углеводородов.

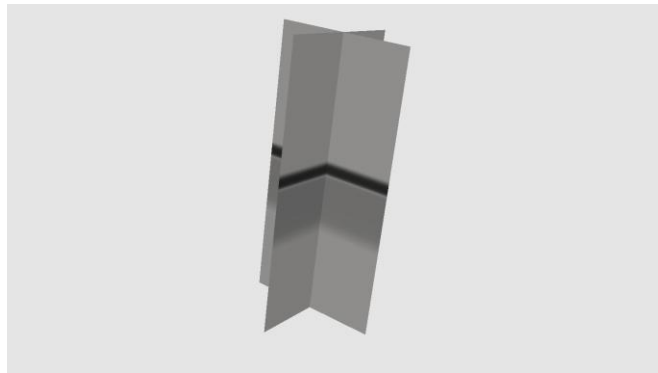


Рис. 1. Прохождение плоской волны в системе «вода – грунт»

При сферическом возмущении возникает следующая картина (рис. 2).

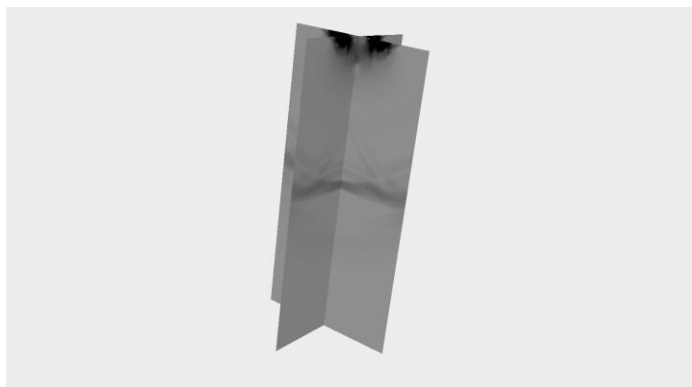


Рис. 2. Прохождение сферического возмущения в системе «вода – грунт»

На рис. 3 продемонстрирован отклик среды, содержащей плоский углеводородонасыщенный слой, залегающий в 500 м под поверхностью грунта. Заданы параметры слоя: плотность – 2000 кг/м^3 , продольная скорость распространения звука – 4000 м/с , поперечная – 1250 м/с .

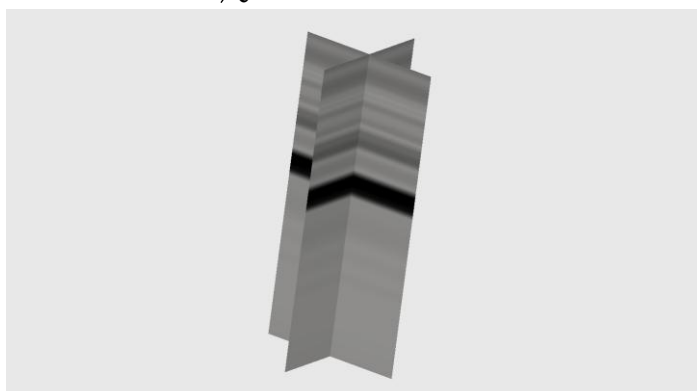


Рис. 3. Прохождение плоской волны через углеводородосодержащий слой

4.2. Система «лед – вода – грунт». Система «вода – грунт» решалась в двумерном приближении. Шаг по пространству составлял 0.2 м, шаг по времени равнялся $3 \cdot 10^{-5}$ с, было выполнено 6 тысяч шагов по времени. Рассматривался слой льда толщиной 4 метра и плотностью 917 кг/м^3 . Скорость продольных волн во льду полагалась равной 3940 м/с , а поперечных волн – 3650 м/с . Рассматривался слой воды толщиной 100 м, что соответствует Ленинградскому и Русановскому месторождениям Карского моря [12]. Скорость продольных волн в грунте составляла 6500 м/с , а поперечных – 3700 м/с , плотность задавалась равной 2500 кг/м^3 . Плотность воды равнялась 1000 кг/м^3 , скорость звука составляет 1500 м/с .

На рис. 4 приведена картина сейсмических и гидроакустических волн, возникающих при точечном воздействии на верхнюю кромку льда импульсом Риккера, а на рис. 5 изображено формирование отклика от резервуара с глубиной залегания 50 м. На рис. 6 приведена волновая картина в тот же момент времени в постановке задачи без резервуара.

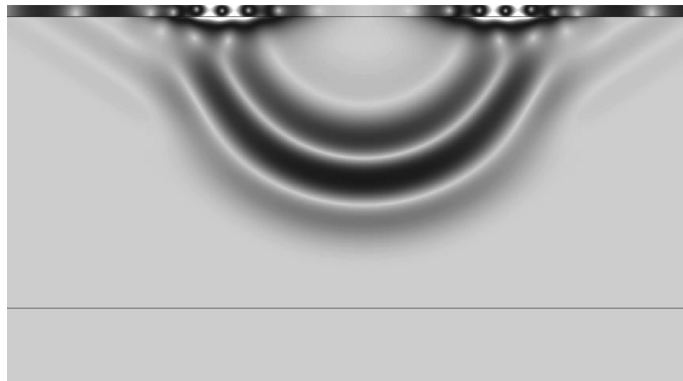


Рис. 4. Сейсмические и гидроакустические волны в системе «лед – вода – грунт»

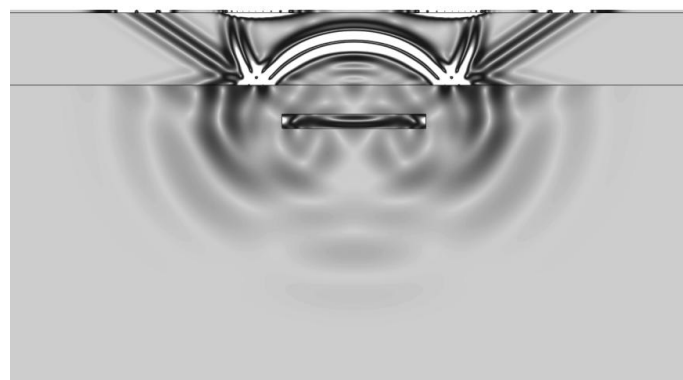


Рис. 5. Отклик от границы «вода – грунт» и от включения в системе «лед – вода – грунт»

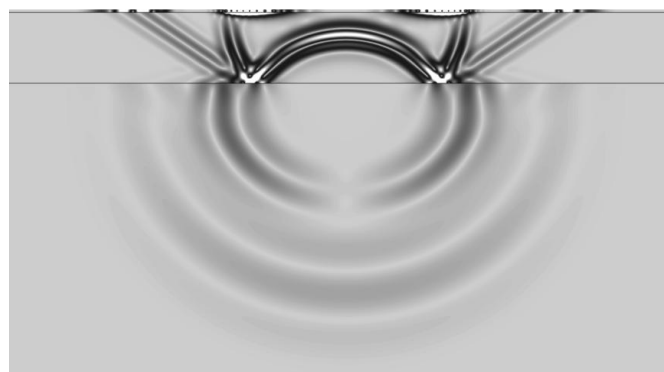


Рис. 6. Отклик от границы «вода – грунт» в системе «лед – вода – грунт»

Заключение. В настоящей статье рассматривается моделирование и численное решение задач сейсморазведки углеводородов в шельфовой зоне северных морей. Решение задачи проведено сеточно-характеристическим методом. Разработано граничное условие между частью области интегрирования, в которой решается система уравнений упругости, описывающая состояние бесконечно малого объёма сплошной линейно-упругой среды для области, и областью, в которой справедлива система уравнений акустики.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Etter P.C.* Underwater Acoustic Modelling and Simulation. – 3rd edition. – London: Spon Press, 2003.
2. *Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю.* Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. – М.: Физматлит, 2001. – 608 с.
3. *Магомедов К.М., Холодов А.С.* Сеточно-характеристические численные методы. – М.: Наука, 1988. – 287 с.
4. *Иванов В.Д., Кондауров В.И., Петров И.Б., Холодов А.С.* Расчет динамического деформирования и разрушения упругопластических тел сеточно-характеристическими методами // Математическое моделирование. – 1990. – Т. 2, № 11. – С. 10-29.
5. *Favorskaya A.V., Petrov I.B., Sannikov A.V., Kvasov I.E.* Grid Characteristic Method Using High Order Interpolation on Tetrahedral Hierarchical Meshes with a Multiple Time Step // *Mathematical Models and Computer Simulations.* – 2013. – Vol. 5, No. 5. – P. 409-415.
6. *Голубев В.И., Петров И.Б., Хохлов Н.И.* Численное моделирование сейсмической активности сеточно-характеристическим методом // Журнал вычисл. математики и матем. физики. – 2013. – Т. 53, № 10. – С. 1709-1720.
7. *Новацкий В.К.* Теория упругости. – М.: Изд-во Мир, 1975. – 872 с.
8. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 7. – М.: Наука Главная редакция физико-математической литературы, 1987.
9. *Harten Ami.* High resolution schemes for hyperbolic conservation laws // *Journal of Computational Physics.* – 1997. – Vol. 135 (2). – P. 260-278.
10. *Петров И.Б., Хохлов Н.И.* Сравнение TVD-лимитеров для численного решения уравнений динамики деформируемого твердого тела сеточно-характеристическим методом // Математические модели и задачи управления: Сборник научных трудов. – 2011. – С. 104-111.
11. *Roe P.L.* Characteristic-Based Schemes for the Euler Equations // *Annual Review of Fluid Mechanics.* – 1986. – No. 18. – P. 337-365.
12. *Новиков Ю.Н., Гажула С.В.* Особенности оценки месторождений углеводородного сырья арктического шельфа России и их переоценки в соответствии с новой классификацией запасов // Нефтегазовая технология. Теория и практика. – 2008. – № 3. – www.ngtp.ru.

REFERENCES

1. *Etter P.C.* Underwater Acoustic Modelling and Simulation. 3rd ed. London: Spon Press, 2003.
2. *Kulikovskiy A.G., Pogorelov N.V., Semenov A.Yu.* Matematicheskie voprosy chislennogo resheniya giperbolicheskikh sistem uravneniy [Mathematical problems of numerical solution of hyperbolic systems of equations]. Moscow: Fizmatlit, 2001, 608 p.
3. *Magomedov K.M., Kholodov A.S.* Setochno-kharakteristicheskie chislennye metody [Grid-characteristic numerical methods]. Moscow: Nauka, 1988, 287 p.
4. *Ivanov V.D., Kondaurov V.I., Petrov I.B., Kholodov A.S.* Raschet dinamicheskogo deformirovaniya i razrusheniya uprugoplasticheskikh tel setochno-kharakteristicheskimi metodami [The calculation of the dynamic deformation and fracture of elastic-plastic solids grid-characteristic methods], *Matemematischeskoe modelirovanie* [Matematischeskoe modeling], 1990, Vol. 2, No. 11, pp. 10-29.

5. Favorskaya A.V., Petrov I.B., Sannikov A.V., Kvasov I.E. Grid Characteristic Method Using High Order Interpolation on Tetrahedral Hierarchical Meshes with a Multiple Time Step, *Mathematical Models and Computer Simulations*, 2013, Vol. 5, No. 5, pp. 409-415.
6. Golubev V.I., Petrov I.B., Khokhlov N.I. Chislennoe modelirovanie seismicheskoy aktivnosti setochno-kharakteristicheskim metodom [Numerical modeling of seismic activity grid-characteristic method], *Zhurnal vychisl. matematiki i matem. fiziki* [Journal vychislimoi mathematics and mathematical physics], 2013, Vol. 53, No. 10, pp. 1709-1720.
7. Novatskiy V.K. Teoriya uprugosti [Elasticity theory]. Moscow: Izd-vo Mir, 1975, 872 p.
8. Landau L.D., Lifshits E.M. Teoreticheskaya fizika [Theoretical physics], Vol. 7. Moscow: Nauka Glavnaya redaktsiya fiziko-matematicheskoy literatury, 1987.
9. Harten Ami. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws, *Journal of Computational Physics*, 1997, Vol. 135 (2), pp. 260-278.
10. Petrov I.B., Khokhlov N.I. Sravnenie TVD-limiterov dlya chislennogo resheniya uravneniy dinamiki deformiruемого tverdogo tela setochno-kharakteristicheskim metodom [Comparison TVD-limiters for the numerical solution of the equations of the dynamics of deformable solids grid-characteristic method], *Matematicheskie modeli i zadachi upravleniya: Sbornik nauchnykh trudov* [Mathematical models and control problems: Proceedings of the], 2011, pp. 104-111.
11. Roe P.L. Characteristic-Based Schemes for the Euler Equations, *Annual Review of Fluid Mechanics*, 1986, No. 18, pp. 337-365.
12. Novikov Yu.N., Gazhula S.V. Osobennosti otsenki mestorozhdeniy uglevodorodnogo syr'ya arkticheskogo shel'fa Rossii i ikh pereotsenki v sootvetstvii s novoy klassifikatsiey zapasov [Estimation of hydrocarbon deposits on the Arctic shelf of Russia and their revaluation in accordance with the new classification of reserves], *Neftegazovaya tekhnologiya. Teoriya i praktika* [Oil and gas technology. Theory and practice], 2008, No. 3. Available at: <http://www.ngtp.ru>.

Статью рекомендовал к опубликованию д.ф.-м.н., профессор А.А. Шананин.

Фаворская Алена Владимировна – МФТИ; e-mail: aleanera@yandex.ru; г. Долгопрудный, Институтский п-к, 9; тел.: 89670083986; м.н.с.

Петров Игорь Борисович – e-mail: petrov@mipt.ru; тел.: 89036810022; кафедра информатики; зав. кафедрой.

Петров Дмитрий Игоревич – e-mail: diapetr@gmail.com; тел.: 89031537919; ассистент.

Хохлов Николай Игоревич – e-mail: k_h@inbox.ru; тел.: 89160105212; с.н.с.

Favorskaya Alena Vladimirovna – MIPT; e-mail: aleanera@yandex.ru; 9, Institutskiy pereulok, Dolgoprudny, Russia; phone: +79670083986; junior researcher.

Petrov Igor Borisovich – e-mail: petrov@mipt.ru; phone: +79036810022; the department of computer science; head of department.

Petrov Dmitry Igorevich – e-mail: diapetr@gmail.com; phone: +79031537919; assistant.

Khokhlov Nikolay Igorevich – e-mail: k_h@inbox.ru; phone: +79160105212; senior researcher.